Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis Doctoral

SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE NULIDAD DE UNA SUBVARIEDAD DE UNA FORMA ESPACIAL

Francisco Vittone

Director: **Dr. Carlos E. Olmos**

Co-directora: **Dra. Gabriela P. Ovando**

Año 2011

Resumen

En este trabajo estudiaremos la distribución de nulidad de una subvariedad M de una forma espacial, que es (cuando está bien definida) la distribución dada por el núcleo común de todos los operadores de forma de M. Trabajaremos con los modelos estándares de una forma espacial, esto es, el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ ($\kappa = 0$), la esfera $\mathbb{S}^n$ ($\kappa = 1$) y el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ ($\kappa = -1$). Probaremos numerosas propiedades generales de la distribución de nulidad, entre ellas, daremos una prueba geométrica de la completitud de las variedades integrales cuando la variedad es completa. Posteriormente daremos una descripción local de cualquier subvariedad del espacio Euclídeo o la esfera como una unión de subvariedades paralelas, que involucra la distribución de nulidad. Finalmente probaremos un resultado global, el principal de este trabajo, que establece que todo par de puntos en una subvariedad conexa, completa, irreducible y con índice de nulidad constante pueden unirse por una curva perpendicular a la distribución de nulidad, y daremos un contraejemplo para mostrar que esta propiedad no es válida en el espacio hiperbólico.

Introducción

Sea M^n una subvariedad de una forma espacial Q^{n+k}. El subespacio de nulidad $\mathcal{N}$, de la segunda forma fundamental de M en un punto p dado es el núcleo común de todos los operadores de forma de M en p. El índice de nulidad en p es la dimensión del subespacio de nulidad $\mathcal{N}_p$.

En el caso de subvariedades del espacio Euclídeo, la distribución de nulidad aparece naturalmente en muchos problemas, ya que $\mathcal{N} = \ker(dG)$, donde $G : M \to G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ es la aplicación de Gauss que asigna a cada punto de M su espacio normal. Más aún, hay muchos ejemplos de subvariedades del espacio Euclídeo con índice de nulidad constante que se obtienen a partir de las denominadas *parametrizaciones de Gauss*, que involucran la aplicación de Gauss (ver por ejemplo [9]).

El objetivo principal de este trabajo es probar un teorema global que establece que cualquier par de puntos en una variedad conexa, completa e irreducible del espacio Euclídeo o la esfera pueden unirse por una curva perpendicular al subespacio de nulidad en cada punto (cf. Teorema 33). Esto es equivalente a decir que la distribución complementaria $\mathcal{N}^{\perp}$ es *completamente no integrable.* En un marco más general, para una distribución $\mathcal{D}$ en una variedad Riemanniana, es un problema importante decidir si es completamente no integrable, en el sentido de que dos puntos cualesquiera pueden unirse por una curva siempre tangente a $\mathcal{D}$ (esto implica, entre otras cosas, que la distancia de Carnot-Caratheodory asociada a $\mathcal{D}$ es finita, ver [15]). Para el caso de subvariedades, un resultado muy importante sobre la completa no integrabilidad de una autodistribución, y en el espíritu de nuestro teorema global, es el denominado *"Homogeneous Slice Theorem"* (cf. [19]). Este teorema, que tiene numerosas aplicaciones (ver por ejemplo [4], [36]), establece en particular, que para una subvariedad conexa, irreducible e isoparamétrica de la esfera, la distribución perpendicular a cualquier autodistribución del operador de forma es completamente no integrable. En dimensión infinita, Heintze y Liu probaron en [17] un resultado similar al Teorema 33 para subvariedades isoparamétricas de codimensión al menos dos en un espacio de Hilbert. Este resultado es un paso crucial para probar que estas subvariedades son homogéneas, y en la prueba se usa fuertemente la propiedad de isoparametricidad. En el teorema 33 mostramos que en dimensión finita, la completa no integrabilidad de la distribución $\mathcal{N}^{\perp}$ es un hecho muy general que no depende de propiedades adicionales de la subvariedad.

Esta Tesis está articulada en tres capítulos:

- En el Capítulo 1 demostraremos las propiedades básicas que cumple la distribución de nulidad. A partir de las ecuaciones de Codazzi, $\mathcal{N}$ resulta ser una distribución bien definida y autoparalela, y por consiguiente con hojas (subvariedades integrales) totalmente geodésicas, en un subconjunto abierto y denso adecuado de M. Sus hojas son además subvariedades totalmente geodésicas de la forma espacial ambiente. Si M es completa, sus hojas por puntos con índice de nulidad mínimo son también completas. Este es un hecho fundamental probado por Ferus en [14] (ver también [8]), en una prueba sencilla que utiliza técnicas de la teoría de ecuaciones diferenciales. En la sección 1.2.2 presentaremos un teorema más general, con una prueba geométrica muy simple, del que se desprenderá este resultado.

  También introduciremos el marco adecuado para poder demostrar el teorema global. Si consideramos el espacio de hojas $M/\mathcal{N}$ y la proyección canónica $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$, veremos que $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ es un espacio fibrado cuando M es una subvariedad del espacio Euclídeo o la esfera. Introduciremos una noción de levantamiento horizontal de curvas en $M/\mathcal{N}$, donde el espacio horizontal es $\mathcal{N}^{\perp}$. Esto nos permitirá definir transporte paralelo y grupos de holonomía, y probaremos que estos grupos tienen las propiedades usuales de los grupos de holonomía asociados a conexiones lineales en fibrados vectoriales. Nuestro problema se traducirá entonces en demostrar que estos grupos de holonomía actúan transitivamente en cada fibra de $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$.

- En el Capítulo 2 demostraremos el teorema local, que establece que en una subvariedad cualquiera del espacio Euclídeo o la esfera, todo punto admite un entorno donde cualquier otro punto puede unirse a él por una curva horizontal, o bien la variedad es localmente una unión de variedades paralelas a lo largo de un fibrado paralelo y plano adecuado. Para la prueba de este teorema utilizaremos herramientas delicadas de la teoría de holonomía normal en subvariedades, tales como variedades paralelas, tubos esféricos y holonómicos. Muchas de estas herramientas fueron introducidas en [7].

- Finalmente, en el Capítulo 3 probaremos el teorema global y mostraremos con un contraejemplo que este resultado no es válido para subvariedades del espacio hiperbólico. Cabe observar que para la prueba del teorema global es muy importante el hecho de poder focalizar subvariedades tanto en el espacio Euclídeo como en la esfera, hecho que no es posible, en general, en el espacio Lorentziano, donde consideraremos contenido el espacio hiperbólico.

Los resultados principales de esta Tesis fueron reunidos en los artículos *"On the nullity distribution of a submanifold of a space form"* [37] y *"On completeness of integral manifolds of nullity distributions"* [27], y fueron divulgados en trabajos presentados en la "XVI Escola Brasileira de Geometria Diferencial", en San Pablo (Brasil), en julio de 2010, en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, en Tandil, en septiembre de 2010, en el "V Encuentro de Geometría Diferencial", en Córdoba en junio de 2011 y el la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, en Tumumán en Septiembre de 2011. Cabe destacar además que este trabajo fue realizado con el financiamiento del CONICET, a través de las Becas de Posgrado Tipo I (2007-2010) y Tipo II (2010-2012).

Índice general

Capítulo 1

Resultados Generales

1.1. La distribución de nulidad

1.1.1. Subvariedades

En esta sección presentaremos los resultados básicos de la teoría de subvariedades, principalmente para establecer las notaciones que usaremos en el resto del trabajo. Para más detalles sobre estos temas sugerimos consultar [4], [8] o [10]

Existen comúnmente tres definiciones de una subvariedad Riemanniana, que coinciden cuando trabajamos en geometría local. La definición más general consiste en considerar dos variedades Riemannianas M y $\overline{M}$ y una inmersión isométrica $f : M \to \overline{M}$. En este caso decimos que M es una ***subvariedad Riemanniana inmersa***. Cuando f es una inmersión isométrica inyectiva o M es un subconjunto de $\overline{M}$ y la inclusión es una inmersión, decimos simplemente que M es una ***subvariedad Riemanniana*** de $\overline{M}$. En este último caso, si además la inclusión es un embebimiento, decimos que M es una ***subvariedad Riemanniana embebida***. Como ya hemos mencionado, a nivel local estas definiciones son equivalentes. En todo este trabajo consideraremos subvariedades Riemannianas de una forma espacial, y supondremos que la subvariedad está contenida en el espacio ambiente, a los efectos de simplificar la notación. Sin embargo, todos los resultados, incluso los globales, son válidos para subvariedades inmersas.

Por una ***forma espacial*** entendemos una variedad Riemanniana Q simplemente conexa, completa y con curvatura seccional constante. Trabajaremos con los modelos estándards de una forma espacial:

- $\mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable y la métrica usuales, para $\kappa = 0$;
- $\mathbb{S}^n(\kappa^{-1/2})$, la esfera de radio $\kappa^{-1/2}$ considerada como subvariedad Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$, para $\kappa > 0$
- $\mathbb{H}^n((-\kappa)^{-1/2})$, el espacio hiperbólico considerado como subvariedad Riemanniana del espacio Lorentziano $\mathbb{L}^{n+1}$ para $\kappa < 0$ (cf. la sección 3.3).

Sea entonces M^n una subvariedad Riemanniana de una forma espacial Q^{n+k}. Denotaremos por ∇ y $\widetilde{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita de M y Q respectivamente. Sea $\nu M = (TM)^{\perp}$ el fibrado normal de M, esto es

$$\nu M = \bigcup_{p \in M} \nu_p M.$$

donde $\nu_p M$ es el complemento ortogonal de $T_p M$ en $T_p Q$. Denotaremos por $\nabla^{\perp}$ a la conexión normal de M y por α y A a la segunda forma fundamental y al operador de forma de M respectivamente.

Recordemos que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son campos tangentes a M y $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ es un campo normal (i.e, una sección de νM), entonces

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \tag{1.1}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla^{\perp}_X \eta \tag{1.2}$$

es la descomposición en sus partes tangente y normal de $\widetilde{\nabla}_X Y$ y $\widetilde{\nabla}_X \eta$ respectivamente, según la descomposición $TQ_{|M} = TM \oplus \nu M$.

Además α es una forma $C^{\infty}(M)$-bilineal simétrica y A_ξ es un operador autoadjunto que se relacionan de la manera siguiente:

$$\langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \langle A_\eta X, Y \rangle \tag{1.3}$$

La fórmula (1.1) se denomina ***fórmula de Gauss*** y la fórmula (1.2) se denomina ***fórmula de Weingarten*** (cf. [10]).

Recordemos las ecuaciones que relacionan la geometría de M con la del espacio ambiente. Denotemos por R y $R^{\perp}$ los tensores de curvatura de Riemann y normal (i.e., respecto de la conexión normal) de M respectivamente. Entonces para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ valen (cf. [4]):

Ecuación de Gauss:

$$\langle R(X, Y, Z), W \rangle = \kappa \left(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \right) + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle . \tag{1.4}$$

Ecuación de Codazzi:

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X, Z) \tag{1.5}$$

donde $(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X (\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$;

Ecuación de Ricci:

$$\left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle \,. \tag{1.6}$$

La segunda forma fundamental y el operador de forma juegan un rol fundamental en la geometría de subvariedades y resultan de gran utilidad para dar una descripción simple de ciertas subvariedades con propiedades importantes.

Recordemos que una subvariedad M de Q se denomina ***totalmente geodésica*** si toda geodésica en Q por un punto de M cuya velocidad inicial sea un vector tangente a M yace íntegramente en M. Equivalentemente, M es totalmente geodésica si y sólo si el operador de forma α es idénticamente nulo. Es fácil ver que las subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{R}^n$ son los subespacios afines y las subvariedades totalmente geodésicas, completas y conexas de la esfera $\mathbb{S}^n$ o el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ son la intersección de $\mathbb{S}^n$ con los subespacios lineales de $\mathbb{R}^{n+1}$ en el primer caso, y la intersección de $\mathbb{H}^n$ con los subespacios lineales Lorentzianos de $\mathbb{L}^{n+1}$ en el segundo (cf. [4, Sec. 2.4]).

La segunda forma fundamental permite además establecer un criterio simple para determinar si una subvariedad es un producto de subvariedades.

Comencemos recordando que una distribución $\mathcal{D}$ en M se dice ***paralela*** si para cada par de campos vectoriales $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \chi(M)$ vale $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$, o equivalentemente, si $\mathcal{D}$ es invariante por transporte paralelo en M. $\mathcal{D}$ se denomina una distribución ***autoparalela*** si $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$ para cada par de campos vectoriales $X, Y \in \mathcal{D}$. Es fácil comprobar que si M es una subvariedad Riemanniana, entonces $\mathcal{D}$ es paralela si y sólo si $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^{\perp}$ son ambas autoparalelas. Una distribución autoparalela es automáticamente involutiva (y por lo tanto integrable) y sus subvariedades integrales son totalmente geodésicas (cf.[5, Ch. 10]).

Un subespacio V de T_pM se dice ***invariante por los operadores de forma*** de M (o de manera más sintética A-***invariante***) si $A_{\xi_p}(V) \subset V$ para cada $\xi_p \in \nu_p M$. Una distribución $\mathcal{D}$ en M se dice A-invariante si cada subespacio $\mathcal{D}(p)$ lo es. Finalmente, dada una subvariedad N de M decimos que N es A-invariante si cada espacio tangente $T_pN \subset T_pM$ es A-invariante, para cada $p \in N$.

Diremos que M es ***irreducible*** si no existe ninguna distribución no trivial, paralela y A-invariante en M. Equivalentemente, M es irreducible si no admite ninguna distribución no trivial, A-invariante y autoparalela tal que su complemento ortogonal también es una distribución autoparalela. A partir del Lema de Moore (ver [4, Lema 2.7.1], [23]), si M es una subvariedad inmersa completa y simplemente conexa, esto es equivalente a pedir que $f : M \to \mathbb{R}^n$ no sea el producto de dos inmersiones isométricas.

Si M es una subvariedad de la esfera $\mathbb{S}^m$, decimos que M es irreducible si lo es como subvariedad del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^{m+1}$.

Finalizaremos introduciendo el concepto de ***normales de curvatura*** (cf. [4, Sec. 6.1]). Supongamos que M es una subvariedad con fibrado normal plano (i.e, $R^\perp \equiv 0$). Fijemos $p \in M$. Entonces, a partir de la ecuación de Ricci (1.6), los operadores de forma A_{ξ_p} variando ξ_p en $\nu_p M$ conmutan entre sí, y por lo tanto son simultáneamente diagonalizables. Esto induce una descomposición del espacio tangente en p

$$T_pM = E_1(p) \oplus \cdots E_{g(p)}(p)$$

en autoespacios comunes distintos, esto es, tales que $A_{\xi_p|E_i(p)} = \lambda_i(\xi_p) Id_{|E_i(p)}$. Existen entonces vectores normales bien definidos $\eta_i(p)$ tales que $\lambda_i(\xi_p) = \langle \eta_i(p), \xi_p \rangle$, o sea,

$$A_{\xi_p|E_i(p)} = \langle \eta_i(p), \xi_p \rangle \, Id_{|E_i(p)}.$$

El vector $\eta_i(p)$ se denomina normal de curvatura asociado al autoespacio $E_i(p)$ y la dimensión de $E_i(p)$ se denomina ***multiplicidad*** de $\eta_i(p)$.

Es posible mostrar que existe un subconjunto abierto y denso Ω en M donde el número $g(p)$ de autodistribuciones es localmente constante. En Ω, los autoespacios E_i definen, localmente, autodistribuciones C^∞ y los normales de curvatura asociados son campos normales localmente bien definidos y C^∞. Cada autodistribución en Ω es integrable y, si $\dim(E_i) \geq 2$, entonces $\nabla^\perp_X \eta_i = 0$ si $X \in E_i$. Que η_i sea paralelo respecto de la conexión normal en direcciones normales a E_i es equivalente a que E_i sea una distribución autoparalela (cf. [25]).

1.1.2. El subespacio de nulidad

Dado $p \in M$, se denomina ***subespacio de nulidad de*** M ***en*** p al subespacio $\mathcal{N}_p$ de T_pM dado por

$$\mathcal{N}_p := \{x \in T_pM : \alpha(x, \cdot) = 0\}.$$

A partir de la relación (1.3) es inmediato verificar la caracterización

$$\mathcal{N}_p = \bigcap_{\xi \in \nu_p M} \ker(A_\xi),$$

o sea que, como ya hemos adelantado, el subespacio de nulidad es el núcleo común de los operadores de forma de M. Se denomina ***índice de nulidad*** de M en p a $\mu(p) := \dim(\mathcal{N}_p)$ (algunos autores denominan este índice como ***nulidad relativa***, cf. [8], [9]).

A continuación estableceremos dos propiedades básicas que verifican la distribución de nulidad. Ellas son bien conocidas, aunque difíciles de hallar u omitidas en la bibliografía, por lo cual incluimos aquí sus pruebas. Para el caso de subvariedades del espacio Euclídeo puede verse [2].

Lema 1 *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los puntos $p \in M$ tales que $\mu(p)$ es mínimo en un entorno de p. Entonces $\mathcal{C}$ es un abierto denso en M y μ es constante en cada componente conexa de $\mathcal{C}$.*

Demostración: Probaremos primero que μ no aumenta en un entorno de cada punto. Sea $p \in M$ cualquiera y sea $\xi^1, \cdots, \xi^k$ un marco local de νM en un entorno U de p. Definamos $F_q = \sum_{i=1}^k A^2_{\xi^i_q}$ para cada $q \in U$. Entonces F_q es un operador autoadjunto y es fácil ver que $\ker(F_q) = \mathcal{N}_q$. Luego $Im(F_q)$ es el complemento ortogonal en T_qM de $\mathcal{N}_q$ y bastará probar que $dim(Im(F_q))$ no disminuye en un entorno de p. Supongamos que $\dim(Im(F_p)) = l$. Sean $X_1, \cdots, X_l$ campos linealmente independientes en U (achicando U si es necesario) tales que $\{F_p(X_i(p))\}$ es base de $Im(F_p)$. Consideremos la aplicación $f : U \to \mathbb{R}$ dada por $f(q) = \det\left(\left\langle F_q(X^i_q), F_q(X^j_q)\right\rangle\right)$. f es continua y $f(p) \neq 0$, con lo cual f no se anula en un entorno de p y entonces $\{F_q(X_i(q))\}$ es l.i en $Im(F_q)$ en un entorno $\widetilde{U}$ de p. O sea $\dim(Im(F_q)) \geq \dim(Im(F_p))$ en $\widetilde{U}$.

De este hecho se deduce inmediatamente que $\mathcal{C}$ es abierto en M. Si ahora $q \in M$ es cualquiera y U es un entorno de q donde μ no aumenta, entonces un punto p de U donde μ es mínimo debe estar en $\mathcal{C}$, lo que muestra que $\mathcal{C}$ es denso en M.

Finalmente, veamos que μ es constante en cada componente conexa de $\mathcal{C}$. Sean $p \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ la componente conexa de p y $\widetilde{\mathcal{C}_0} = \{q \in \mathcal{C}_0 : \mu(p) = \mu(q)\}$. Resulta claro que $\widetilde{\mathcal{C}_0}$ es abierto en $\mathcal{C}_0$, veamos que también es cerrado. Sea $\{q_j\}$ una sucesión en $\widetilde{\mathcal{C}_0}$ convergente a $q_0 \in \mathcal{C}_0$. Sea $U \subset \mathcal{C}_0$ un entorno de q_0 tal que $\mu(q) = \mu(q_0)$ para todo $q \in U$. Luego existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(q_j) = \mu(q_0)$ para cada $j \geq n_0$. Como $\mu(q_j) = \mu(p)$ para cada j, resulta $\mu(q_0) = \mu(p)$ con lo cual $q_0 \in \widetilde{\mathcal{C}_0}$. ■

Lema 2 *Sea $\mathcal{C}$ como en el Lema 1. Entonces $\mathcal{N} : p \mapsto \mathcal{N}_p$ define una distribución C^∞, autoparalela (y por lo tanto integrable y con hojas totalmente geodésicas) en cada componente conexa de $\mathcal{C}$, denominada **distribución de nulidad**. Más aún, las hojas son totalmente geodésicas en el espacio ambiente Q.*

Demostración: Sea $\mathcal{C}_0$ una componente conexa de $\mathcal{C}$. Por el lema 1, μ es constante, digamos r, en $\mathcal{C}_0$. Sea F_q definido como en la demostración del lema 1 para cada $q \in \mathcal{C}_0$. Entonces hemos visto que $q \to Im(F_q)$ define una distribución C^∞ de dimensión $l = n - r$ en $\mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{N}$ es la distribución ortogonal complementaria a $Im(F)$ resulta inmediato que es una distribución C^∞.

Veamos que es autoparalela. Sean X, Y campos tangentes en $\mathcal{C}_0$ que yacen en $\mathcal{N}$, y ξ y Z un campo normal y uno tangente a $\mathcal{C}_0$ cualesquiera. Entonces $A_\xi X = A_\xi Y = 0$ y como A_ξ es autoadjunto, resulta:

$$\langle (\nabla_Z A_\xi)Y, X\rangle = \langle \nabla_Z (A_\xi X), Y\rangle - \langle A_\xi(\nabla_Z X), Y\rangle = -\langle \nabla_Z X, A_\xi Y\rangle = 0 \tag{1.7}$$

Una de las consecuencias de la ecuación de Codazzi (1.5) es la igualdad $\langle (\nabla_Z A_\xi)Y, X\rangle = \langle (\nabla_X A_\xi)Y, Z\rangle$. Luego, a partir de (1.7), es inmediato que $\langle A_\xi(\nabla_X Y), Z\rangle = 0$. Como Z y ξ son arbitrarios, resulta que $\nabla_X Y \in \mathcal{N}$.

Finalmente veamos que las subvariedades integrales de $\mathcal{N}$ son totalmente geodésicas en Q. Sea S una subvariedad integral conexa maximal de $\mathcal{N}$ por $q \in \mathcal{C}_0$ y α^S su segunda forma fundamental como subvariedad de Q. Entonces, por la fórmula de Gauss (1.1) y teniendo en cuenta que S es totalmente geodésica en M, es inmediato verificar que α^S coincide con la segunda forma fundamental de M restringida a TS. Pero como los campos tangentes a S yacen en $\mathcal{N}$, resulta $\alpha^S = 0$. ■

1.2. Completitud de las subvariedades integrales

1.2.1. La aplicación de Gauss

Sea $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ la grassmanniana de k-planos de $\mathbb{R}^{n+k}$ (i.e, la colección de subespacios de dimensión k de $\mathbb{R}^{n+k}$). Podemos dar a $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ estructura de variedad diferenciable como el espacio homogéneo $O(n+k)/(O(k) \times O(n))$. Esta estructura es equivalente a la que describiremos a continuación.

Sea P un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^{n+k}$ y sea S un subespacio complementario n-dimensional (o sea, $\mathbb{R}^{n+k} = S \oplus P$). Si $T : S \to P$ una aplicación lineal, entonces $\Gamma(T) = \{x - T^*x : x \in P\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+k}$ de dimensión k tal que $\Gamma(T) \cap S = \{0\}$, donde $T^* : P \to S$ es la transformación adjunta de T. Recíprocamente, dado cualquier subespacio k-dimensional B de $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que $B \cap S = \{0\}$, existe una única aplicación lineal $T : S \to P$ tal que $\Gamma(T) = B$.

Denotemos por $L(S, P)$ al espacio de aplicaciones lineales de S en P y sea U_S el conjunto de subespacios k-dimensionales de $\mathbb{R}^{n+k}$ cuya intersección con S es el subespacio trivial. Entonces, por lo antes visto, $\varphi : L(S, P) \to U_S,\ T \mapsto \varphi(T) = \Gamma(T)$ es biyectiva. Eligiendo bases para S y P, $L(S, P)$ puede identificarse con el espacio $\mathcal{M}^{n \times k}$ de matrices reales $n \times k$, que a su vez se identifica con $\mathbb{R}^{n.k}$. Pidiendo que las aplicaciones de la forma $\varphi^{-1} : U_S \to L(S, P)$ sean cartas locales, podemos dar una estructura de variedad diferenciable a $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ (ver, por ejemplo, [22]). Como $L(S, P)$ es un espacio vectorial, $T_P L(S, P)$ se identifica con $L(S, P)$ y vía el difeomorfismo φ, identificamos $T_P G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ con $L(S, P)$.

Si M^n es una subvariedad de la forma espacial Q^{n+k}, para cada $p \in M$ podemos considerar a $\nu_p M$ como un subespacio de dimesnión k de $\mathbb{R}^{n+k}$ si $Q = \mathbb{R}^{n+k}$ o como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ si Q es la esfera o el espacio hiperbólico, viendo a Q como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ (observando que $\mathbb{H}^{n+k}$ es subvariedad del espacio lorentziano $\mathbb{L}^{n+k+1}$, que como variedad diferenciable, o sea sin la estructura pseudoriemanniana, coincide con $\mathbb{R}^{n+k+1}$).

Se denomina ***aplicación de Gauss*** a la aplicación diferenciable

$$G : M \to G_k(\mathbb{R}^l), p \mapsto \nu_p M$$

con $l = n+k$ si M es una subvariedad del espacio Euclídeo, y $l = n+k+1$ si M es una subvariedad de la esfera o el espacio hiperbólico. Con las identificaciones anteriores, resulta:

Lema 3 *Para cada* $p \in M$*,* $(dG_p v)_{|T_pM} = \alpha(v, \cdot)$*. En particular,* $\mathcal{N}_p = \ker(dG_p)$*.*

Demostración: Sea $p \in M$. Consideremos el entorno U_S de $\nu_p M$ en $G_k(\mathbb{R}^l)$, tomando $S = T_p M$ si M es subvariedad del espacio euclídeo y $S = T_p M \oplus \mathbb{R}p$ si M es subvariedad del espacio hiperbólico o la esfera. Sea $\gamma(t)$ una curva en M con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Entonces $dG_p(v) = (\frac{d}{dt}_{|0} G(\gamma(t))) \approx \frac{d}{dt}_{|0} T_t$ donde $T_t \in L(S, \nu_p M)$ es tal que $\Gamma(T_t) = \nu_{\gamma(t)} M$.

Luego para cada $\xi \in \nu_p M$ existe un campo normal $\eta(t)$ a lo largo de γ tal que $\eta(0) = \xi$ y $\xi - T_t^* \xi = \eta(t)$. Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}_{|0} T_t^* \xi = -\frac{d}{dt}_{|0} \eta(t) = A_\xi v - \nabla_v^\perp \eta.$$

Sea ahora $w \in T_p M$ cualquiera. Entonces, para $\xi \in \nu_p M$, resulta:

$$\langle (dG_p v)(w), \xi \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}_{|0} T_t w, \xi \right\rangle = \left\langle w, \frac{d}{dt}_{|0} T_t^* \xi \right\rangle = \langle w, A_\xi v \rangle = \langle \alpha(v, w), \xi \rangle .$$

Como $\xi \in \nu_p M$ es arbitrario, resulta $(dG_p v)(w) = \alpha(v, w)$. ■

1.2.2. Completitud

En esta sección, probaremos un teorema geométrico general del cual se desprenderá el siguiente resultado, probado en [14] (ver también [2] y [16] para el caso particular de subvariedades del espacio Euclídeo).

Teorema 4 *Sea M una subvariedad de una forma espacial y sea $\mathcal{C}_0$ el conjunto (abierto) de puntos de M donde el índice de nulidad es mínimo. Entonces, si M es completa, las subvariedades integrales maximales de $\mathcal{N}$ por puntos de $\mathcal{C}_0$ son completas.*

Lema 5 *Sean M una variedad Riemanniana, N una variedad diferenciable y $f : M \to N$ una función diferenciable de rango constante tal que $f(M)$ es una subvariedad embebida de N (esto puede siempre asumirse localmente). Asumamos que la distribución $\ker(df)$ es autoparalela y sea Σ una subvariedad integral maximal cualquiera de $\ker(df)$. Sean $\gamma(t)$ una geodésica en Σ, $v \in T_{f(\gamma(0))} f(M)$ y sea $J(t)$ el levantamiento horizontal de v a lo largo de γ, esto es, $J(t) \in \ker(df_{\gamma(t)})^\perp$ y $df_{\gamma(t)} J(t) = v$. Entonces $J(t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ.*

Demostración: Sea $c(s)$ una curva en $f(M)$ tal que $c'(0) = v$. Sea $\widetilde{c}_q(s)$ el levantamiento horizontal (local) de c por un punto q de Σ.

Como $\ker(df)$ es autoparalela, alrededor de cada punto de Σ $\widetilde{c}_q(s)$ define una variación por variedades totalmente geodésicas, que por lo tanto debe ser por isometrías (ver [26]). Luego $\widetilde{c}_{\gamma(t)}(s)$ es una variación por geodésicas, cuyo campo variacional asociado es $J(t)$. Por lo tanto, J es un campo de Jacobi a lo largo de γ. ■

Teorema 6 *Sea M una variedad Riemanniana completa, $f : M \to N$ una función diferenciable y U un subconjunto abierto de M donde el rango de f es máximo. Asumamos que $\ker(df)_{|U}$ es autoparalela. Entonces sus subvariedades integrales maximales son completas.*

Demostración: Sea Σ la variedad integral maximal totalmente geodésica de $\ker(df)$ por un punto $p \in U$ y sea $\sigma : [0, b) \to \Sigma$ una geodésica maximal en Σ. Sea $\overline{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ su prolongación en M.

Observemos que f tiene rango máximo en un entorno de cada punto de Σ. De la forma local de una aplicación de rango constante, no es difícil ver que dados $t_1,\ t_2 \in [0, b)$ existen entornos abiertos V_1 y V_2 de $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ respectivamente tales que $f(V_1)$ y $f(V_2)$ son subvariedades embebidas de N y $f(V_1) \cap f(V_2)$ contiene un entorno abierto de $f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_2))$ tanto en $f(V_1)$ como en $f(V_2)$. En particular, $T_{f(\gamma(t_1))}f(V_1) = T_{f(\gamma(t_2))}f(V_2) =: \mathbb{V}$.

Sea $v \in \mathbb{V}$ y apliquemos el lema anterior para definir un campo de Jacobi J a lo largo de γ que se proyecte (por df) en v. Observemos que J se extiende a un campo de Jacobi a lo largo de $\overline{\gamma}$ y, por la continuidad de df, $J(b)$ se proyecta en v. Como $v \in \mathbb{V}$ es arbitrario, concluimos que $df_{\gamma(b)}(T_{\gamma(b)}M)$ contiene a $\mathbb{V}$. Pero $df_{\gamma(0)}$ tiene rango máximo, con lo cual $rg(df_{\overline{\gamma}(b)}) = rg(df_{\overline{\gamma}(0)})$ y entonces $\overline{\gamma}(b) \in \Sigma$. ■

Observemos que el Teorema 4 se obtiene de forma inmediata del hecho que la nulidad es el núcleo de la aplicación de Gauss.

1.3. Estructura de espacio fibrado

A lo largo de esta sección supondremos que M es una subvariedad completa y con índice de nulidad constante del espacio Euclídeo o la esfera. Los resultados que obtendremos establecerán el marco de trabajo adecuado para la prueba del Teorema 33, resultado principal de esta Tesis. Nos limitaremos a trabajar con la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$, pero como se verá fácilmente, todo lo probado vale para una subvariedad de una esfera de radio arbitrario.

Consideraremos el espacio de hojas $M/\mathcal{N}$ y probaremos que puede dársele estructura de variedad diferenciable de modo que la proyección canónica $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ tenga estructura de espacio fibrado. Podremos entonces definir el concepto de grupos de holonomía y probar que cumplen propiedades similares a las de los grupos de holonomía asociados a conexiones en fibrados vectoriales o en fibrados principales.

1.3.1. Distribuciones regulares

Comenzaremos resumiendo en el siguiente teorema las propiedades que hemos probado en las secciones anteriores, en el caso que la subvariedad M es completa:

Teorema 7 *Si M es una subvariedad completa de una forma espacial Q con índice de nulidad μ constante, entonces la distribución de nulidad $p \mapsto \mathcal{N}_p$ es diferenciable, autoparalela y con subvariedades integrales completas y totalmente geodésicas en Q.*

Como ya hemos aclarado, nos restingiremos a una subvariedad n-dimensional M^n de codimensión k del espacio Euclídeo o la esfera. Si $\mu \equiv l \leq n$, entonces una subvariedad integral de $\mathcal{N}$ es un subespacio afín de dimensión l de $\mathbb{R}^{n+k}$ en el primer caso y una esfera (centrada en el origen) l-dimensional contenida en $\mathbb{S}^{n+k}$ en el segundo.

Denotemos por $M/\mathcal{N}$ al "espacio de hojas", es decir, la colección de todas las subvariedades integrales maximales de $\mathcal{N}$ y sea $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ la proyección canónica (i.e., $\mathbf{pr}(p)$ es la subvariedad integral maximal de $\mathcal{N}$ por p). Dotemos a $M/\mathcal{N}$ de la topología cociente, o sea, la topología más fuerte que hace que $\mathbf{pr}$ sea continua. Nos proponemos dar estructura de variedad diferenciable a $M/\mathcal{N}$. Para ello necesitaremos la noción de distribución regular (cf. [30]).

Recordemos que dada una distribución l-dimensional $\mathcal{D}$ en M, una carta local $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ se dice ***plana*** para $\mathcal{D}$ si $\varphi(U)$ es un producto de abiertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$ y cada rebanada

$$S_c = \{q \in U : x^{l+1}(q) = c^{l+1}, \cdots, x^n(q) = c^n\}$$

de (U, φ) es una subvariedad integral de $\mathcal{D}$.

Por el Teorema de Frobenius, si $\mathcal{D}$ es integrable, existe una carta plana para $\mathcal{D}$ alrededor de cada punto de M que interseca cada subvariedad integral maximal de $\mathcal{D}$ en una unión numerable disjunta de subconjutos abiertos de rebanadas de dicha carta.

Una carta (U, φ) de M se dice ***regular*** para $\mathcal{D}$ si es plana e interseca a cada hoja de $\mathcal{D}$ en a lo sumo una rebanada l-dimensional de (U, φ). Una hoja de $\mathcal{D}$ se dice regular, si cada uno de sus puntos admite una carta local regular para $\mathcal{D}$. Finalmente $\mathcal{D}$ se dice una ***distribución regular*** si todas sus hojas son regulares.

Lema 8 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución autoparalela en una variedad Riemanniana N y sea $N/\mathcal{D}$ la colección de subvariedades integrales de $\mathcal{D}$ con la topología cociente. Si las subvariedades integrales son completas, $N/\mathcal{D}$ es Hausdorff.*

Demostración: Sea $\pi : N \to N/\mathcal{D}$ la proyección canónica. Como $N/\mathcal{D}$ tiene la topología cociente, π es abierta (cf. [30]) y en consecuencia $N/\mathcal{D}$ es N_2. Entonces bastará probar que

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in N \times N : \pi(x) = \pi(y)\}$$

es cerrado. Sea $(x_n, y_n) \in \mathcal{R}$ una sucesión convergente a $(x, y) \in N \times N$. Como x_n e y_n están en la misma subvariedad integral (completa y totalmente geodésica) de $\mathcal{D}$, existe una geodésica $c_n(t) = exp_{x_n}(tX_n)$ contenida en $\pi^{-1}(\pi(x_n))$ tal que $c_n(0) = x_n$ y $c_n(1) = y_n$. Observemos que $d(x_n, y_n)$ es acotada. Luego $||X_n||$ es acotada y existe una subsucesión de (x_n, X_n) que converge a un punto (x, X) en TM. Como $X_n \in \mathcal{D}(x_n)$, resulta $X \in \mathcal{D}(x)$ y entonces $y = \lim exp_{x_n} X_n = \exp_x X \in \pi^{-1}(\pi(x))$. Luego $(x, y) \in \mathcal{R}$. ∎

Teorema 9 *La distribución de nulidad $\mathcal{N}$ sobre M es una distribución regular y $M/\mathcal{N}$ es un espacio de Hausdorff. En consecuencia, si $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ es una carta local en M regular con respecto a $\mathcal{N}$, existe una única carta $n - l$ dimensional $\overline{\varphi}$ en $M/\mathcal{N}$ con dominio $\mathbf{pr}(U)$ tal que $\overline{\varphi} \circ \mathbf{pr} = (x^{l+1}, \cdots, x^n)$. Dichas cartas, forman un atlas diferenciable en $M/\mathcal{N}$. Con esta estructura, $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ es una submersión.*

Demostración: Sea $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ una carta local plana para $\mathcal{N}$. Podemos suponer que U es un entorno totalmente convexo de algún $p \in M$. Sea Σ una subvariedad integral maximal (totalmente geodésica) cualquiera de $\mathcal{N}$ y sean q_1, q_2 en $\Sigma \cap U$. Si γ es una geodésica minimizante uniendo q_1 con q_2 y completamente contenida en U, siendo Σ totalmente geodésica en el el espacio ambiente $\mathbb{R}^{n+k}$ o $\mathbb{S}^{n+k}$, γ está completamente contenida en Σ. Luego $\Sigma \cap U$ es conexo y entonces debe ser una única rebanada. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es regular. El resto sigue del lema anterior y de [30, Thm.VIII,Ch.I]. ∎

Notación: En lo que sigue, notaremos

$$M_r := \mathbf{pr}^{-1}(r)$$

para cada $r \in M/\mathcal{N}$. Esto es, M_r es la subvariedad integral maximal de M por cualquier punto $p \in \mathbf{pr}^{-1}(r)$.

Observación 10 *Como consecuencia del teorema, si (U, φ) es una carta regular en M respecto a $\mathcal{N}$, con $\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$ y $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ es la carta local asociada en M/N, entonces $\sigma_\varphi : \overline{U} \to \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U})$ definida por*

$$\sigma_\varphi(r) = \varphi^{-1}(i_0(\overline{\varphi}(r))),$$

*donde $i_0 : \mathbb{R}^{n-l} \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión $i_0(x^{l+1}, \cdots, x^n) = (0, \cdots, 0, x^{l+1}, \cdots, x^n)$, define una sección local de $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ que denominamos **sección local definida por** (U, φ).*

1.3.2. Fibrados afines y esféricos y grupos de holonomía

Dadas tres variedades diferenciables E, N y F, decimos que $\pi : E \to N$ es un ***espacio fibrado con fibra estándard*** F, si

i) π es diferenciable y sobreyectiva;

ii) Existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de N tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe una aplicación diferenciable $\Psi : \pi^{-1}(U) \to F$ tal que la función

$$\overline{\Psi} := (\pi, \Psi) : \pi^{-1}(U) \to U \times F$$

es un difeomorfismo.

La función $\overline{\Psi}$ se denomina una ***trivialización local*** para el espacio fibrado.

La aplicación π es una submersión y para cada $p \in M$, la ***fibra*** $E_p := \pi^{-1}(\pi(p))$ es una subvariedad embebida de E difeomorfa a F. Más aún, si $(U, \overline{\Psi})$ es una trivialización local con $p \in U$ y $\overline{\Psi} = (\pi, \Psi)$, el difeomorfismo viene dado por $\Psi_{|E_p}$.

Sea $Diff(F)$ el grupo de difeomorfismos de F y sean (π, Θ), (π, Ψ) trivializaciones locales sobre abiertos U y V de N respectivamente. La función

$$f_{\Theta,\Psi} : U \cap V \to Diff(F), \quad p \mapsto f_{\Theta,\Psi}(p) = \Theta \circ \Psi^{-1}_{|E_p}$$

se denomina ***función de transición*** entre ambas trivializaciones. Si G es un subgrupo de Lie de $Diff(F)$, decimos que el espacio fibrado $\pi : E \to N$ tiene ***grupo de estructura*** G si las funciones de transición de dos trivializaciones locales cualesquiera están en G.

Denotemos por $\mathbb{A}^n$ el espacio $\mathbb{R}^n$ con la estrucura afín estándard. Un espacio fibrado $\pi : E \to N$ con fibra estándar $\mathbb{A}^n$ se denomina un ***fibrado afín*** si tiene grupo de estructura $Aff(n) := GL(n) \ltimes \mathbb{R}^n$, el grupo de transformaciones afines de $\mathbb{A}^n$ (o equivalentemente, si cada fibra tiene estructura de espacio afín tal que para cada trivialización local (π, Ψ), $\Psi_{|E_p} : E_p \to \mathbb{A}^n$ es un isomorfismo afín, análogo a [32, Prop. 1.14]).

Un espacio fibrado $\pi : E \to N$ se denomina ***fibrado esférico*** si tiene fibra estándard $\mathbb{S}^n$ y grupo de estructura $O(n+1)$.

Teorema 11 *Si M es una subvariedad completa con índice de nulidad constante del espacio euclídeo o de la esfera, entonces* $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ *es un fibrado afín en el primer caso y un fibrado esférico en el segundo.*

Demostración: Supongamos que M tiene índice de nulidad constante $\mu \equiv l$. Sea $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ una carta regular con respecto a $\mathcal{N}$ en M cualquiera y sean $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ la carta asociada en $M/\mathcal{N}$ y $\sigma : \overline{U} \to U$ la sección local definida por (U, φ) (cf. Teorema 9 y observación 10). Para cada $r \in M/\mathcal{N}$, denotemos $X_i(r) = (\partial/\partial x^i)_{\sigma(r)}$.

Analicemos primero el caso de $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Trivialmente las fibras de $\mathbf{pr}$ en M tienen estructura de espacio afín pues son subespacios afines de $\mathbb{R}^{n+k}$. Más aún, para cada $r \in \overline{U}$, $M_r = \sigma(r) + T_{\sigma(r)}M_r$, identificando $T_{\sigma(r)}M_r$ con el correspondiente subespacio de $\mathbb{R}^{n+k}$. Luego todo elemento x de M_r es de la forma

$$x = \sigma(r) + \sum_{i=1}^{l} v^i X_i(r),$$

donde nuevamente identificamos $X_i(r)$ con el correspondiente vector en $\mathbb{R}^{n+k}$.

Para cada $(r, (v^1, \cdots, v^l)) \in \overline{U} \times \mathbb{A}^l$, pongamos $\rho(r, (v^1, \cdots, v^l)) = \sigma(r) + \sum_{i=1}^{l} v^i X_i(r)$. Entonces no es dificil ver que $\rho : \overline{U} \times \mathbb{A}^l \to \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U})$ es un difeomorfismo tal que $\overline{\Psi} = \rho^{-1}$ define una trivialización local para $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$. La colección de todas las trivializaciones así definidas, dan a $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ estructura de fibrado afín.

Supongamos ahora que $M^n \subset \mathbb{S}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$. Entonces M_r es la l-esfera en el subespacio $(l+1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k+1}$

$$L_r := T_{\sigma(r)}M_r \oplus \mathbb{R}\sigma(r) \tag{1.8}$$

Sea $\{E_i\}$ el marco ortonormal local en TM que se obtiene aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a $\{X_i\}$. Definamos entonces $\rho : \overline{U} \times \mathbb{S}^l \to \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U})$ por

$$(r,(v^1,\cdots,v^{l+1})) \mapsto \sum_{i=1}^{l} v^i E_i(\sigma(r)) + v^{l+1}\sigma(r).$$

Entonces no es difícil ver que ρ es un difeomorfismo y $\overline{\Psi} := \rho^{-1}$ define una trivialización local para $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$. Es claro por como son contruidas estas trivializaciones, que las funciones de transición están en $O(l+1)$, y entonces dan a $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ estructura de fibrado esférico. ■

Dada una curva diferenciable (a trozos) $\widetilde{c} : I \to M$, decimos que $\widetilde{c}$ es ***horizontal con respecto a*** $\mathcal{N}$ si $\widetilde{c}\,'(t) \perp \mathcal{N}_{\widetilde{c}(t)}$, para cada $t \in I$.

Dada una curva $c : I \to M/\mathcal{N}$ decimos que $\overline{c} : I \to M/\mathcal{N}$ es un ***levantamiento horizontal*** de c (con respecto a $\mathcal{N}$), si $\overline{c}$ es horizontal y $\mathbf{pr}(\overline{c}\,(t)) = c(t)$, para cada $t \in I$. Si $\overline{c}(0) = p \in M_{c(0)}$, decimos que $\overline{c}$ es un levantamiento horizontal de c por p.

Sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva diferenciable, $b \in I$ cualquiera y $\overline{\Psi} : \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times F$ una trivialización local para $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ tal que $c(b) \in \overline{U}$, donde F es la fibra estándard. Sea $y_0 \in F$ y sea $\varphi : W \to V \subset \mathbb{R}^l$ una carta local alrededor de y_0 centrada en y_0. Pongamos

$$\Theta := \overline{\Psi} \circ (id, \varphi) : \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times V. \tag{1.9}$$

Para cada $(r, y) \in \overline{U} \times V$ sea

$$\mathcal{H}_{(r,y)} = d\Theta_{|\Theta^{-1}(r,y)}(\mathcal{N}^{\perp}_{\Theta^{-1}(r,y)}).$$

Observemos que $d\mathbf{pr}_{|\Theta^{-1}(r,y)}$ restringido a $\mathcal{N}^{\perp}_{\Theta^{-1}(r,y)}$ es un isomorfimo sobre $T_r(M/\mathcal{N})$. Denotemos por $L(r, y)$ a su inversa y pongamos

$$S(r, y) = d\Theta^2_{|\Theta^{-1}(r,y)} \circ L(r, y), \tag{1.10}$$

con $\Theta^2 = \pi_2 \circ \Theta$ la proyección sobre V. Entonces no es difícil ver que $S(r, y)$ es la única aplicación lineal de $T_r(M/\mathcal{N})$ en $\mathbb{R}^l$ que verifica que

$$\mathcal{H}_{(r,y)} = \{(v, S(r, y)v) : v \in T_r(M/\mathcal{N})\}.$$

Sea $p = \Theta^{-1}(r, 0)$. Entonces $\widetilde{c}(t)$ es una curva horizontal, que se proyecta en c y tal que $\widetilde{c}(b) = p$ si y sólo si $(c(t), \varepsilon(t)) = \Theta(\widetilde{c}(t))$ verifica

$$(E) \quad \begin{cases} \varepsilon'(t) = f(t, \varepsilon(t)) \\ \varepsilon(0) = 0 \end{cases}$$

donde $f(t, x) = S(c(t), x)c'(t)$.

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (cf. [6, Ch. 1, Sec. 7]), obtenemos que existe un entorno J_b de b, contenido en I y tal que $c(J_b) \subset \overline{U}$, tal que (E) tiene una única solución en J_b. Más aún, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada $(a, x) \in U := \{(a, x) : a \in J_b, |x - \varepsilon(a)| < \delta\}$ el problema $y' = f(t, y), \; y(a) = x$ tiene una única solución diferenciable $\varepsilon_{a,x}$ definida en J_b, de modo que la aplicación

$$(a, x, t) \mapsto \varepsilon_{a,x}(t)$$

definida en $U \times J_b$ es diferenciable (cf. [21, Ap. 1],[11, Sec. 10.4]). Volviendo a M, tenemos:

Lema 12 *Sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva diferenciable. Fijemos $b \in I$ y $p \in M_{c(b)}$. Entonces existe un intervalo J_b alrededor de b contenido en I y una curva horizontal $\widetilde{c}(t)$ definida en J_b tal que $\widetilde{c}(b) = p$ y $\mathbf{pr}(\widetilde{c}(t)) = c(t)$ para cada $t \in J_b$. Más aún, para cada $a \in J_b$ existe un entorno V_a de $\widetilde{c}(a)$ en $M_{c(a)}$ tal que para cada $q \in V_a$ existe una curva horizontal $\widetilde{c}_{a,q}$ definida en J_b, que se proyecta en c y tal que $\widetilde{c}_{a,q}(a) = q$. Además, la aplicación*

$$(a, q, t) \mapsto \widetilde{c}_{a,q}(t)$$

es diferenciable en $\widetilde{U} \times J_b$, donde $\widetilde{U} := \{(a, q) : a \in J_b, q \in V_a\}$.

Podemos entonces demostrar que toda curva en $M/\mathcal{N}$ admite un levantamiento horizontal a M.

Lema 13 *Sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva diferenciable y sea $p \in M_{c(0)}$ cualquiera. Entonces existe un único levantamiento horizontal de c por p.*

Demostración: Sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva diferenciable cualquiera, sea $p \in M_{c(0)}$ y $\bar{c} : [0, b) \to M$ una curva horizontal maximal tal que $\bar{c}(0) = p$ y $\mathbf{pr} \circ \bar{c} = c$. Supongamos que $b < 1$. Veremos que $\bar{c}$ puede extenderse, lo cual lleva a una contradición.

En el caso que $M \subset \mathbb{S}^{n+k}$, el resultado es inmediato pues las fibras de $\mathbf{pr}$ son compactas.

Supongamos entonces que $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Sea $p_0 \in M_{c(b)}$ cualquiera y $\widetilde{c}$ la única curva horizontal en M definida en el entorno J_b de b dado por el lema 12 tal que $\widetilde{c}(b) = p_0$ y $\mathbf{pr}(\widetilde{c}) = c$. Sea $a \in J_b$ y sea V_a el entorno de $\widetilde{c}(a)$ en $M_{c(a)}$ dado por el lema 12. Sean $q_0 = \widetilde{c}(a)$ y $q_1, \cdots, q_l$ en $M_{c(a)} \cap V_a$ tales que $\{q_i - q_0\}_{i=1}^{l}$ es linealmente independiente. Para cada $i = 1, \cdots, l$ sea $\widetilde{c}_{q_i}$ la curva horizontal $\widetilde{c}_{a,q_i}$ definida en el lema 12. Existen únicos $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tales que $\overline{c}(a) = q_0 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (q_i - q_0)$. Pongamos $\gamma = \widetilde{c} + \sum \lambda_i (\widetilde{c}_{q_i} - \widetilde{c})$. Es claro que γ está definida en J_b y se proyecta en c. No es difícil ver que γ es horizontal. Como $\gamma(a) = \overline{c}(a)$, γ y $\overline{c}$ deben coincidir en $[0, b) \cap J_b$, con lo cual $\overline{c}$ se extiende a $[0, b) \cup J_b$. ∎

Estamos en condiciones de definir una noción de transporte paralelo en M. Sea $r \in M/\mathcal{N}$ y sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva diferenciable en $M/\mathcal{N}$. Definimos el ***$\mathcal{N}$-transporte paralelo*** como

$$\begin{array}{rccl} \tau_c^{\mathcal{N}} : & M_{c(0)} & \to & M_{c(1)} \\ & p & \mapsto & \tau_c^{\mathcal{N}}(p) := \overline{c}_p(1) \end{array}$$

donde $\overline{c}_p$ es el levantamiento horizontal de c por p. Una definición análoga puede hacerse para curvas diferenciables a trozos.

Si $c_1, c_2 : I \to M/\mathcal{N}$ son curvas diferenciables (a trozos) en $M/\mathcal{N}$ y definimos $c_1^{-1}(t) = c_1(1-t)$, entonces es inmediato de la definición de transporte paralelo que valen

$$\tau_{c_1}^{\mathcal{N}} \circ \tau_{c_2}^{\mathcal{N}} = \tau_{c_1 \cdot c_2}^{\mathcal{N}} \tag{1.11}$$

$$\left(\tau_{c_1}^{\mathcal{N}}\right)^{-1} = \tau_{c_1^{-1}}^{\mathcal{N}} \tag{1.12}$$

Dado que cada levantamiento horizontal $\overline{c}(t)$ de $c(t)$ es perpendicular en cada punto a la familica $\{M_{c(t)}\}$ de subvariedades totalmente geogésicas de M, del Lemma 2.8 en [26] (ver también [13, Prop. 2.1]) obtenemos

Lema 14 *Para cada curva $c : I \to M/\mathcal{N}$, el transporte paralelo $\tau_c^{\mathcal{N}} : M_{c(0)} \to M_{c(1)}$ es una isometría.*

Introduciremos finalmente los grupos de holonomía. Para $r \in M/\mathcal{N}$, denotemos por $\Omega(r)$ (resp. $\Omega^0(r)$) el conjunto de lazos diferenciables a trozos (resp. lazos homotópicos al lazo constante r) en $M/\mathcal{N}$ basados en r. Denominamos ***grupo de holonomía*** (asociado a $\mathcal{N}$) basado en $r \in M/\mathcal{N}$ a

$$\Phi_r := \{\tau_c^{\mathcal{N}} : c \in \Omega(r)\} \subset \; Iso(M_r).$$

A partir de las propiedades (1.11) y (1.12) es inmediato comprobar que Φ_r es un grupo. Denominamos ***grupo de holonomía restringido*** (asociado a $\mathcal{N}$) basado en $r \in M/\mathcal{N}$ al subgrupo

$$\Phi_r^0 := \{\tau_c^{\mathcal{N}} : c \in \Omega^0(r)\}.$$

Exactamente de la misma manera que para los grupos de holonomía definidos por conexiones en fibrados principales (cf. [21, Cap. 2, Th. 4.2]) se demuestra

Lema 15 *Φ_r y Φ_r^0 son grupos de Lie y Φ_r^0 es la componente conexa de $Id_{M_r} \in \Phi_r$.*

Se denomina ***grupo de holonomía local*** (asociado a $\mathcal{N}$) basado en $r \in M/\mathcal{N}$ a

$$\Phi_r^{loc} = \cap \Phi^0(r, \overline{U})$$

variando $\overline{U}$ entre todos los entornos abiertos de r, donde $\Phi^0(r, \overline{U}) := \{\tau_c^{\mathcal{N}} \in \Phi_r^0 : c \subset \overline{U}\}$. Al igual que para los grupos de holonomía local asociados a conexiones en fibrados principales, existe un entorno abierto $\overline{U}$ de r tal que $\Phi_r^{loc} = \Phi^0(r, \overline{V})$, para cada entorno $\overline{V}$ de r contenido en $\overline{U}$ (ver [21, Ch II, Prop. 10.1]).

Veremos que estos grupos de holonomía cumplen una propiedad de tipo Ambrose-Singer (cf. [3]). Sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva diferenciable a trozos. Denotemos

$$(\tau_c^{\mathcal{N}})^*(\Phi_r^{loc}) := \left\{(\tau_c^{\mathcal{N}})^{-1} \circ \tau_\alpha^{\mathcal{N}} \circ \tau_c^{\mathcal{N}} : \tau_\alpha^{\mathcal{N}} \in \Phi_r^{loc}\right\}$$

entonces se tiene

Teorema 16 *Sea C un subconjunto denso de $M/\mathcal{N}$. Entonces el grupo de holonomía restringido Φ_r^0 está generado por los grupos $(\tau_c^{\mathcal{N}})^*(\Phi_{c(1)}^{loc})$ variando c entre todas las curvas diferenciales en $M/\mathcal{N}$ tal que $c(0) = p$ y $c(1) \in C$.*

Para la prueba de este teorema, necesitaremos considerar a $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ como el fibrado asociado a un fibrado principal $\pi : E \to M/\mathcal{N}$. Recordemos que $\pi : E \to N$ es un ***fibrado principal*** con grupo de estructura G si es un espacio fibrado con fibra estándard un grupo de Lie G que actúa a derecha en E y tal que si $\overline{\Psi} = (\pi, \Psi)$ es una trivialización local definida en $\pi^{-1}(\overline{U})$, se verifica

$$\Psi(ug) = \Psi(u) \cdot g$$

para cada $u \in \pi^{-1}(\overline{U})$, $g \in G$.

Supongamos primero que $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Sea $A(M_r)$ el conjunto de isomorfismos afines $h : \mathbb{R}^l \to M_r$. $Aff(l)$ actúa por composición a derecha sobre $A(M_r)$ en forma libre. Pongamos

$$A(M) = \bigcup_{r \in M/\mathcal{N}} A(M_r)$$

y definamos $\pi : A(M) \to M/\mathcal{N}$ la proyección canónica (i.e. $\pi(h) = r$ sii $h \in A(M_r)$). Sea $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ una carta local en $M/\mathcal{N}$ tal que $\overline{\Psi} = (\mathbf{pr}, \Psi) : \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times \mathbb{R}^l$ es una trivialización local de $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$. Si $h \in A(M_r)$, pongamos $\rho(h) = \Psi \circ h \in Aff(l)$. Sea $\eta : Aff(l) \to \mathbb{R}^{l^2} \times \mathbb{R}^l$ la carta global canónica definida sobre $Aff(l)$. Entonces $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(\overline{U}) \to \mathbb{R}^{n+l^2}$ tal que

$$\widetilde{\varphi}(h) = (\overline{\varphi}(\pi(h)), \eta(\rho(h)))$$

define una carta local para $A(M)$.

Con esta estructura diferenciable, no es difícil ver que $A(M)$ es un fibrado principal con grupo de estructura $Aff(l)$, cuyas trivializaciones locales son de la forma

$$\overline{\rho} : \pi^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times Aff(l), \quad h \mapsto \overline{\rho}(h) = (\pi(h), \rho(h)).$$

Si $M \subset \mathbb{S}^{n+k}$, pongamos $A(M_r)$ el conjunto de isometrías $h : \mathbb{S}^l \to M_r$. En este caso, si $(\mathbf{pr}, \Psi)$ es una trivialización local para $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$, entonces $\rho(h) := \Psi \circ h \in O(l+1)$ para cada $h \in A(M_r)$. No es difícil ver que poniendo $A(M) = \bigcup_{r \in M/\mathcal{N}} A(M_r)$, $\pi : A(M) \to M/\mathcal{N}$ es un fibrado principal con grupo de estructura $O(l+1)$, cuyas trivializaciones locales son de la forma $\overline{\rho} := (\pi, \rho)$.

Para $h \in A(M)$, pongamos $\overline{\mathcal{V}}_h := \ker(d\pi_h)$. $\overline{\mathcal{V}}_h$ se denomina ***subespacio vertical*** y $h \mapsto \overline{\mathcal{V}}_h$ define una distribución integrable cuyas subvariedades integrales son las fibras de $\pi : A(M) \to M/\mathcal{N}$. Una ***conexión*** en $A(M)$ es una distribución $\overline{\mathcal{H}}$ complementaria a $\mathcal{V}$, es decir tal que $T_hA(M) = \overline{\mathcal{V}}_h \oplus \overline{\mathcal{H}}_h$, y tal que para cada a en el grupo de estructura,

$$(R_a)_*(\overline{\mathcal{H}}_h) = \overline{\mathcal{H}}_{ha},$$

donde R_a denota la multiplicaión por a según la acción a derecha del grupo de estructura en las fibras de $\pi : M \to N$.

Decimos que una curva diferenciable $\gamma(t)$ en $A(M)$ es ***horizontal*** si $\gamma(t)(\xi)$ es horizontal con respecto a $\mathcal{N}$ en M, para cada ξ en $\mathbb{R}^l$ o $\mathbb{S}$ según corresponda. Si $\gamma(t)$ es horizontal y $\pi(\gamma(t)) = c(t)$, decimos que $\gamma(t)$ es el ***levantamiento horizontal*** de c por $h = \gamma(0)$.

Dada una curva $c(t)$ en $M/\mathcal{N}$ y $h \in A(M_{c(0)})$, sea $\gamma(t) \in A(M_{c(t)})$ la transformación que mapea $\{0, e_i\}$ en $\{\tau^{\mathcal{N}}_{c_{[0,t]}}(h(0)), \tau^{\mathcal{N}}_{c_{[0,t]}}(h(e_i))\}$ en el caso afín o que mapea $\{e_i\}$ en $\{\tau^{\mathcal{N}}_{c_{[0,t]}}(h(e_i))\}$ en el caso de la esfera. Entonces no es difícil ver que $\gamma(t)$ es la única curva horizontal en $A(M)$ que se proyecta por π en $c(t)$. Esto es, dada $c : I \to M/\mathcal{N}$ y $h \in A(M_{c(0)})$, existe un único levantamieno horizontal de c a $A(M)$ tal que $\gamma(0) = h$.

Lema 17 *Sea $r_0 \in M/\mathcal{N}$ fijo.*

1. *Existe un entorno $\overline{U}$ de r_0 y una función diferenciable $y : T\overline{U} \to M/\mathcal{N}$ tal que para cada $r \in \overline{U}$, $y(0_r) = r$ y $\frac{d}{dt}_{|0} y(tv) = v$ para cada $v \in T_r M/\mathcal{N}$.*

2. *La aplicación*
$$\begin{array}{rccl} \Upsilon : & T_{r_0}M/\mathcal{N} \times A(M_{r_0}) \times I & \to & A(M) \\ & (v, h, t) & \mapsto & \Upsilon(v, h, t) := \gamma_{h,v}(t) \end{array}$$
es diferenciable, donde $\gamma_{h,v}(t)$ es el levantamiento horizontal de $y(tv)$ por h.

Demostración: Sea $\sigma : \overline{U} \to M$ una sección local de $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ definida en un entorno abierto $\overline{U}$ de r_0 y sea $\exp : TM \to M$ la aplicación exponencial de M. Entonces $y := \mathbf{pr} \circ \exp \circ d\sigma$ es la función buscada.

Consideremos ahora la aplicación $\overline{\Upsilon} : T_{r_0}M/\mathcal{N} \times M_{r_0} \times I \to M$ tal que $\overline{\Upsilon}(v, p, t) = \overline{c}_{v,p}(t)$, donde $\overline{c}_{v,p}(t)$ es el levantamiento horizontal por P de $y(tv)$. Entonces, si Θ es como en (1.9), $\overline{\Upsilon}(v, p, t) = \Theta^{-1}(y(tv), \varepsilon_v(t))$, donde $\varepsilon_v(t)$ es solución del problema

$$(E_v) \quad \varepsilon'(t) = f_v(t, \varepsilon(t)),$$

con $f_v(t, x) = S(y(tv), x)(y(tv))'$ y S definida como en (1.10). De la dependencia diferenciable de las soluciones respecto del parámetro v y de la condición inicial p se tiene que $\overline{\Upsilon}$ es diferenciable. Utilizando trivializaciones locales, de la relación entre las curvas horizontales en M y en $A(M)$ no es difícil ver que entonces Υ es diferenciable. ■

En lo que resta de esta sección denotaremos por F a la fibra estándard de $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ y por G al grupo de estructura de $\pi : A(M) \to M/\mathcal{N}$. Esto es, $F = \mathbb{R}^l$ y $G = Aff(l)$ en el caso $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y $F = \mathbb{S}^l$ y $G = O(l+1)$ en el caso $M \subset \mathbb{S}^{n+k}$.

Lema 18 *Existe una única conexión $\overline{\mathcal{H}}$ en $A(M)$ tal que $\gamma(t)$ es una curva horizontal para $\overline{\mathcal{H}}$ (i.e., $\gamma'(t) \in \overline{\mathcal{H}}_{\gamma(t)}$ para cada t) si y sólo si es horizontal en $A(M)$ (i.e. $\gamma(t)(\xi)$ es horizontal en M con respecto a $\mathcal{N}$, para cada $\xi \in F$).*

Demostración: Para cada $h \in A(M)$, definamos $\overline{\mathcal{H}}_h = \{\gamma'(0) : \gamma(0) = h \text{ y } \gamma \text{ es horizontal}\}$. Veremos primero que $\overline{\mathcal{H}}_h$ es un espacio vectorial de dimensión $n-l$. Sea $r = \pi(h)$ y sea Υ la aplicación definida en el lema 17. Consideremos la aplicación $k : T_rM/\mathcal{N} \to T_hA(M)$ dada por

$$k(v) = \frac{d}{dt}_{|0}\Upsilon(v, h, t).$$

Sea $X : T_rM/\mathcal{N} \times I \to A(M)$ la función diferenciable dada por $X(v,t) = \Upsilon(v,h,t)$. Como $t \mapsto \Upsilon(tv, h, 1)$ define una curva horizontal por h que se proyecta en $y(tv)$, resulta

$$\Upsilon(v, h, t) = \Upsilon(tv, h, 1).$$

Entonces $k(v) = dX_{(0,0)}(v, 0)$. Luego k es lineal y de la propiedad 1 del Lema 17 resulta $d\pi \circ k = id$. Luego k es inyectiva.

Ahora bien, si $\gamma(t)$ es una curva horizontal en $A(M)$ por h y $v = d\pi_h(\gamma'(0))$, entonces no es difícil ver que $\gamma'(0) = \gamma'_{h,v}(0)$. Luego $\overline{\mathcal{H}}_h = Im(k)$ es un espacio vectorial de dimensión $n-l$. Como $d\pi$ es un isomorfismo restringido a $\overline{\mathcal{H}}$ y $\ker(d\pi) = \overline{\mathcal{V}}$, resulta claro que $T_hA(M) = \overline{\mathcal{V}}_h \oplus \overline{\mathcal{H}}_h$.

Veamos ahora que $h \mapsto \overline{\mathcal{H}}_h$ define una distribución C^∞ en $A(M)$. Consideremos la aplicación $g : A(M) \to M$ dada por $h \mapsto g(h) := h(e_i)$, ($i \in \{1, \cdots, l\}$ fijo cualquiera o $e_0 = 0$ si $M \subset \mathbb{R}^l$). Si $\overline{\Psi} = (\mathbf{pr}, \Psi) : \mathbf{pr}^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times F$ es una trivialización local en M, recordemos que $\overline{\rho} = (\pi, \rho) : \pi^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times G$ con $\rho(h) = \Psi \circ h$ es una trivialización local en $A(M)$. Usando estas trivializaciones locales, resulta fácil ver que g es diferenciable y que dg_h es un isomorfismo de $\overline{\mathcal{H}}_h$ en $\mathcal{N}^\perp_{g(h)}$. Si ahora X_i son campos que generan $\mathcal{N}^\perp$ en un entorno U de $g(h)$, definamos $\overline{X}_i(h')$ como el único vector de $\overline{\mathcal{H}}_{h'}$ mapeado en $X_i(g(h'))$ por $dg_{h'}$, para cada $h' \in g^{-1}(U)$. Entonces no es difícil ver, utilizando las trivializaciones locales, que los campos $\overline{X}_i$ generan $\overline{\mathcal{H}}$ en $g^{-1}(U)$.

Finalmente, si $\gamma(t)$ es una curva horizontal en $A(M)$ y $a \in G$, resulta claro que $\gamma(t)a$ es horizontal, pues en efecto $\gamma(t)(a\xi)$ es horizontal en M cualquiera sea $\xi \in F$. Obtenemos entonces que $(R_a)_*(\overline{\mathcal{H}}_h) = \overline{\mathcal{H}}_{ha}$. Luego $\overline{\mathcal{H}}$ define una conexión en $A(M)$.

Es claro, por la definición de $\overline{\mathcal{H}}$, que si $\gamma(t)$ es una curva horizontal en $A(M)$, entonces $\gamma(t)$ es horizontal con respecto a $\overline{\mathcal{H}}$. Si ahora $\gamma(t)$ es horizontal con respecto a $\overline{\mathcal{H}}$, entonces $dg_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \in \mathcal{N}^{\perp}_{\gamma(t)(e_i)}$, para cada t. Esto implica que $\gamma(t)(e_i)$ es horizontal en M, para cada $i = 1, \cdots, l$ y $\gamma(t)(0)$ es horizontal en M si $M \subset \mathbb{R}^l$. Luego $\gamma(t)(\xi)$ es horizontal en M cualquiera sea $\xi \in F$. ■

Si $c : I \to M/\mathcal{N}$ es una curva diferenciable en $M/\mathcal{N}$, denotemos por $\widetilde{\tau}_c$ el transporte paralelo en $A(M)$ definido por $\overline{\mathcal{H}}$, esto es, si $h \in A(M)_{c(0)}$, $\widetilde{\tau}_c(h) = \gamma(1)$ donde $\gamma(t)$ es el levantamiento horizontal de c por h.

Sea $\widetilde{\Phi}^0_h$ el grupo de holonomía restringido asociado a la conexión $\overline{\mathcal{H}}$ basado en $h \in A(M)$,

$$\widetilde{\Phi}^0_h := \{a \in G : \widetilde{\tau}_c(h) = h \circ a, \quad p.a.\ c \in \Omega^0(\pi(h))\}$$

y sea $\widetilde{\Phi}^{loc}_h$ el grupo de holonomía local asociado a $\overline{\mathcal{H}}$ basado en h, esto es

$$\widetilde{\Phi}^{loc}_h := \bigcap \widetilde{\Phi}^0(h, \overline{U})$$

variando $\overline{U}$ entre todos los entornos abiertos de $r = \pi(h)$, donde

$$\widetilde{\Phi}^0(h, \overline{U}) := \{a \in \widetilde{\Phi}^0(h) : \widetilde{\tau}_c(h) = h \circ a, \quad p.a.\ c \in \Omega^0(r),\ c \subset \overline{U}\}.$$

Sea $AM(h)$ el subfibrado de holonomía de $A(M)$ por h, esto es

$$AM(h) := \{h' \in A(M) : h' = \widetilde{\tau}_c(h), \quad p.a.\ c : I \to M/\mathcal{N},\ c(0) = \pi(h)\}.$$

Observemos que si $h' \in AM(h)$, entonces $\widetilde{\Phi}^0_h = \widetilde{\Phi}^0_{h'} \supset \widetilde{\Phi}^{loc}_{h'}$.

Con una leve modificación en la prueba del Teorema 10.2 en [21], tenemos:

Lema 19 *Sea $h \in A(M)$ y sea $\mathcal{U}$ un subconjunto denso de $AM(h)$. Denotemos por $\mathfrak{g}(h)$ y $\mathfrak{g}^*(h)$ las álgebras de Lie de $\widetilde{\Phi}^0_h$ y $\widetilde{\Phi}^{loc}_h$ respectivamente. Entonces (como espacio vectorial) $\mathfrak{g}(h)$ está generada por $\mathfrak{g}^*(h')$, variando $h' \in \mathcal{U}$. En consecuencia, $\widetilde{\Phi}^0_h$ está generado por los grupos $\widetilde{\Phi}^{loc}_{h'}$, variando $h' \in \mathcal{U}$.*

Demostración: Sea $\overline{\Omega}$ la forma de curvatura de la conexión $\overline{\mathcal{H}}$ en $A(M)$ (cf. [21, p. 75]). Por el Teorema de Ambrose-Singer ([3]) $\mathfrak{g}(h) = span\{\overline{\Omega}_v(X,Y) : v \in AM(h),\ X,\ Y \in \overline{\mathcal{H}}_v\}$. Definamos

$$\mathfrak{g}' := span\{\overline{\Omega}_v(X,Y) : v \in \mathcal{U},\ X,\ Y \in \overline{\mathcal{H}}_v\}.$$

Es claro que $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$, y como $\mathcal{U}$ es denso en $AM(h)$, de la continuidad de $\overline{\Omega}$ en $v,\ X$ e Y surge la otra contención. A partir de aquí, la prueba es exáctamente igual al correspondiente teorema para una conexión en un fibrado principal (cf. [21, Ch. II, Th. 10.2]) ■

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 16:

Demostración Teorema 16: Sea $h \in A(M)$ y sea $r = \pi(h)$. Consideremos la aplicación $T_h(a) = h \circ a \circ h^{-1}$, $a \in G$. Si $a \in \widetilde{\Phi}^0_h$, sea $c \in \Omega^0(r)$ y sea $\gamma(t)$ el levantamiento horizontal de c por h tal que $\gamma(1) = h \circ a$. Entonces $h \circ a \circ h^{-1} = \gamma(1) \circ h^{-1} = \tau_c^{\mathcal{N}} \in \Phi^0_r$. Recíprocamente, $h^{-1} \circ \tau_c^{\mathcal{N}} \circ h \in \widetilde{\Phi}^0_h$, con lo cual T_h define un isomorfismo de $\widetilde{\Phi}^0_h$ en Φ^0_r. Es posible hallar un entorno $\overline{U}$ de r tal que $\widetilde{\Phi}^{loc}_h = \widetilde{\Phi}^0(h, \overline{U})$ y $\Phi^{loc}_r = \Phi^0(r, \overline{U})$ (cf. [21, Prop. 10.1]), de donde resulta que T_h define también un isomorfismo entre $\widetilde{\Phi}^{loc}_h$ y Φ^{loc}_r.

Sea C un subconjunto denso de $M/\mathcal{N}$ y pongamos $\mathcal{U} = \pi^{-1}(C) \cap AM(h)$. Entonces $\mathcal{U}$ es denso en $AM(h)$ y a partir del Lema 19 resulta que Φ^0_r está generado por $T_h(\Phi^{loc}_{h'})$, variando $h' \in \mathcal{U}$. Observemos que $h' = \widetilde{\tau}_c(h)$ para alguna curva $c : I \to M/\mathcal{N}$ tal que $c(0) = r$, $c(1) = \pi(h') \in C$. Bastará ver que $T_h(\widetilde{\Phi}^{loc}_{h'}) = (\tau_c^{\mathcal{N}})^*(\Phi^{loc}_{c(1)})$.

En efecto, si $f \in \widetilde{\Phi}^{loc}_{h'}$, entonces existe un elemento $\tau_\alpha^{\mathcal{N}} \in \Phi^{loc}_{\pi(h')}$ tal que $f = (h')^{-1} \circ \tau_\alpha^{\mathcal{N}} \circ h'$. Luego $T_h(f) = (\widetilde{\tau}_c(h) \circ h^{-1})^{-1} \circ \tau_\alpha^{\mathcal{N}} \circ (\widetilde{\tau}_c \circ h^{-1}) = (\tau_c^{\mathcal{N}})^{-1} \circ \tau_\alpha^{\mathcal{N}} \circ \tau_c^{\mathcal{N}} \in (\tau_c^{\mathcal{N}})^*(\Phi^{loc}_{c(1)})$. ■

Capítulo 2

El teorema local

2.1. Variedades focales, tubos esféricos y holonómicos

En esta sección introduciremos las principales herramientas de la teoría de subvariedades que necesitaremos en el resto del trabajo: focalización y la construcción de tubos holonómicos. No presentaremos las pruebas de la mayoría de las propiedades. Para las mismas y otros detalles referimos a [4], [31] y [19].

Sea M una subvariedad (pseudo-)riemanniana de una variedad (pseudo-)riemanniana completa $\overline{M}$. Se denomina ***exponencial normal*** de M a la aplicación $\exp^{\perp} : \nu M \to \overline{M}$ tal que $\exp^{\perp}(p, \xi_p) = \gamma_{\xi_p}(1)$, donde γ_{ξ_p} es la única geodésica por p en $\overline{M}$ con velocidad inicial ξ_p. De manera análoga al caso de la aplicación exponencial $\exp : TM \to M$, puede verse que la exponencial normal es diferenciable. Sea $Z : M \to \nu M$ la sección cero, esto es, $Z(p) = 0_p \in \nu_p M$. Un entorno abierto $\mathcal{U}$ de M en $\overline{M}$ se denomina entorno normal si es la imagen difeomorfa vía $\exp^{\perp}$ de un entorno de Z en νM. Es posible probar que si M es embebida entonces M admite un entorno normal en $\overline{M}$ (cf. [29, Prop. 7.26]). Si M no es embebida, entonces este resultado vale sólo localmente.

Si el espacio ambiente $\overline{M}$ es $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{L}^n$, la exponencial normal viene dada por

$$\exp^{\perp}(p, \xi_p) = \exp_p^{\perp} \xi_p = p + \xi_p.$$

La conexión normal en M induce una partición en el fibrado tangente del fibrado normal de M en las distribuciones vertical y horizontal correspondientes. Esto es $T_{(p,\xi_p)}\nu M = \widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{(p,\xi_p)}$, donde $\widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)}$ es el espacio tangente a las fibras del fibrado $pr : \nu M \to M$, o sea

$$\widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)} = T_{(p,\xi_p)}\nu_p M$$

y $\widetilde{\mathcal{H}}_{(p,\xi_p)}$ es el espacio horizontal dado por la conexión normal en M, o sea,

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{(p,\xi_p)} = \{\frac{d}{dt}|_0 \xi(t) : \xi(0) = (p, \xi_p)\},$$

donde $\xi(t)$ es el transporte paralelo de ξ_p a lo largo de curvas en M por p y la derivada representa la derivación como curva en νM (cf. [32]). Por otra parte, como $pr^{-1}(p) = \nu_p M$ es un espacio vectorial, el espacio vertical $\widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)}$ se identifica con $\nu_p M$ via el isomorfismo $\mathcal{J}_{(p,\xi_p)} : \nu_p M \to \widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)}$ tal que $\mathcal{J}_{(p,\xi_p)}(\eta_p) = \frac{d}{dt}|_0(p, \xi_p + t\eta_p)$. Mediante un sencillo cálculo resulta que

$$d\exp^{\perp}_{(p,\xi_p)} |_{\widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)}} = \mathcal{J}^{-1}_{(p,\xi_p)} \tag{2.1}$$

$$d\exp^{\perp}_{(p,\xi_p)} |_{\widetilde{\mathcal{H}}_{(p,\xi_p)}} = (Id - A_{\xi_p}) \circ d\,pr_{(p,\xi_p)} \tag{2.2}$$

Observemos que la diferencial de la exponencial normal mapea vectores verticales en vectores normales a M y vectores horizontales en vectores tangentes a M.

Sea entonces M una subvariedad Riemanniana del espacio Euclídeo. Un punto $p + \xi_p \in \mathbb{R}^n$ se dice ***focal*** para M si es un valor crítico de $\exp^{\perp}$. De (2.1) y (2.2) resulta que $d\exp^{\perp}_{(p,\xi_p)}$ tiene el mismo rango que $(Id - A_{\xi_p})$, con lo cual $p + \xi_p$ es un punto focal si $\ker(Id - A_{\xi_p}) \neq 0$.

Si existe un campo normal paralelo ξ a M (i.e, $\nabla^{\perp}\xi \equiv 0$) tal que 1 es un autovalor de A_ξ de multiplicidad constante, entonces $\dim(\ker(Id - A_{\xi_p}))$ no depende de p y

$$M_\xi = \{x + \xi(x) : x \in M\}$$

es una subvariedad del espacio ambiente denominada ***variedad focal*** de M si $\ker(Id - A_{\xi_p}) \neq 0$ y una ***subvariedad paralela*** a M si $\ker(Id - A_\xi) = \{0\}$. La proyección

$$\pi : M \to M_\xi \;/\; \pi(x) = x + \xi(x)$$

que denominaremos ***mapa focal*** es una submersión si M_ξ es focal y un difeomorfismo si M_ξ es paralela (cf. [4, sec. 4.4]).

Denotemos por $\mathcal{V}_p$ y $\mathcal{H}_p$ a los espacios vertical y horizontal de π en p respectivamente, es decir, $\mathcal{V}_p = T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))$ y $\mathcal{H}_p$ es su complemento ortogonal en T_pM. Entonces es inmediato verificar que:

- $\mathcal{V}_p = \ker(Id - A_\xi) = \ker(d\pi_p)$;
- $\mathcal{H}_p = T_{\pi(p)}M_\xi$ (como subespacios de $\mathbb{R}^n$);
- $\nu_{\pi(p)}M_\xi = \mathcal{V}_p \oplus \nu_p M$ (como subespacios de $\mathbb{R}^n$).

La distribución vertical $\mathcal{V}$ es integrable, sus subvariedades integrales son las fibras de la submersión π. Más aún, a partir de la ecuación de Codazzi (1.5) es muy simple verificar que $\mathcal{V}$ es autoparalela (cf. [4, lema 4.4.5]) y en consecuencia las fibras son subvariedades totalmente geodésicas de M.

Por otra parte, como ξ es paralelo respecto de la conexión normal de M, $R^\perp(X,Y)\xi = 0$. Luego, por la ecuación de Ricci (1.6), A_ξ conmuta con todos los operadores de forma y entonces $\mathcal{V}$ (y en consecuencia $\mathcal{H}$) es invariante por todos los operadores de forma de M.

Si M_ξ una variedad focal de M, existe una relación muy importante entre los transportes paralelos en M y M_ξ. Fijemos $p \in M$ y sean $\eta \in \nu_p M \subset \nu_{\pi(p)} M_\xi$ y $\widetilde{c}$ una curva horizontal por p, esto es, $\widetilde{c}(0) = p$ y $\widetilde{c}'(t) \in \mathcal{H}_{\widetilde{c}(t)}$ para cada t. Si $c = \pi(\widetilde{c})$, entonces el transporte paralelo de η a lo largo de $\widetilde{c}$ y c respecto de las conexiones normales de M y M_ξ respectivamente, coinciden.

En efecto, sea $\widetilde{\eta}(t)$ el transporte paralelo de η a lo largo de $\widetilde{c}(t)$. Entonces $\widetilde{\eta}(t) \in \nu_{\widetilde{c}(t)} M \subset \nu_{c(t)} M_\xi$. Denotemos por A el operador de forma de M y por $\widehat{A}$ el de M_ξ. Entonces, como $\widetilde{c}\,'(t) \in \mathcal{H}_{\widetilde{c}(t)}$ y $\mathcal{H}$ es invariante por A, resulta $\widetilde{\eta}\,'(t) = -A_{\widetilde{\eta}(t)} \widetilde{c}\,'(t) \in \mathcal{H}_{\widetilde{c}(t)} = T_{c(t)} M_\xi$. Por otra parte,

$$\nabla^\perp_{c'(t)} \widetilde{\eta}(t) = \widetilde{\nabla}_{c'(t)} \widetilde{\eta}(t) + \widehat{A}_{\widetilde{\eta}(t)} c'(t) = \widetilde{\eta}'(t) + \widehat{A}_{\widetilde{\eta}(t)} c'(t) \in T_{c(t)} M_\xi$$

Luego $\widetilde{\eta}(t)$ es paralelo a lo largo de c. Si ahora $\eta(t)$ es el transporte paralelo de η a lo largo de $c(t)$, es fácil ver que $\eta(t)$ es normal a M y (de manera análoga a lo anterior) que $\eta(t)$ es paralelo a lo largo de $\widetilde{c}$.

A partir de esta propiedad, es fácil establecer cómo se relacionan los operadores de forma de una variedad y sus variedades focales, mediante las denominadas ***fórmulas de tubo*** (cf. [4, lema 4.4.7]): para cada $\eta \in \nu_p M \subset \nu_{\pi(p)} M_\xi$ se verifican

$$\widehat{A}_\eta = A_\eta \left[(Id - A_\xi)_{|\mathcal{H}} \right]^{-1}; \quad A_\eta = \widehat{A}_\eta (Id + \widehat{A}_\xi)^{-1}. \tag{2.3}$$

Sea ahora $r > 0$ un número real y consideremos el subconjunto

$$\nu_r M = \{(p, \xi_p) \in \nu M : \|\xi_p\| = r\}.$$

del fibrado normal νM. Entonces $\nu_r M$ es un subfibrado de νM con fibra estándar $S^{k-1}(r)$ (donde $k = codim(M)$) denominado ***subfibrado esférico*** de νM (cf. [32, 9.25]). Supongamos que existen un entorno V de la sección cero en νM y un entorno $\mathcal{U}$ de M de modo que $\exp^\perp : V \to \mathcal{U}$ es un difeomorfismo y es posible tomar r lo suficientemente pequeño de modo que $\nu_r M \subset V$ (en particular 1 no es autovalor de A_ξ cada vez que $\|\xi\| = r$), entonces

$$S_r(M) = \exp^\perp(\nu_r M)$$

es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{L}^n$) denominada ***tubo esférico*** de M (esta construcción puede hacerse siempre al menos localmente). Observemos que $dimS_r(M) = dim(M) + dim(\nu_p M) - 1 = n-1$, o sea que $S_r(M)$ es una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$, y en consecuencia tiene fibrado normal plano.

Cada elemento de $S_r(M)$ es de la forma $x = p + \xi_p$ con $p \in M$ y $\xi_p \in (\nu_r M)_p$. Podemos definir entonces la proyección

$$\pi : S_r(M) \to M \ / \ \pi(x = p + \xi_p) = p. \tag{2.4}$$

Observemos que $\pi \circ \exp^\perp = pr$ con lo cual π es una submersión. Denotemos por $\mathcal{V}^\pi$ a la distribución vertical de π y por $\mathcal{H}^\pi$ a su complemento ortogonal en $TS_r(M)$. Entonces es claro que

$$\mathcal{V}^\pi_{p+\xi_p} = d\exp^\perp_{(p,\xi_p)}(\widetilde{\mathcal{V}}_{(p,\xi_p)} \cap T_{(p,\xi_p)}(\nu_r M)_p)$$

y en particular,

$$\pi^{-1}(p) = p + (\nu_r M)_p.$$

A partir de (2.2) obtenemos que $d\exp^\perp(\mathcal{H})$ es tangente a M y en consecuencia normal a $\mathcal{V}^\pi$. Como $TS_r(M) = d\exp^\perp(\mathcal{V}) \oplus d\exp^\perp(\mathcal{H})$, deberá ser $\mathcal{H}^\pi = d\exp^\perp(\mathcal{H})$ y en particular

$$\mathcal{H}^\pi_x = T_{\pi(x)}M$$

para cada $x \in S_r(M)$.

Consideremos ahora el campo normal Ψ a M definido por

$$\Psi(x) = \pi(x) - x. \tag{2.5}$$

Un simple cálculo muestra que Ψ es paralelo en las direcciones verticales y horizontales en $S_r(M)$ y en consecuencia es paralelo respecto a la conexión normal en $S_r(M)$. Más aún, si $\widehat{A}$ es el operador de forma de $S_r(M)$, entoces $\ker(Id - \widehat{A}_\Psi) = ker(d\pi)$ y en consecuencia $M = (S_r(M))_\Psi$ es una variedad focal a $S_r(M)$ en la dirección de Ψ y el mapa focal coincide con π.

Fijemos ahora $p \in M$ y consideremos un vector normal $\eta_p \in \nu_p M$ con $\|\eta_p\| = r$. Dado cualquier otro vector ξ_q normal a M en $q \in M$, denotaremos $\xi_q \sim \eta_q$ para indicar que ξ_q puede obtenerse trasladando paralelamente η_p a lo largo de una curva en M que una p con q. El subconjunto

$$\mathcal{H}ol(\eta_p) := \{\xi_q \in \nu M : \xi_q \sim \eta_p\}$$

del fibrado normal νM de M, constituye un subfibrado principal (no vectorial) de νM, denominado ***subfibrado de holonomía*** por η_p (cf. [21] o [32]). Más aún, $\mathcal{H}ol(\eta_p) \subset \nu_r M$. Denominamos ***tubo holonómico*** de M por η_p a

$$M_{\eta_p} = \exp^{\perp}(\mathcal{H}ol(\eta_p))$$

o sea que los elementos de M_{η_p} son de la forma $c(1) + \tau_c^{\perp}(\eta_p)$ con $c : [0,1] \to M$ una curva diferenciable por p. El tubo holonómico M_{η_p} es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^n$ contenida en el tubo esférico $S_r(M)$ y tenemos entonces definida la submersión

$$\pi : M_{\eta_p} \to M \ / \ c(1) + \tau_c^{\perp}(\eta_p) \xrightarrow{\pi} c(1).$$

Es fácil verificar que las fibras de π son órbitas de la acción del grupo de holonomía normal de M sobre los espacios normales afines de M (cf [4], [19]). Más precisamente,

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = \pi(x) + \Phi^{\perp}_{\pi(x)} \cdot (x - \pi(x)).$$

El campo normal $\Psi(x) = \pi(x) - x$ restringido a M_{η_p} es un campo normal paralelo al tubo holonómico y M es una variedad focal a M_{η_p} en la dirección de Ψ con proyección π.

Como ya hemos mencionado, los tubos esféricos son hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{L}^n$ y por lo tanto tienen fibrado normal plano. Los tubos holonómicos son subvariedades de los tubos esféricos pero no hay razón para que compartan esta propiedad. Denominamos ***distancia focal*** de M al supremo de los reales positivos ε tales que 1 no es un autovalor de A_ξ si $\|\xi\| < \varepsilon$. Observemos que la distancia focal de M puede ser 0, pero al menos localmente (es decir, en un entorno de cada punto) es estrictamente positiva. Entoces tenemos (cf. [4, Prop. 4.4.12], [19, Th. B])

Lema 20 *Si η_p está en una órbita de dimensión máxima en el espacio normal $\nu_p M$ para la acción del grupo de holonomía normal restringido $(\Phi_p^{\perp})^0$ y $\|\eta_p\|$ es menor que la distancia focal de M, entonces el tubo holonómico M_{η_p} tiene fibrado normal plano.*

Es importante observar que este resultado es consecuencia del denominado *Teorema de Holonomía Normal*, [24], que establece que el grupo de holonomía normal restringido actúa polarmente en el espacio normal.

2.2. Foliación por tubos holonómicos

Esta sección está mayormente inspirada en [7]. En este trabajo, los autores introducen la foliación de un tubo holonómico N de una subvariedad M del espacio Euclídeo por tubos holonómicos, y establecen relaciones entre la geometría de N y la de M. Dedicaremos esta sección a la prueba de propiedades similares que obtendremos de trabajar con un tubo esférico foliado por tubos holonómicos. De esta manera, mucho del trabajo presentado en [7] se simplifica y será suficiente para nuestras necesidades.

Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ y asumamos que existe un tubo esférico bien definido

$$N = S_\varepsilon(M) = \{q + \xi_q : q \in M, \xi_q \in \nu_q M, \|\xi_q\| = \varepsilon\}$$

alrededor de M (como ya hemos remarcado, esto siempre ocurre localmente). Sean $\pi : N \to M$ y Ψ la proyección y el campo normal paralelo a N definidos en la sección anterior, respectivamente.

Asumamos que N tiene índice de nulidad constante. Denotemos por $\hat{A}$ el operador de forma de N. Entonces $E_0 = \ker(\hat{A}_\Psi)$ es la distribución de nulidad de N. Para cada $x \in N$, definamos

$$S(x) := \pi^{-1}(\pi(x)).$$

Sea $E_1 = \ker(Id - \hat{A}_\Psi) = \ker(d\pi)$. Entonces $E_1(x) = T_x S(x)$ para cada $x \in N$. Consideraremos M y N como subvariedades del espacio de Lorentz de dimensión $n+2$, $\mathbb{L}^{n+2}$, identificando $\mathbb{R}^n$ con una horosfera n-dimensional del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ (cf. [1]). Denotemos por η el campo normal a $\mathbb{H}^{n+1}$ dado por $\eta(x) = -x$ y pongamos

$$\widetilde{\Psi} := \delta\Psi + \eta,$$

para cualquier δ de modo que $\widetilde{\Psi}$ sea temporal (este requerimiento es necesario para trabajar con holonomía normal en el espacio de Lorentz, cf. [28]). Un simple cálculo muestra que

$$\ker(Id - \hat{A}_{\widetilde{\Psi}}) = E_0.$$

Entonces podemos foliar N (localmente, ver [4]) por los tubos holonómicos

$$H(x) = (N_{\widetilde{\Psi}})_{-\widetilde{\Psi}(x)} \subset N. \tag{2.6}$$

Como trabajaremos localmente, podemos asumir que estos tubos holonómicos tienen todos la misma dimensión.

Consideremos la distribución $\widetilde{\nu}$ en N que a cada $x \in N$ le asocia el espacio normal del tubo holonómico $H(x)$, como subvaridad de N. Esta distribución verifica las siguientes propiedades,

Lema 21 (Prop. 2, [7]) . *Con las notaciones anteriores,*

1. *La distribución $\widetilde{\nu}$ en M es autoparalela (por consiguiente con subvariedades integrales totalmente geodésicas), invariante bajo el operador de forma de N y contenida en la nulidad de N. Más aún, si $\widetilde{\Sigma}(x)$ es la subvariedad integral de $\widetilde{\nu}$ por $x \in N$, entonces*

$$\widetilde{\Sigma}(x) = (x + \nu_x H(x)) \cap N.$$

2. *La restricción de $\widetilde{\nu}$ a cualquier $H(x)$ es un subfibrado paralelo y plano de $\nu_0 H(x)$, el mayor subfibrado paralelo y plano de $\nu H(x)$. Más aún, si $y \in H(x)$, $\widetilde{\Sigma}(y)$ se mueve paralelamente respecto de la conexión normal de $H(x)$.*

3. *Si $y \in \widetilde{\Sigma}(x)$, entonces existe un campo normal paralelo ς a $H(x)$ tal que $\varsigma(x) = y - x$ y $H(y) = H(x)_\varsigma$.*

Dedicaremos el resto de esta sección a la prueba de la siguiente propiedad (cf. [7, Sec. 2.5]),

Teorema 22 *La distribución $\widetilde{\nu}$ se proyecta a una distribución C^∞, integrable, $\nu^* = \pi_*(\widetilde{\nu})$ en M, que resulta autoparalela y contenida en la distribución de nulidad $\mathcal{N}$ de M. Dado $p \in M$, la subvariedad integral maximal $\Sigma^*(p)$ de ν^* por p, es una subvariedad totalmente geodésica del espacio Euclídeo ambiente y para cualquier $x \in \pi^{-1}(p)$,*

$$\Sigma^*(p) = \widetilde{\Sigma}(x) + \Psi(x).$$

La distribución ortogonal complementaria $\mathcal{H}^*$ a ν^* en M es integrable e invariante por los operadores de forma de M. Una subvariedad integral por p coincide localmente con $\pi(H(x))$, cualquiera sea $x \in \pi^{-1}(p)$. Más aún, la restricción de ν^* a $\pi(H(x))$ es un subfibrado paralelo y plano del fibrado normal $\nu(\pi(H(x)))$ en el espacio ambiente.

Necesitaremos del siguiente

Lema 23 *Sea* $w \in S(x)$*, entonces* $\widetilde{\Sigma}(x) = \widetilde{\Sigma}(w) + (x - w)$*.*

Demostración: Denotemos por $\widetilde{\pi} : N \to N_{\widetilde{\Psi}}$ el mapa focal. Si $x, y \in N$, denotaremos $x \sim_{E_0} y$ si x e y pueden unirse mediante una curva (diferenciable a trozos) en N, normal a E_0 en todo punto. Veamos que, localmente,

$$H(x) = \{y \in N : x \sim_{E_0} y\}. \tag{2.7}$$

En efecto, sea y en un entorno de x tal que $H(x) \subset N$. Entonces $y = c(1) + \widetilde{\tau}_c^{\perp}(-\widetilde{\Psi}(x))$ con $c : [0, 1] \to N_{\widetilde{\Psi}}$ una curva tal que $c(0) = \widetilde{\pi}(x)$, donde $\widetilde{\tau}^{\perp}$ representa el transporte paralelo respecto de la conexión normal en $M_{\widetilde{\Psi}}$. Sea $\overline{c}$ el levantamiento horizontal de c por x, respecto de $\widetilde{\pi}$. Entonces $c(t) = \overline{c}(t) + \widetilde{\Psi}(\overline{c}(t))$. Como el transporte paralelo de $\widetilde{\Psi}(x)$ a lo largo de c respecto de la conexión normal de $N_{\widetilde{\Psi}}$ y a lo largo de $\overline{c}$ respecto de la conexión normal en N coinciden y $\widetilde{\Psi}$ es paralelo en N, resulta $y = c(1) - \widetilde{\Psi}(x) = \overline{c}(1)$. Recordando que el subespacio horizontal para $\widetilde{\pi}$ viene dado por $\ker(\widetilde{\pi})^{\perp} = E_0^{\perp}$, concluimos que $x \sim_{E_0} y$. La otra contención se demuestra similarmente.

Observemos que para cada $x \in N$, $TS(x) = E_1 \perp E_0$, con lo cual obtenemos

$$S(x) \subset H(x).$$

Veremos primero que Ψ puede ser considerado como un normal de curvatura paralelo de $H(x)$, para cada $x \in N$. Necesitaremos de la siguiente propiedad: si $C \subset D \subset \mathbb{R}^n$ son subvariedades con fibrado normal plano tal que C es invariante bajo el operador de forma de D, y η es un normal de curvatura paralelo de D con autodistribución asociada E tal que $E_{|C} \subset TC$, entonces $\overline{\eta} := \eta_{|C}$ es un normal de curvatura paralelo de C (cf. [7, Lemma 1]).

Observemos que Ψ es el normal de curvatura paralelo asociado al autovalor 1 del operador de forma $\hat{A}_{\Psi}$ de N. De la propiedad (2) del Lema 21 obtenemos que $H(x)$ tiene fibrado normal plano. En efecto,

$$\nu H(x) = \widetilde{\nu}_{|H(x)} \oplus \nu N_{|H(x)} = \widetilde{\nu}_{|H(x)} \oplus \mathbb{R}\Psi_{|H(x)}. \tag{2.8}$$

Por otra parte, $TN_{|H(x)} = \widetilde{\nu}_{|H(x)} \overset{\perp}{\oplus} TH(x)$ y $\widetilde{\nu}$ es $\hat{A}$-invariante. Luego $H(x)$ es $\hat{A}$ invariante. Finalmente observemos que la autodistribución asociada al autovalor 1 de $\hat{A}_{\Psi}$ es $E_1 = TS(x)$, y como $S(x) \subset H(x)$, obtenemos $(E_1)_{|H(x)} \subset TH(x)$. Podemos aplicar la propiedad a $C = H(x)$ y $D = N$ y obtenemos que $\overline{\Psi} := \Psi_{|H(x)}$ es un normal de curvatura paralelo de $H(x)$.

Fijemos $x \in N$ y sea $y \in \widetilde{\Sigma}(x)$. Sea ς el campo normal paralelo a $H(x)$ tal que $\varsigma(x) = y - x$ dado por el Lemma 21 (2). Veremos ahora que ς es constante a lo largo de cada fibra $S(z)$, para cada $z \in H(x)$.

Como Ψ y ς son ambos paralelos, y ς es tangente a las subvariedades totalmente geodésicas $\widetilde{\Sigma}$, obtenemos $\langle \Psi, \varsigma \rangle \equiv 0$. Por otra parte, dada una curva arbitraria $c(t) \subset S(z)$, resulta

$$\frac{d}{dt}\,\varsigma(c(t)) = A^{H(x)}_{\varsigma} c'(t) = \langle \varsigma, \Psi \rangle\, c'(t) = 0$$

donde $A^{H(x)}$ es el operador de forma de $H(x)$ como subvariedad del espacio ambiente. Luego ς es constante en el espacio Euclídeo ambiente a lo largo de c.

Sea entonces $w \in S(x)$. Dado $y \in \widetilde{\Sigma}(x)$, definamos el campo ς como recién hicimos. Sea c una curva en $S(x) \subset H(x)$ uniendo x con w. Entonces, del Lema 21 (3), $w + \tau^{H(x)}_c(y - x) \in \widetilde{\Sigma}(w)$, donde $\tau^{H(x)}$ representa el transporte paralelo respecto de la conexión normal en $H(x)$. Pero por lo que acabamos de probar, $\tau^{H(x)}_c(y - x) = \tau^{H(x)}_c \varsigma(x) = y - x$, de donde obtenemos $y + (w - x) \in \widetilde{\Sigma}(w)$, o sea $\widetilde{\Sigma}(x) + (w - x) \subset \widetilde{\Sigma}(w)$. La otra contención es análoga. ■

Observación 24 *Sea $y \in S(x)$ y ς el campo normal a $H(x)$ definido en la demostración anterior. Dado $z \in S(x)$, como $\widetilde{\Sigma}(z)$ está contenida en la distribución de nulidad de N, resulta que $\widetilde{\Sigma}(z)$ es totalmente geodésica en el espacio ambiente y el campo normal Ψ a N es constante a lo largo de $\widetilde{\Sigma}$. Entonces $z + \varsigma(z) \in \widetilde{\Sigma}(z)$ y $\Psi(z + \varsigma(z)) = \Psi(z)$.*

Demostración Lema 22: Como consecuencia del Lema 23 obtenemos que $\widetilde{\nu}$ es constante en el espacio ambiente a lo largo de cada fibra de la submersión π. Por otra parte, $d\pi = (Id - \hat{A}_{\Psi})$, donde $\hat{A}$ es el operador de forma de N. Como $\widetilde{\nu}$ está contenida en la nulidad de N, es inmediato que $\widetilde{\nu}$ se proyecta a una distribución ν^*, bien definida y C^{∞} sobre M. Como $\widetilde{\nu}$ es horizontal para π, si $X \in \nu^*_p$ y $\overline{X}$ es su levantamiento horizontal por $x \in N$ respecto de π, entonces $\overline{X} \in \widetilde{\nu}_x$, y $X_{\pi(x)} = d\pi_x(\overline{X}_x) = \overline{X}_x$, como vectores en $\mathbb{R}^n$. De aquí resulta fácilmente que ν^* es autoparalela. y que las subvariedades integrales de ν^* son $\pi(\widetilde{\Sigma}(x)) = \widetilde{\Sigma}(x) + \Psi(x)$.

Para cada $p \in M$ definamos $\mathcal{H}^*_p = (\nu^*_p)^\perp$, donde el complemento ortogonal es tomado en T_pM. Entonces $\mathcal{H}^*$ es una distribución C^∞ en M. Probaremos que $\mathcal{H}^*_p = d\pi_x(T_xH(x))$ cualquiera sea $x \in \pi^{-1}(x)$. Seguirá entonces que la subvariedad integral por p coincide localmente con $\pi(H(x))$ cualquiera sea $x \in \pi^{-1}(p)$.

Sea $\widetilde{c}$ una curva en $H(x)$ por x y sea X un campo vectorial en ν^* definido cerca de p. Sea $\overline{X}$ su levantamiento horizontal a N. Entonces, como $d\pi_x(\widetilde{c}'(0)) = (Id - \hat{A}_\Psi)\widetilde{c}'(0)$ y $\hat{A}_\Psi \overline{X}_x = 0$, obtenemos

$$\left\langle d\pi_x(\widetilde{c}'(0)), X_p \right\rangle = \left\langle (Id - \hat{A}_\Psi)\widetilde{c}'(0), \overline{X}_x \right\rangle = \left\langle \widetilde{c}'(0), \overline{X}_x \right\rangle - \left\langle \widetilde{c}'(0), \hat{A}_\Psi \overline{X}_x \right\rangle = 0.$$

Luego $d\pi_x(T_xH(x)) \subset \mathcal{H}^*_{\pi(x)}$. La otra inclusión es inmediata, dado que el levantamiento horizontal de un vector en $\mathcal{H}^*(p)$ a T_xN yace en $T_xH(x)$.

De (2.8) obtenemos además inmediatamente que la restricción de ν^* a $\pi(H(x))$ es un subfibrado paralelo y plano del espacio normal $\nu(\pi(H(x)))$ en el espacio ambiente. Esto, junto con el hecho de que las subvariedades integrales de ν^* son totalmente geodésicas en el espacio ambiente, prueba que ν^* está contenida en la nulidad $\mathcal{N}$ de M. ■

Observación 25 *Como consecuencia del lema anterior, obtenemos que cualquier campo normal paralelo a $H(x)$ (tangente a N) se proyecta a un campo normal paralelo a $\pi(H(x))$.*

2.3. El teorema local

En esta sección daremos una descripción local de cualquier subvariedad del espacio Euclídeo o la esfera que involucra la distribución de nulidad. Más precisamente, probaremos

Teorema 26 *Sea M una subvariedad del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ o la esfera $\mathbb{S}^n$ y sea $\mathcal{N}_p$ el subespacio de nulidad de M en p. Si U es un subconjunto abierto de M y $p, q \in U$, denotaremos por $p \sim_U q$ si p y q pueden unirse por una curva c contenida en U tal que $c'(t) \perp \mathcal{N}_{c(t)}$ para cada t. Para cada $p \in U$, sea $[p]_U$ la clase de equivalencia*

$$[p]_U := \{q \in U : p \sim_U q\}.$$

Entonces existe un subconjunto abierto y denso $\mathcal{C}$ de M tal que para cada $p \in \mathcal{C}$ se satisface uno y sólo uno de los siguientes enunciados:

1. *$[p]_U$ contiene un entorno de p, para cada entorno abierto U de p.*

2. *Existe un entorno abierto U de p y una subvariedad propia S de U tal que $p \in S$ y U es la unión de variedades paralelas a S a lo largo de un subfibrado paralelo y plano ν^* de $\nu(S)$ contenido en $\mathcal{N}_{|U}$. Más aún, las hojas de esta foliación paralela son, localmente, clases de equivalencia.*

Probaremos primero un lema técnico.

Sea $p \in M$ y sea U un entorno abierto de p tal que existe un tubo esférico $S(U)$ bien definido alrededor de U. Decimos que p es un ***punto genérico*** de M si p está en la imagen, vía la proyección radial π definida en (2.4), de un subconjunto abierto de $S(U)$, donde el índice de nulidad de $S(U)$ es constante y los tubos holonómicos $H(x)$ definidos en (2.6) tienen la misma dimensión. Tenemos entonces,

Lema 27 *El conjunto de puntos genéricos de M es abierto y denso en M.*

Demostración: Sea $\widetilde{\mathcal{C}}$ el subconjunto abierto y denso de M formado por los puntos donde el índice de nulidad es localmente constante (cf. Lema 1). Consideremos un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de $\widetilde{\mathcal{C}}$ tal que el índice de nulidad μ de M sea constante en cada U_α y tal que el tubo esférico

$$N^\alpha = S_{\varepsilon_\alpha}(U_\alpha) = \{q + \xi_q : q \in U_\alpha, \|\xi_q\| < \varepsilon_\alpha\}$$

esté bien definido para algún $\varepsilon_\alpha > 0$. Sea $\pi_\alpha : N^\alpha \to U_\alpha$ la proyección radial correspondiente y Ψ_α el campo normal paralelo a N^α definido en (2.5). Podemos considerar un subconjunto abierto y denso $\mathcal{A}_\alpha$ de N^α tal que el índice de nulidad de N^α sea constante en cada componente conexa de $\mathcal{A}_\alpha$. Achicando $\mathcal{A}_\alpha$, en virtud de que la unión de las órbitas de dimensión máxima para la acción polar de un grupo de isometrías en el espacio Euclídeo forman un subconjunto denso (cf. la sección 3.1), podemos asumir que los tubos holonómicos

$$H_\alpha(x) = (N^\alpha_{\widetilde{\Psi}_\alpha})_{-\widetilde{\Psi}_\alpha(x)}$$

tienen la misma dimensión en cada componente conexa de $\mathcal{A}_\alpha$. Observemos que $\pi(\mathcal{A}_\alpha)$ es abierto y denso en U_α y entonces $\mathcal{C} := \bigcup_\alpha \pi_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ es abierto y denso en M. ■

Demostración Teorema 26: Asumamos primero que M es una subvariedad del espacio Euclídeo. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto abierto y denso de M de puntos genéricos dado por el Lema 27.

Sea $p \in \mathcal{C}$ y supongamos que no vale la afirmación (1). Sean U un entorno abierto de p, N un tubo esférico alrededor de U y $\pi : N \to U$ la proyección radial. Sea V un abierto en N con índice de nulidad constante, tal que los tubos holonómicos

$$H(x) = (N_{\widetilde{\Psi}})_{-\widetilde{\Psi}(x)}$$

(cf. sección 2.2) tienen dimensión constante y tal que $p \in \pi(V)$.

Entonces, a partir del Lema 22, obtenemos que $\pi(V)$ está foliado por las subvariedades $\pi(H(x))$. A partir del Lema 21 (3) y de la observación 25, obtenemos que estas subvariedades son paralelas a lo largo de el subfibrado paralelo y plano ν^* de $\nu\pi(H(x))$. Basta tomar $x_0 \in \pi^{-1}(p) \cap V$ y $S = \pi(H(x_0))$.

Veremos ahora que si $q = \pi(x) \in \pi(V)$, entonces

$$\pi(H(x)) = [q]_U \ (localmente,\ alrededor\ de\ q).$$

Tomemos $y \in H(x)$ (cercano a x). Entonces, de (2.7), existe una curva $\widetilde{c}(t)$ en V uniendo x e y, perpendicular a $E_0 = \ker \hat{A}_\Psi$ en todo punto, donde $\hat{A}$ es el operador de forma de N. Pongamos $c(t) = \pi(\widetilde{c}(t)) = \widetilde{c}(t) + \Psi(\widetilde{c}(t))$. Veremos que entonces c es perpendicular a $(\pi)_*(E_0)$ en todo punto. En efecto, fijemos t_0 y sea $\widetilde{v} \in E_0(\widetilde{c}(t_0))$. Entonces $d\pi_{\widetilde{c}(t_0)}\widetilde{v} = \widetilde{v} - \hat{A}_\Psi\widetilde{v} = \widetilde{v}$. Luego

$$\left\langle c'(t_0), d\pi_{\widetilde{c}(t_0)}\widetilde{v}\right\rangle = \left\langle \widetilde{c}'(t_0) - \hat{A}_\Psi(\widetilde{c}'(t_0)), \widetilde{v}\right\rangle = \langle \widetilde{c}'(t_0), \widetilde{v}\rangle - \left\langle \widetilde{c}'(t_0), \hat{A}_\Psi\widetilde{v}\right\rangle = 0.$$

A partir de la fórmula del tubo relacionando los operadores de forma de M y N (cf. 2.3) obtenemos fácilmente que $\mathcal{N} \subset (\pi)_*(E_0)$. Luego $c(t)$ es una curva horizontal con respecto a $\mathcal{N}$ en U uniendo q y $\pi(y)$. Concluimos que $\pi(H(x)) \subset [q]_U$ (localmente, alrededor de q).

La otra inclusión se obtiene del hecho que la distribución $\mathcal{H}^*$ definida en el lema 22 es integrable y sus subvariedades integrales son los conjuntos $\pi(H(x))$. De hecho, si $q' \in [q]_U$, existe una curva horizontal (con respecto a $\mathcal{N}$), c(t) uniendo q y q' contenida en U. Pero por el lema 22, $\nu^* \subset \mathcal{N}$. Luego $c'(t) \perp \nu^*(c(t))$, esto es $c'(t) \in \mathcal{H}^*(c(t))$, para cada t. Luego q' está en la misma subvariedad integral de $\mathcal{H}^*$ que q, o sea $q' \in \pi(H(x))$.

Supongamos ahora que M es una subvariedad de la esfera. Consideremos el campo normal posición η en $\mathbb{S}^n$ definido por $\eta(p) = p$. Observemos que η es paralelo en la conexión normal de $\mathbb{S}^n$ como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$, y que $A_\eta^{\mathbb{S}^n} = -Id$. Podemos elegir un número real positivo $\delta < 1$ lo suficientemente pequeño de modo que

$$\overline{M} := \bigcup_{-\delta<\varepsilon<\delta} M_{\varepsilon\eta} \tag{2.9}$$

sea una subvariedad bien definida de $\mathbb{R}^{n+1}$, donde $M_{\varepsilon\eta}$ es la variedad paralela a M definida por el campo normal paralelo $\varepsilon\eta$. Observemos que $M_{\varepsilon\eta}$ está contenida en la esfera $\mathbb{S}^n_{(1+\varepsilon)}$, centrada en el origen de radio $1+\varepsilon$. Denotemos por $\pi_\varepsilon : M \to M_{\varepsilon\eta}$ el mapa focal usual (observar que $\pi_0 = Id_M$). Sea $\overline{\mathcal{N}}_q$ el subespacio de nulidad de $\overline{M}$ en $q \in \overline{M}$. Probaremos que

$$\overline{\mathcal{N}}_{\pi_\varepsilon(p)} = (d\pi_\varepsilon)_p(\mathcal{N}_p) \oplus \mathbb{R}\eta(p). \tag{2.10}$$

Pongamos $q = \pi_\varepsilon(p) \in M_{\varepsilon\eta}$. Observemos primero que

$$T_q\overline{M} = T_qM_{\varepsilon\eta} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}\eta_q.$$

Sea $\widetilde{A}$ el operador de forma de $\overline{M}$ (como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$). Veamos que $T_qM_{\varepsilon\eta}$, y en consecuencia $\mathbb{R}\eta_q$, son $\widetilde{A}$-invariantes. En efecto, sea $c(t)$ una curva en $M_{\varepsilon\eta}$ con $c(0) = q$ y sea $\xi_q \in \nu_q\overline{M}$. Sea $\xi(t)$ el transporte paralelo de ξ_q a lo largo de c respecto de la conexión normal de $\overline{M}$. Entonces

$$\left\langle \widetilde{A}_{\xi_q} c\,'(0), \eta_p \right\rangle = -\left\langle \xi'(0), \eta_q \right\rangle = \left\langle \xi(0), \frac{d}{dt}_{|0} \eta(c(t)) \right\rangle - \frac{d}{dt}_{|0} \left\langle \xi(t), \eta(c(t)) \right\rangle = -\left\langle \xi_q, c'(0) \right\rangle = 0.$$

Concluimos entonces que cualquiera sea $\xi_q \in \nu_q\overline{M}$

$$\ker \widetilde{A}_{\xi_q} = \ker \widetilde{A}_{\xi_q|T_qM_{\varepsilon\eta}} \oplus \ker \widetilde{A}_{\xi_q|\mathbb{R}\eta_q}.$$

Sea $v \in \ker \widetilde{A}_{\xi_q|T_qM_{\varepsilon\eta}}$. Sea $\widetilde{c}$ una curva en M tal que $\widetilde{c}(0) = p$ y $c\,'(0) = v$, con $c(t) = \pi_\varepsilon(\widetilde{c}(t))$. Sea $\xi(t)$ el transporte paralelo a lo largo de c respecto de la conexión normal en $\overline{M}$. Observemos que $\xi(t)$ puede también considerarse como un campo normal a M a lo largo de $\widetilde{c}$, pues M y $M_{\varepsilon\eta}$ son variedades paralelas. Entonces

$$0 = -\widetilde{A}_{\xi_q}(v) = \xi\,'(0) = \nabla^{\mathbb{S}^n}_{\widetilde{c}\,'(0)}\xi + \alpha^{\mathbb{S}^n}(\widetilde{c}\,'(0), \xi(0)),$$

donde $\nabla^{\mathbb{S}^n}$ es la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{S}^n$ y $\alpha^{\mathbb{S}^n}$ es la segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^n$ como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pero

$$\alpha^{\mathbb{S}^n}(\widetilde{c}\,'(0),\xi) = -\left\langle \widetilde{c}\,'(0),\xi\right\rangle \eta = 0$$

con lo cual

$$0 = \nabla^{\mathbb{S}^n}_{\widetilde{c}\,'(0)}\xi = A_\xi \widetilde{c}'(0) + \nabla^{\perp}_{\widetilde{c}\,'(0)}\xi$$

(A y $\nabla^\perp$ son la segunda forma fundamental y la conexión normal de M como subvariedad de $\mathbb{S}^n$ respectivamente). Concluimos que ξ es paralelo en M a lo largo de $\widetilde{c}$ respecto de la conexión normal de M (como subvariedad de $\mathbb{S}^n$) y $\widetilde{c}'(0) \in \ker A_\xi$. Luego

$$v = (d\pi_\varepsilon)_p(\widetilde{c}\,'(0)) \in (d\pi_\varepsilon)_p(\ker A_{\xi(0)}).$$

De manera análoga probamos que si $\widetilde{c}\,'(0) \in \ker A^M_\xi$, entonces $d\pi_\varepsilon \widetilde{c}\,'(0) \in \ker \widetilde{A}_{\xi_q|T_qM_{\varepsilon\eta}}$. Luego

$$\bigcap_{\xi\in\nu_q N} \ker \widetilde{A}_{\xi_q|T_qM_{\varepsilon\eta}} = (d\pi_\varepsilon)_p \mathcal{N}_p.$$

Es fácil ver que $\widetilde{A}_{\xi_q}\eta = 0$, lo que concluye la prueba de (2.10).

Sea $\overline{U}$ un subconjunto abierto en $\overline{M}$ tal que $U := \overline{U} \cap M$ es abierto en M. Denotemos por $[q]^*_{\overline{U}}$ el conjunto de puntos de $\overline{M}$ que pueden ser unidos a q por una curva perpendicular a $\overline{\mathcal{N}}$ contenida en $\overline{U}$. A partir de (2.10) es claro que si $q \in M_{\varepsilon\eta}$ entonces $[q]^*_{\overline{U}} \subset M_{\varepsilon\eta}$ y, en particular, si $p \in M$ entonces $[p]^*_{\overline{U}} = [p]_U$. Entonces le teorema para M sigue de aplicar a $\overline{M}$ el resultado del caso Euclídeo. ∎

Capítulo 3

El teorema global

3.1. Acciones de un grupo por isometrías

Denotemos por Q una forma espacial $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$ y consideremos la acción de un subgrupo de Lie G de $Iso(Q)$ en Q. Sea $p \in Q$ y sea G_p el subgrupo de isotropía en p para la acción de G en Q. Una órbita $G \cdot p$ se dice ***principal*** si para cada $q \in Q$, G_p es conjugado en G a algún subgrupo de G_q. Si $G \cdot p$ es una órbita principal, p se dice un ***punto principal***. Cada órbita principal es de dimensión máxima y el conjunto $\mathcal{P}$ de puntos principales es abierto y denso de Q.

La acción de G_p en Q deja invariantes los espacios tangente y normal a la órbita $G \cdot p$ (o sea, si $g \in G_p$ y $v \in T_p(G \cdot p)$, entonces $dg_p(v) \in T_p(G \cdot p)$, y análogamente para $\nu_p(G \cdot p)$). Entonces están bien definidas las acciones de G_p en $T_p(G \cdot p)$ y $\nu_p(G \cdot p)$ dadas por

$$\chi_p : G_p \times T_p(G \cdot p) \to T_p(G \cdot p), \quad (g, X) \mapsto g \cdot X = dg_p X \tag{3.1}$$

$$\sigma_p : G_p \times \nu_p(G \cdot p) \to \nu_p(G \cdot p), \quad (g, \xi) \mapsto g \cdot \xi = dg_p \xi. \tag{3.2}$$

La acción (3.1) se denomina ***representación isotrópica*** de la acción en p, mientras que la acción (3.2) se denomina ***representación slice*** de la acción en p. La representación slice permite caracterizar las órbitas principales. En efecto, tenemos el siguiente resultado (cf. [4, Th. 3.1.3])

Lema 28 *Una órbita $G \cdot p$ es principal si y sólo si la representación slice σ_p es trivial.*

Un campo vectorial X en Q se dice G-***equivariante*** si $X_{gp} = g \cdot X_p$ para cada $p \in Q$, $g \in G$. Supongamos que $G \cdot p$ es una órbita principal y sea $\xi_p \in \nu_p(G \cdot p)$. Definamos

$$\hat{\xi}_{gp} = g \cdot \xi_p$$

Entonces $\hat{\xi}$ es un campo normal a $G \cdot p$, G-equivariante, bien definido. En efecto, si $g, g' \in G$ son tales que $gp = g'p$ entonces $g^{-1}g' \in G_p$ y, a partir del Lema 28, $g^{-1}g' \cdot \xi_p = \xi_p$.

Presentaremos en lo que sigue los conceptos de acción polar y subvariedades isoparamétricas. Ambos son muy importantes en el estudio de la geometría de subvariedades y resultarán fundamentales en la prueba de nuestro teorema global.

Decimos que la acción de un subgrupo de Lie G de $Iso(G)$ es ***polar*** si existe una subvariedad totalmente geodésica Σ, denominada una ***sección*** para la acción de G, que interseca a todas las órbitas y es perpendicular a ellas en los puntos de intersección. Si la acción de G en Q es polar, una órbita es principal si y sólo si es de dimensión máxima (cf. [4, Cor. 5.4.3])).

Podemos dar una definición equivalente de una acción polar para una forma espacial. En efecto, la acción de G en Q es polar si y sólo si la distribución en $\mathcal{P}$ dada por los espacios normales de las órbitas principales es integrable. En ese caso, una sección para la acción viene dada por cualquier subvariedad integral (cf. [18]).

El siguiente resultado nos será muy util en la próxima sección.

Lema 29 *Sea Q una forma espacial y sea $G \subset Iso(Q)$ un subgrupo de Lie conexo. Supongamos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está linealmente generada (como espacio vectorial) por las subálgebras de Lie $\mathfrak{g}_i < \mathfrak{g}$, $i = 1, \cdots, k$. Sea G_i el subgrupo de Lie conexo de G asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$. Entonces, si la acción de cada G_i sobre Q es polar, también lo es la acción de G.*

Demostración:

Sea Σ_i una sección para la acción de G_i por un punto fijo $p \in M$. Entonces, en un punto principal $q \in \Sigma_i$, resulta

$$T_q\Sigma_i = \nu_q G_i \cdot q = (\mathfrak{g}_i \cdot q)^{\perp} := \left\{ X \cdot q := \frac{d}{dt}_{|0} \exp(tX) \cdot q \ / \ X \in \mathfrak{g}_i \right\}^{\perp}$$

Definamos $\Sigma := \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$. Entonces Σ es una sección para la acción de G. En efecto, Σ es claramente una subvariedad totalmente goedésica de Q que interseca todas las órbitas de G y tal que en los puntos principales verifica $T_q\Sigma \perp \bigcap \mathfrak{g}_i \cdot q$, con lo cual $T_q\Sigma \subset \nu_q G \cdot q$. ■

Una subvariedad M de $\mathbb{R}^n$ se dice ***isoparamétrica*** si tiene fibrado normal plano y las curvaturas principales en la dirección de cualquier campo normal paralelo son constantes (cf. [35]). Una subvariedad de la esfera $\mathbb{S}^n$ es isoparamétrica si lo es como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Cualquier subvariedad isoparamétrica del espacio Euclídeo es esencialmente el producto de un espacio afín por una subvariedad (compacta) isoparamétrica de la esfera. En efecto, (cf. [4, Th. 5.2.11], [31, Cor. 6.3.12])

Lema 30 *Si M es una subvariedad isoparamétrica completa de $\mathbb{R}^n$ con distribución de nulidad E_0,* *entonces existe una subvaridad isoparamétrica de la esfera M_1 tal que que M se descompone como el producto directo extrínsico de M_1 y E_0.*

En el siguiente lema resumimos resultados básicos que vinculan las acciones polares con las subvariedades isoparamétricas. Para las pruebas remitimos a [4] y [31].

Lema 31 *Sea $Q = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{S}^n$ y $G \subset Iso(Q)$ un grupo de Lie que actua polarmente por isometrías en Q. Entonces*

1. *Todo vector normal a una órbita principal se extiende a un campo normal equivariante paralelo respecto de la conexión normal de la órbita. ([31, Cor. 5.4.9], [4, Cor. 3.2.5]).*
2. *Las órbitas principales son subvariedades isoparamétricas ([31, Teor. 5.7.1]).*

Finalizaremos esta sección probando un resultado básico que necesitaremos en la sección siguiente:

Lema 32 *Sea G un subgrupo de Lie de $Iso(\mathbb{R}^n)$. Si existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ tal que los espacios normales a las órbitas principales por puntos de U forman una distribución integrable en U, entonces la acción de G es polar.*

Demostración: Bajo las hipótesis del lema y dado que la isoparametricidad es una propiedad local, concluimos que las órbitas principales por puntos de U son subvariedades isoparamétricas de $\mathbb{R}^n$ y, en particular, son cerradas. Luego $\overline{G}$ es un grupo cerrado que tiene las mismas órbitas que G. Entonces el espacio normal $\nu_p(G \cdot p)$ interseca cualquier otra órbita de G (cf. [4]). Sea $\xi_p \in \nu_p(G \cdot p)$ un vector normal en p tal que la órbita $G \cdot (p + \xi_p)$ tiene dimensión máxima. Podemos extender ξ_p a un campo normal paralelo equivariante ξ en $G \cdot p$. Luego la órbita $G \cdot (p + \xi_p)$ es la variedad paralela $(G \cdot p)_\xi$, y por lo tanto tienen el mismo espacio normal. Concluimos que la acción de G es polar. ∎

3.2. El Teorema global

En esta sección probaremos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 33 *Sea M una subvariedad, completa e irreducible del espacio Euclídeo o de la esfera con índice de nulidad constante. Entonces cualquier par de puntos de M pueden ser unidos por una curva siempre perpendicular a la distribución de nulidad de M.*

Consideremos el espacio fibrado $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ definido en la sección 1.3.2. Denotaremos, como en las secciones previas, $M_r := \mathbf{pr}^{-1}(r)$, para cada $r \in M/\mathcal{N}$. Consideraremos además para cada $r \in M/\mathcal{N}$ el grupo de holonomía Φ_r, el grupo de holonomía restringido Φ_r^0 y el grupo de holonomía local Φ_r^{loc} como fueron definidos en la sección 1.3.2.

A lo largo de toda la sección denotaremos

$$\mathcal{H} := \mathcal{N}^\perp \subset TM.$$

Demostraremos previamente una serie de lemas técnicos a los efectos de facilitar posteriormente la lectura de la prueba del teorema. En todos los enunciados M será una subvariedad completa e irreducible del espacio Euclídeo o la esfera con índice de nulidad constante.

Lema 34 *Si existe un punto $p \in M$ tal que se verifica el enunciado (1) del Teorema 26, entonces para cada $r \in M_r$, el grupo de holonomía restringido Φ_r^0 actúa transitivamente en M_r.*

Demostración: Antes que nada, observemos que si Φ_r^0 actúa transitivamente en M_r para algún $r \in M/\mathcal{N}$, entonces Φ_s^0 actúa transitivamente en M_s para cada $s \in M/\mathcal{N}$.

En efecto, consideremos una curva $c : I \to M/\mathcal{N}$ cualquiera uniendo r y s. Sean $q_1, q_2 \in M_s$ y sean α el levantamiento horizontal de c^{-1} por q_1 y β el levantamiento horizontal de c^{-1} por q_2. Como $\alpha(1),\ \beta(1) \in M_r$ y Φ_r^0 actúa transitivamente en M_r, existe una curva horizontal δ en M uniendo $\alpha(1)$ con $\beta(1)$. Entonces $\alpha \cdot \delta \cdot \beta^{-1}$ es una curva horizontal en M uniendo q_1 y q_2, esto es,

$$\tau^{\mathcal{N}}_{\mathbf{pr}(\alpha\cdot\delta\cdot\beta^{-1})} q_1 = q_2.$$

Luego Φ_s actúa transitivamente en M_s y como M_s es conexo, esto implica que Φ_s^0 actúa transitivamente en M_s (cf. [20, Prop. 4.3, Ch. II]).

Sea $\mathcal{C}$ el abierto denso en M dado por el Teorema 26. Supongamos que la condición (1) del Teorema 26 se satisface para algún $p \in \mathcal{C}$. Sea $r = \mathbf{pr}(p)$. Entonces debe existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(p, \varepsilon) \cap M_r \subset \Phi_r \cdot p.$$

Sea ahora $q = \tau_c^{\mathcal{N}}(p) \in \Phi_r \cdot p$, para algún lazo $c \in M/\mathcal{N}$ basado en r. Sea $q' \in B(q, \varepsilon) \cap M_r$ y sea $p' = \tau_{c^{-1}}^{\mathcal{N}}(q')$. Como $\tau_c^{\mathcal{N}}$ es una isometría de M_r, entonces $p' \in B(p, \varepsilon) \cap M_r \subset \Phi_r \cdot p$. Luego $q' = \tau_c^{\mathcal{N}}(p') \in \Phi_r \cdot p$, de donde $B(q, \varepsilon) \cap M_r \subset \Phi_r \cdot p$. Luego $\Phi_r \cdot p$ es abierto.

Observemos que además hemos probado que existe un número real positivo fijo ε tal que $B(q, \varepsilon) \cap M_r \subset \Phi_r \cdot p$ para cada $q \in \Phi_r \cdot p$. Esto nos permitirá probar que $\Phi_r \cdot p$ es cerrado. En efecto, sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\Phi_r \cdot p$ que converge a $x \in M_r$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap M_r \subset \Phi_r \cdot p$ como antes. Entonces para cada $n \geq N \in \mathbb{N}$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. En particular, $x \in B(x_N, \varepsilon) \subset \Phi_r \cdot p$.

Como M_r es conexa, deducimos que Φ_r, y en consecuencia Φ_r^0, actúa transitivamente en M_r. ■

Observación 35 *Observemos que en la prueba de este lema concluimos que si Φ_r actúa transitivamente en M_r para algún $r \in M/\mathcal{N}$, entonces cada Φ_s actúa transitivamente en M_s. Como es posible conectar horizontalmente cualquier par de fibras de* $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$ *(basta considerar el levantamiento horizontal de una curva adecuada en $M/\mathcal{N}$), para demostrar el Teorema 33, bastará probar que algún Φ_r actúa transitivamente en M_r.*

Lema 36 *Para cada $r \in M/\mathcal{N}$, el grupo de holonomía restringido Φ_r^0 actúa transitivamente o polarmente en M_r.*

Demostración: A lo largo de la prueba mantendremos las notaciones del Teorema 26.

Sea $\mathcal{C}$ el abierto denso de M dado en el Teorema 26. Asumamos que Φ_r no actúa transitivamente en M_r para algún (y en consecuencia para todo) $r \in M/\mathcal{N}$. En función del Lema 34 podemos suponer que la condición (2) del Teorema 26 se debe satisfacer para cada $p \in \mathcal{C}$.

Fijemos entonces $p \in \mathcal{C}$ y sea U el entorno de p dado por el Teorema 26. Pongamos $r = \mathbf{pr}(p)$. Probaremos que para cada $q \in U \cap M_r$ se satisface

$$\Phi_r^{loc} \cdot q = [q]_U \cap M_r \ (\textit{localmente alrededor de } q). \tag{3.3}$$

Podemos asumir, posiblemente tomando un entorno U menor, que

$$\Phi_r^{loc} = \Phi^0(r, \mathbf{pr}(U)).$$

Recordemos que $[q]_U$ es el conjunto de puntos que pueden unirse a q mediante una curva perpendicular a $\mathcal{N}$ íntegramente contenida en U. Entonces es inmediato que $[q]_U \cap M_r \subset \Phi_r^{loc} \cdot q$.

Fijemos ahora una métrica Riemanniana en $M/\mathcal{N}$ y definamos una métrica Riemanniana en M tal que las distribuciones vertical y horizontal definidas por $\mathbf{pr}$, esto es $\mathcal{N}$ y $\mathcal{H}$, sean ortogonales para la nueva métrica y $\mathbf{pr}$ sea una submersión Riemanniana.

Para un $\delta > 0$ fijo, sea P_δ el subconjunto de Φ_r^{loc} formado por las transformaciones $\tau_c^{\mathcal{N}}$ determinadas por lazos en $\mathbf{pr}(U)$ basados en r, de longitud menor que δ. Siguiendo exáctamente las mismas ideas que en [12, Appendix], obtenemos que P_δ contiene un entorno abierto $\mathcal{U}(r)$ de la identidad en Φ_r^{loc}. Podemos tomar δ lo suficientemente pequeño de modo que $B_\delta(q)$ (la bola abierta de centro q y radio δ para la nueva métrica) esté contenida en U. Luego si c es un lazo basado en r de longitud menor que δ, su levantamiento horizontal por q está contenido en U. Luego $\mathcal{U} \cdot q$ es un entorno abierto de q en $\Phi_r^{loc} \cdot q$ contenido en $[q]_U$. Esto prueba la otra inclusión y la fórmula (3.3).

A partir del Teorema 26 y del Lema 32, obtenemos que la acción de Φ_r^{loc} en M_r es polar.

Definamos $\widetilde{\mathcal{C}} := \mathbf{pr}^{-1}(\mathbf{pr}(\mathcal{C}))$. Hemos probado que para cada $p \in \widetilde{\mathcal{C}}$ el grupo de holonomía local $\Phi_{\mathbf{pr}(p)}^{loc}$ actúa polarmente en $M_{\mathbf{pr}(p)}$. A partir del Torema 16 y del Lema 29, obtenemos que el grupo de holonomía restringido, que está generado por estos grupos, actúa polarmente en M_r como queríamos probar. ■

Lema 37 *Para cada $r \in M/\mathcal{N}$ sea V_r el subconjunto abierto y denso de M_r formado por los puntos principales para la acción de Φ_r. Entonces $V = \bigcup_{r\in M/\mathcal{N}} V_r$ es abierto y denso en M.*

Demostración: Es claro que V es denso en M. Veamos que además es abierto.

Sea $p \in V$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap M_r \subset V_r$, con $r = \mathbf{pr}(p)$. Consideremos la nueva métrica Riemanniana en M definida en la demostración del Lema 36 y tomemos un valor $\delta > 0$ de modo que la bola $B_\delta^*(p)$ de centro p y radio δ para la nueva métrica, esté contenida en $B(p, \varepsilon/2)$.

Recordemos que esta nueva métrica proviene de dotar a $M/\mathcal{N}$ de una métrica Riemanniana y hacer que $\mathbf{pr}$ sea una submersión Riemanniana con subespacio horizontal $\mathcal{H}$. Es fácil ver que

$$\mathbf{pr}(B_\delta^*(p)) = B^{M/\mathcal{N}}(\mathbf{pr}(p), \delta).$$

Sea $s \in B^{M/\mathcal{N}}(r, \delta)$ y sea $c : I \to M/\mathcal{N}$ una curva uniendo r y s de longitud menor que δ. Entonces $q := \tau_c^{\mathcal{N}}(p) \in B_\delta^*(p) \cap M_s$.

Como $\tau_c^{\mathcal{N}}$ es una isometría para la métrica original en $M/\mathcal{N}$, resulta claro que $\tau_c^{\mathcal{N}}(B(p,\varepsilon)\cap M_r) = B(q,\varepsilon)\cap M_s$. Además es fácil ver que $\tau_c^{\mathcal{N}}$ mapea órbitas principales para la acción de Φ_r en órbitas principales para la acción de Φ_s. Concluimos entonces que $B(q,\varepsilon)\cap M_s \subset V_s$.

Si tomamos $q' \in B_\delta^*(p)\cap M_s \subset B(p,\varepsilon/2)$ y denotamos por d la distancia que define la métrica original en M, entonces tenemos

$$d(q',q) \leq d(q',p) + d(p,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

con lo cual $q' \in B(q,\varepsilon)\cap M_s \subset V_s$. Concluimos que $B_\delta^*(p) \subset V$ y entonces V es abierto. ■

Para cada $p \in M$ consideremos el subconjunto $[p]$ de M dado por

$$[p] := \{\tau_c^{\mathcal{N}}(p) \;/\; c : I \to M/\mathcal{N},\ c(0) = \mathbf{pr}(p)\}. \tag{3.4}$$

Esto es, $[p]$ es el conjunto de los puntos de M que pueden conectarse a p mediante una curva horizontal. Obviamente, nuestro objetivo es probar que $[p] = M$ para cada $p \in M$.

Lema 38 *Para cada $p \in M$, $[p]$ es una subvariedad inmersa de M.*

Demostración: Sea $D_{\mathcal{N}}$ el conjunto de campos tangentes a M que yacen en $\mathcal{N}$, esto es,

$$D_{\mathcal{N}} := \{X \in \mathfrak{X}(M) :\ X(q) \in \mathcal{N}_q,\ \forall\ q \in M\}.$$

Para cada $X \in D_{\mathcal{N}}$, sea φ_t su flujo asociado, i.e., tal que para cada $p \in M$, $t \mapsto \varphi_t(p)$ es una curva integral de X por p. Recordemos que para cada t fijo φ_t define un difeomorfismo local de M (cf. [38]). Si $\vartheta = (X_1, \cdots X_m) \in D_{\mathcal{N}}^m$ y $T = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, pongamos

$$\vartheta_T(p) := \varphi_{t_m}^m \circ \cdots \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1(p),$$

donde φ_t^i es el flujo del campo X_i. Definimos en M la siguiente relación de equivalencia: q y p están relacionados si existen $m \in \mathbb{N}$, $\vartheta \in D_{\mathcal{N}}^m$ y $T \in \mathbb{R}^m$ tal que $\vartheta_T(p) = q$. La clase de equivalencia $S(p)$ de p se denomina una órbita de $D_{\mathcal{N}}$. Por el Teorema de la órbita de Sussmann-Stefan (cf. [33], [34]) $S(p)$ es una subvariedad inmersa de M.

Bastará ver entonces que $[p] = S(p)$. Si $X \in D_{\mathcal{N}}$ y φ_t es su flujo, entonces $\varphi_t(p)$ es una curva horizontal para $\mathcal{N}$ con lo cual resulta claro que $S(p) \subset [p]$.

Sea $P_{\mathcal{N}}$ la menor distribución que contiene a $\mathcal{N}$ y es invariante por φ_t^X para cada $X \in D_{\mathcal{N}}$ (i.e., $d\varphi_t^X$ mapea $P_{\mathcal{N}}(p)$ en $P_{\mathcal{N}}(\varphi_t^X(p))$). Entonces $P_{\mathcal{N}}$ es involutiva y cada órbita de $D_{\mathcal{N}}$ es una subvariedad integral maximal de $P_{\mathcal{N}}$ (cf. [34, Th. 4.1]). Como $\mathcal{N} \subset P_{\mathcal{N}}$ resulta claro que que $[p] \subset S(p)$ para cada $p \in M$ lo que prueba la igualdad. ■

Lema 39 *Supongamos que M es simplemente conexa. Sea V el subconjunto abierto y denso de M definido en el Lema 37. Sea $p \in V$ y $\xi_p \in \nu_p[p] \subset \mathcal{N}_p$. Si $q = \tau_c^{\mathcal{N}}(p) \in [p]$, pongamos*

$$\xi(q) := (d\tau_c^{\mathcal{N}})_p(\xi_p).$$

Entonces ξ es un campo normal a $[p]$ $\nabla^\perp$-paralelo.

Demostración: Observemos primero que si M es simplemente conexa, también lo es $M/\mathcal{N}$ y entonces $\Phi_r = \Phi_r^0$ para cada $r \in M/\mathcal{N}$.

Supongamos que M es una subvariedad del espacio Euclídeo. Fijemos $r = \mathbf{pr}(p)$. Como $[p] \cap M_r = \Phi_r^0 \cdot p$ es una órbita principal para la acción de Φ_r , ξ es un campo normal a $[p]$ bien definido. En efecto, si suponemos $q = \tau_c^{\mathcal{N}}(p) = \tau_\gamma^{\mathcal{N}}(p)$ entonces $\tau_{c^{-1}}^{\mathcal{N}} \circ \tau_\gamma^{\mathcal{N}} \in (\Phi_r)_p$ y a partir del Lema 28 $\xi_p = \tau_{c^{-1}}^{\mathcal{N}} \circ \tau_\gamma^{\mathcal{N}}(\xi_p)$.

Veamos que ξ es paralelo respecto de la conexión normal de $[p]$. Fijemos $q \in [p]$ y observemos que

$$T_q[p] = T_q(\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0 \cdot q) \oplus \mathcal{H}_q.$$

Tomemos $v \in T_q(\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0 \cdot q)$. Es fácil ver que ξ restringido a cada órbita $\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0 \cdot q$ es un campo $\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0$-equivariante. Esto implica que $\xi_{|\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0 \cdot q}$ es paralelo en la conexión normal de $\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0 \cdot q$, considerando $\Phi_{\mathbf{pr}(q)}^0 \cdot q$ como subvariedad de $M_{\mathbf{pr}(q)}$ (cf. Lema 31). Entonces es fácil ver que $(\nabla^{[p]})_v^\perp \xi = 0$, donde $(\nabla^{[p]})^\perp$ es la conexión normal de $[p]$ como subvariedad de M.

Tomemos ahora $v \in \mathcal{H}_q$. Sea $\sigma(t)$ una curva horizontal por q con $\sigma'(0) = v$. Sea $q_s := q + s\xi(q) \in M_{\mathbf{pr}(q)}$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Sea $\delta(t)$ el levantamiento horizontal de $\mathbf{pr}(\sigma(t))$ por q_1. Definamos $\eta(t) = \delta(t) - \sigma(t) \in \mathcal{N}_{c(t)}$. Es claro que el levantamiento horizontal de $\mathbf{pr}(\sigma(t))$ por q_s es $\sigma(t) + s\eta(t)$.

Veamos que $\eta(t) = \xi(\sigma(t))$. Sea $\alpha(s) = q + s\xi(q) = q_s \subset M_{\mathbf{pr}(q)}$. Entonces

$$\xi(\sigma(t)) = d\tau^{\mathcal{N}}_{\sigma_{|[0,t]}}(\xi(q)) = \frac{d}{ds}\tau^{\mathcal{N}}_{\sigma_{|[0,t]}}(\alpha(s)).$$

Pero $\tau^{\mathcal{N}}_{\sigma_{|[0,t]}}(\alpha(s)) = \sigma(t) + s\eta(t)$. Luego $\frac{d}{ds}\tau^{\mathcal{N}}_{\sigma_{|[0,t]}}(\alpha(s)) = \eta(t)$ como queríamos ver. Concluimos entonces que

$$\frac{d}{dt}\xi(\sigma(t)) = \sigma'(t) - \delta'(t) \in \mathcal{H}_{\sigma(t)}$$

y en particular, esta derivada es tangente a $[p]$. Luego $(\nabla^{[p]})^{\perp}_{v}\xi = 0$.

La prueba para una subvariedad de la esfera es análoga, considerando la subvariedad $\overline{M}$ de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ definida en 2.9 y observando la relación entre la nulidad $\mathcal{N}$ de M como subvariedad de la esfera y la nulidad $\overline{\mathcal{N}}$ de $\overline{M}$ dada en (2.10). ■

Observación 40 *De la demostración del lema anterior deducimos que si $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $p \in V$ y $\xi_p \in \eta_p[p]$, entonces*

$$[p + \xi_p] = [p]_{\xi}.$$

Lema 41 *Sea M una subvariedad de una forma espacial Q y sean N una subvariedad de M A^M-invariante y $\mathcal{D}$ la distribución de nulidad de N como subvariedad de M. Entonces $\mathcal{D}$ es autoparalela.*

Demostración: Sean νN el fibrado normal de N como subvariedad de Q y $\nu^M N$ el fibrado normal de N como subvariedad de M. Entonces es claro que

$$\nu N = \nu^M N \overset{\perp}{\oplus} \nu M_{|N}.$$

Comencemos probando que $\nu^M N$ es un subfibrado paralelo de νN.

Sea $c(t)$ una curva en N y sea $\xi_0 \in \nu_{c(0)}M$. Sea $\xi(t)$ el transporte paralelo de $\xi(0)$ respecto de la conexión normal de M. Si $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de Q, tenemos

$$\overline{\nabla}_{c\,'(t)}\xi(t) = A^M_{\xi(t)}c\,'(t) \in T_{c(t)}N$$

pues N es A^M-invariante. Luego $\xi(t)$ es paralelo respecto de la conexión normal de N (como subvariedad de Q) y por lo tanto $\nu M_{|N}$ es un subfibrado paralelo de νN. Concluimos que $\nu^M N$

también es un subfibrado paralelo de νN. Esto implica que si $\xi \in \nu^M N$, entonces el operador de forma de N como subvariedad de M en la dirección de ξ coincide con el operador de forma $\hat{A}_\xi$ de N como subvariedad de Q en la dirección ξ. Podemos aplicar entonces la ecuación de Codazzi como en (1.7) en el Lema 2 y concluimos que $\mathcal{D}$ es autoparalela. ■

Demostración Teorema 33: Como estamos trabajando con subvariedades inmersas, podemos suponer (pasando eventualmente al cubrimiento universal) que M es simplemente conexa. Entonces $M/\mathcal{N}$ resulta simplemente conexa y en consecuencia $\Phi_r^0 = \Phi_r$ para cada $r \in M/\mathcal{N}$.

Sea V el subconjunto abierto y denso de M definido en el lema 37.

Supongamos primero que M es una subvariedad del espacio Euclídeo. Si $p \in V$ y $r = \mathbf{pr}(p)$, como la acción de Φ_r^0 en M_r es polar por el Lema 36, entonces $\Phi_r^0 \cdot p$ es una subvariedad isoparamétrica completa del espacio Euclídeo M_r. Luego $\Phi_r^0 \cdot p$ es el producto extrínseco de su nulidad $E_0(p)$ por una subvariedad isoparamétrica $S(p)$ de la esfera (cf. Lema 30).

Sea $\mathcal{D}(p)$ el subespacio de nulidad de $[p]$ en p, considerando $[p]$ como subvariedad de M y no del espacio Euclídeo ambiente. Probaremos que

$$\mathcal{D}(p) = \mathcal{H}_p \oplus E_0(p). \tag{3.5}$$

Es fácil ver que $\mathcal{H}_p$ y $\mathcal{N}_p \cap T_p[p]$ son invariantes por el operador de forma de $[p]$ y resulta claro que E_0 es la parte de la nulidad de $[p]$ contenida en $\mathcal{N}_p$. Para probar (3.5) bastará ver entonces que $\mathcal{H}_p$ está contenido en $\mathcal{D}(p)$.

Recordemos que los espacios horizontales $\mathcal{H}$ son constantes, como subespacios del espacio Euclídeo ambiente, a lo largo de cada fibra de $\mathbf{pr} : M \to M/\mathcal{N}$. Fijemos $\xi_p \in \nu_p[p] \subset \mathcal{N}_p$ y pongamos $q = p + \xi_p$. Entonces $\mathcal{H}_p$ y $\mathcal{H}_q$ coinciden y son ambos isomorfos a $T_r M/\mathcal{N}$ via $d\mathbf{pr}$. Tenemos entonces el isomorfismo

$$\varphi_{\xi_p} := d\mathbf{pr}_q^{-1} \circ (d\mathbf{pr}_p)_{|\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_q \simeq \mathcal{H}_p$$

Sea $X \in T_r M/\mathcal{N}$ y $c(t)$ una curva en $M/\mathcal{N}$ tal que $c(0) = r$ y $c'(0) = X$. Sean $\sigma(t)$ y $\beta(t)$ los levantamientos horizontales de c por p y q respectivamente. Hemos visto que $\beta(t) = \sigma(t) + \xi(\sigma(t))$, donde ξ es el campo normal paralelo a $[p]$ definido en el Lema 39 por ξ_p. Luego

$$\beta'(0) = \sigma'(0) + \frac{d}{dt}\xi(\sigma(t)) = (Id - \hat{A}_{\xi_p})\sigma'(0)$$

donde $\hat{A}_{\xi_p}$ es el operador de forma de $[p]$ como subvariedad de M (que coincide con el operador de forma como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$).

Luego $\varphi_{\xi_p} = (Id - \hat{A}_{\xi_p})$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_p$ para cada $\xi_p \in \nu_p(\Phi_r^0 \cdot p)$. Supongamos que $\hat{A}_{\xi_p|\mathcal{H}_p} \neq 0$. Entonces existe un autovector $v \in \mathcal{H}_p$ asociado a un autovalor real $\lambda \neq 0$ de $\hat{A}$. Luego $\varphi_{\xi_p/\lambda}(v) = (Id - \hat{A}_{\xi_p/\lambda})v = 0$, lo cual no puede ocurrir pues $\varphi_{\xi_p/\lambda}$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_p$. Concluimos que $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{D}(p)$ como queríamos mostrar.

$\mathcal{D}(p)$ es entonces una distribución bien definida sólo en el subconjunto abierto y denso V de M. Observemos ahora que dado que dos órbitas principales cualesquiera en la misma fibra M_r son variedades paralelas, a partir de la fórmula del tubo (2.3) es inmediato que tienen el mismo factor Euclídeo extrínsico (vistos como subvariedades de M_r). Luego todos los subespacios $E_0(p)$ pueden ser identificados en $V \cap M_r$, para cada fibra M_r. Podemos entonces extender E_0 a todo M_r definiendo $E_0(q)$, para $q \in M_r$, como cualquiera de los subespacios comunes $E_0(p)$, $p \in M_r \cap V$.

Si p y q están en fibras distintas, sea $c(t)$ una curva en $M/\mathcal{N}$ uniendo $\mathbf{pr}(p)$ con $\mathbf{pr}(q)$. Entonces $q' = \tau_c^{\mathcal{N}}(p) \in M_{\mathbf{pr}(p)}$ y $\Phi^0_{\mathbf{pr}(q)} \cdot q' = \tau_c^{\mathcal{N}}(\Phi^0_{\mathbf{pr}(p)} \cdot p)$ es isométrica a $\Phi^0_{\mathbf{pr}(p)} \cdot p$. Luego $\dim(E_0(q)) = \dim(E_0(q')) = \dim(E_0(p))$ y entonces E_0 puede definirse en todo M. Como $\mathcal{H}$ está definida en M, resulta que $\mathcal{D}$ es una distribución diferenciable bien definida en todo M.

Probaremos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^\perp$ son autoparalelas e invariantes por el operador de forma A de M.

Observemos que $\mathcal{D}^\perp(p)$ es el complemento ortogonal de $E_0(p)$ en $M_{\mathbf{pr}(p)}$ y por lo tanto es una distribución autoparalela en M, que resulta paralela cuando nos restringimos a cualquier fibra M_r. Como $A_{\xi|\mathcal{D}^\perp} \equiv 0$, resulta $\mathcal{D}^\perp$ trivialmente A-invariante.

Por otra parte, es fácil ver que $[p]$ es A-invariante y entonces, en virtud del Lema 41, resulta $\mathcal{D}$ autoparalela. Dado que $\mathcal{H}$ es A-invariante y $A_{|E_0} \equiv 0$ pues $E_0 \subset \mathcal{N}$, obtenemos que $\mathcal{D}$ es A-invariante.

Como M es irreducible y $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ no es trivial, $\mathcal{D}^\perp$ debe ser trivial, o sea que $S(p)$ es trivial y cualquier órbita $\Phi^0_{\mathbf{pr}(p)} \cdot p$ coincide con la fibra $M_{\mathbf{pr}(p)}$, lo que prueba el teorema.

Asumamos ahora que M es una subvariedad de la esfera $\mathbb{S}^{n+k}$. Como en el Teorema 26 pongamos $\eta(p) = p$ el campo normal posición y definamos

$$\overline{M} := \bigcup_{-\delta<\varepsilon<\delta} M_{\varepsilon\eta}.$$

como en (2.9). Si $r = \mathbf{pr}(p)$, sea $L_r := T_pM_r \oplus \mathbb{R}\eta_p$. Observemos que L_r es el menor subespacio de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ que contiene la fibra M_r y su definición es independiente del punto $p \in M_r$ elegido.

Observemos que el complemento ortogonal $\mathcal{H}_p$ de $\mathcal{N}_p$ en T_pM es constante a lo largo de $M_{\mathbf{pr}(p)}$, pues en efecto, si consideramos la nulidad $\overline{\mathcal{N}}$ de $\overline{M}$, entonces $\mathcal{H}$ es también el espacio horizontal asociado a $\overline{\mathcal{N}}$, y por lo tanto constante a lo largo de $L_{\mathbf{pr}(p)} \supset M_{\mathbf{pr}(p)}$.

Fijemos $p \in V$. Supongamos que existe un vector normal no nulo $\xi_p \in \nu_p[p]$, donde $\nu_p[p]$ es el espacio normal de $[p]$ en p como subvariedad de M. Entonces $\xi_p \in L_{\mathbf{pr}(p)}$ es normal a la órbita isoparamétrica $\Phi_r^0 \cdot p$. Extendemos ξ_p a un campo normal paralelo ξ a $[p]$ según el Lema 39.

Consideremos en $\mathbb{R}^{n+k+1}$ la variedad paralela $\widetilde{[p]} := [p]_\xi$. Observemos que $\widetilde{[p]}$ está contenida en la esfera centrada en el origen y de radio $R = \sqrt{1 + \|\xi_p\|^2}$. Denotemos por $\pi_\xi : [p] \to \widetilde{[p]}$ el correpondiente mapa focal. Es claro que para cada $q \in [p]$, $\pi_\xi(q) \in L_{\mathbf{pr}(q)}$.

Sea $\lambda = 1/R - 1$ y pongamos $\Psi = \lambda\eta$, donde η es el campo posición en $\mathbb{R}^{n+k+1}$, y por lo tanto un campo normal paralelo a $[\widetilde{p}]$. Consideremos la variedad paralela $\widetilde{[p]}_\Psi$ y sea π_Ψ el correspondiente mapa focal. Observemos que π_Ψ no es más que la proyección a la esfera $\mathbb{S}^{n+k}$ y por lo tanto $\pi_\Psi(\pi_\xi(q)) \in M_{\mathbf{pr}(q)}$ para cada $q \in [p]$.

Pongamos $r = \mathbf{pr}(p)$ y fijemos $q = \pi_\Psi(\pi_\xi(p))$, veremos que como subvariedades de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ resulta

$$[q] = \widetilde{[p]}_\Psi. \tag{3.6}$$

Observemos primero que los operadores de forma de $[p]$ en direcciones normales a $[p]$ tangentes a M, como subvariedad de M, como subvariedad de $\mathbb{S}^{n+k}$ o como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ coinciden. Denotémoslo $\hat{A}$.

Sea $\overline{c}(t)$ una curva horizontal en M respecto a $\mathcal{N}$ tal que $\overline{c}(0) = p$ y sea

$$\widetilde{c}(t) := \pi_\Psi(\pi_\xi(\overline{c}(t))) = (1+\lambda)\overline{c}(t) + (1+\lambda)\xi(\overline{c}(t)).$$

Luego $\widetilde{c}\,'(t) = (1+\lambda)(Id - \hat{A}_\xi)(\overline{c}\,'(t)) \in \mathcal{H}_{\overline{c}(t)}$, y como $\mathcal{H}_{\overline{c}(t)}$ y $\mathcal{H}_{\widetilde{c}(t)}$ pueden identificarse, $\widetilde{c}(t)$ es una curva horizontal respecto a $\mathcal{N}$ por q. Esto muestra que $\widetilde{[p]}_\Psi \subset [q]$. La otra contención es análoga.

Observemos que además hemos probado que si $c(t)$ es una curva en $M/\mathcal{N}$ por r y $\overline{c}(t)$ es su levantamiento horizontal por p, entonces $\pi_\Psi(\pi_\xi(\overline{c}(t)))$ es su levantamiento horizontal por q.

Ahora bien, recordemos que a lo largo de M_r los espacios horizontales son constantes, y son todos isomorfos, vía $d\mathbf{pr}$, con $T_rM/\mathcal{N}$. Entonces es claro que el isomorfismo $d\mathbf{pr}_q^{-1} \circ d\mathbf{pr}_p$ de $\mathcal{H}_p$ en

$\mathcal{H}_q \simeq \mathcal{H}_p$ está dado por $\varphi_{\xi_p} := (1+\lambda)(Id - \hat{A}_\xi)_{|\mathcal{H}_p}$. De la misma manera que en el caso Euclídeo, concluimos que $\hat{A}_{|\mathcal{H}_p} \equiv 0$.

Sea entonces $\mathcal{D}(p)$ el subespacio de nulidad de $[p]$ en p como subvariedad de M. Entonces $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{D}(p)$. Dado que las órbitas de Φ^0_r por puntos de V son subvariedades isoparamétricas de una esfera, podemos asumir (restringiéndonos posiblemente a un subconjunto abierto y denso de V) que no tienen nulidad en la esfera. De hecho es fácil ver que si una órbita principal tiene nulidad en la esfera, cualquier subvariedad paralela cercana, que es una órbita principal por 3.6, no tiene nulidad.

Luego $\mathcal{H}_{|V} = \mathcal{D}$ es una distribución autoparalela en V y, dado que V es denso en M, resulta $\mathcal{H}$ una distribución autoparalela en M. Como M es irreducible y tanto $\mathcal{H}$ como $\mathcal{N}$ son no triviales, concluimos que el espacio normal a cualquier órbita debe ser trivial, o equivalentemente, las órbitas coinciden con M_r. ■

3.3. Contraejemplo en el espacio hiperbólico

Construiremos una subvariedad inmersa, 1-1, conexa, completa e irreducible de dimensión 2 del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$ con índice de nulidad constante igual a 1. La distribución perpendicular a la nulidad tendrá dimensión 1 y por lo tanto será automáticamente integrable.

Para ello, observemos que dado que queremos una subvariedad M con índice de nulidad 1 y las subvariedades integrales de la distribución de nulidad son totalmente geodésicas en el espacio ambiente, éstas deben ser geodésicas de $\mathbb{H}^3$. Con esta motivación, consideraremos una geodésica $\sigma(s)$ de $\mathbb{H}^3$ y describiremos a M como la unión de las órbitas por puntos de σ para la acción de un grupo monoparamétrico de isometrías, obtenido como el flujo de un campo de Killing adecuado.

Comenzaremos recordando el modelo que utilizaremos de $\mathbb{H}^3$. Sea $\mathbb{L}^4$ el espacio de Lorentz de dimensión 4, esto es, $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

El ***espacio hiperbólico*** de dimensión 3 es el subconjunto $\mathbb{H}^3$ de $\mathbb{L}^4$ dado por

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x\rangle = -1\}.$$

Sea $O_1(4)$ el ***grupo semi-ortogonal*** de $\mathbb{L}^4$, esto es, el conjunto de matrices B, 4×4, que satisfacen $\langle Bx, By\rangle = \langle x, y\rangle$ para cada $x, y \in \mathbb{L}^4$. El grupo de isometrías $Iso(\mathbb{H}^3)$ de $\mathbb{H}^3$ es el subconjunto de $O_1(4)$ formado por aquellos elementos que dejan $\mathbb{H}^3$ invariante. El álgebra de Lie de $Iso(\mathbb{H}^3)$ es $\mathfrak{o}_1(4)$, el subconjunto de $\mathfrak{gl}(4)$ de matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & x \\ x^{\mathbf{t}} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathfrak{o}(3)$, i.e, $a^{\mathbf{t}} = -a$, y $x \in \mathbb{R}^3$ (cf. [29]).

Recordemos que un campo de Killing en una variedad Riemanniana es un campo vectorial tal que el grupo monoparamétrico asociado está formado por isometrías. Como $\mathbb{H}^4$ es completo, existe un anti-isomorfismo de álgebras de Lie de campos de Killing y el álgebra de Lie del grupo de isometrías (cf. [29]) y entonces todo campo de Killing X de $\mathbb{H}^3$ es de la forma

$$X_q = \frac{d}{dt}_{|0}(e^{tA}q) = Aq \tag{3.7}$$

para alguna matriz $A \in \mathfrak{o}_1(4)$. Ahora, si $v = c\,'(0) \in T_q\mathbb{H}^n$, entonces

$$\nabla_v X = \frac{D}{ds}_{|0} X_{c(s)} = \left(\frac{d}{dt}_{|0} X_{c(s)}\right)^T = (Av)^T. \tag{3.8}$$

Necesitaremos del siguiente lema técnico.

Lema 42 *Sean $v \perp x$ dos vectores unitarios perpendiculares en $\mathbb{R}^3$. Entonces existe una matriz $a \in \mathfrak{o}(3)$ tal que $av = 0$, $ax \neq 0$ y tal que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & x \\ x^{\mathbf{t}} & 0 \end{pmatrix}$$

verifica $A^3 = 0$.

Demostración: Consideremos la matriz

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $B \in O(3)$ una matriz ortogonal que mapee x en e_1 y v en e_3 y definamos $a = B^{\mathbf{t}}\widetilde{a}B$. Entonces

$$av = B^{\mathbf{t}}\widetilde{a}e_3 = 0; \quad ax = B^{\mathbf{t}}\widetilde{a}e_1 = B^{\mathbf{t}}(-e_2) \neq 0.$$

Pongams $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a} & e_1 \\ e_1^{\mathbf{t}} & 0 \end{pmatrix}$ y $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. No es difícil probar que $\widetilde{A}^3 = 0$. Entonces $A = \widetilde{B}^{\mathbf{t}}\widetilde{A}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B^{\mathbf{t}}\widetilde{a}B & B^{\mathbf{t}}e_1 \\ e_1^{\mathbf{t}}B & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz que buscamos. ■

Lema 43 *Sea σ una geodésica con velocidad unitaria en $\mathbb{H}^3$ por $p = e_4$ con $\sigma'(0) = \overline{v} = (v, 0)$ para algún $v \in \mathbb{R}^3$. Sea $\overline{x} = (x, 0)$ un vector tangente unitario en p perpendicular a $\overline{v}$ y sea $J(s)$ el campo de Jacobi a lo largo de σ con condiciones iniciales $J(0) = \overline{x}$ y $J'(0) = 0$. Entonces*

1. *$J(s) = \cosh(s)\overline{x}$.*

2. *Si A es la matriz del Lema 42 para los vectores v y x, entonces el campo de Killing $X_q = Aq$ en $\mathbb{H}^3$ verifica $X_{\sigma(s)} = J(s)$.*

3. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo monoparamétrico de isometrías de $\mathbb{H}^3$ asociado a X. Entonces*

$$\varphi_t = e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

Más aún, la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}^3 \ / \ (t, s) \mapsto f(t, s) = e^{tA}\sigma(s)$$

es una inmersión $1 - 1$.

Demostración: Recordemos primero que la geodésica por p con condición inicial $\overline{v}$ es

$$\sigma(s) = \sinh(s)\overline{v} + \cosh(s)e_4.$$

Sea $\widetilde{J}(s) = \cosh(s)\overline{x}$, entonces $\left\langle \widetilde{J}(s), \sigma(s) \right\rangle = \cosh(s)\sinh(s)x^{\mathbf{t}}v = 0$. Luego $\widetilde{J}(s)$ es un campo vectorial tangente a lo largo de σ. Ahora, $\widetilde{J}''(s) = \widetilde{J}(s)$ y por lo tanto $\widetilde{J}$ es un campo de Jacobi en $\mathbb{H}^3$ que satisface $\widetilde{J}(0) = \overline{x}$, $\widetilde{J}'(0) = \sinh(0)\overline{x} = 0$. Entonces $\widetilde{J} = J$, lo que prueba (1).

Sea A la matriz del Lema 42 para los vectores v y x y sea X el campo de Killing que tiene asociado. Entonces $X_{\sigma(s)}$ es un campo de Jacobi. Pero $X_p = Ae_4 = \overline{x} = J(0)$ y $\nabla_{\overline{v}}X = (A\overline{v})^T = av = 0 = J'(0)$. Luego $X_\sigma = J$, lo que prueba (2).

Para probar (3), observemos que como $A^3 = 0$, resulta $\varphi_t = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}_{|(t_0,s_0)} &= \frac{d}{dt}_{|0}\varphi_{t_0+t}\sigma(s_0) = (d\varphi_{t_0})_{\sigma(s_0)}\frac{d}{dt}_{|0}\varphi_t(\sigma(s_0)) \\ &= (d\varphi_{t_0})_{\sigma(s_0)}X_{\sigma(s_0)} = (d\varphi_{t_0})_{\sigma(s_0)}J(s_0) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}_{|(t_0,s_0)} = \frac{d}{ds}_{|s_0}\varphi_{t_0}\sigma(s) = (d\varphi_{t_0})_{\sigma(s_0)}\sigma'(s_0) \neq 0$$

Como φ_{t_0} es una isometría, tenemos

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle_{f(t_0,s_0)} = \big\langle J(s_0), \sigma'(s_0) \big\rangle = 0$$

y por lo tanto f es una inmersión.

Probaremos finalmente que f es inyectiva. Observemos que $A^2 = \left(\begin{array}{c|c} a^2 + xx^{\mathbf{t}} & ax \\ \hline x^t a & 1 \end{array}\right)$ y como $av = 0$ y $x^{\mathbf{t}}v = 0$, obtenemos

$$f(s,t) = \varphi_t(\sigma(s)) = \begin{pmatrix} \sinh(s)v + t\cosh(s)x + \frac{t^2}{2}\cosh(s)ax \\ (1 + \frac{t^2}{2})\cosh(s) \end{pmatrix}$$

Supongamos que existen t, t', s, s' tales que $f(t,s) = f(t',s')$. Entonces $\langle f(t,s), \overline{v}\rangle = \langle f(t',s'), \overline{v}\rangle$ de donde $\sinh(s) = \sinh(s')$, y $s = s'$. Además deberíamos tener $\langle f(t,s), \overline{x}\rangle = \langle f(t',s'), \overline{x}\rangle$, pero como $(ax)^{\mathbf{t}}x = 0$, obtenemos entonces $t\cosh(s) = t'\cosh(s')$ de donde $t = t'$. ■

Teorema 44 *Sea f como en el lema anterior. Entonces, con la métrica inducida, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}^3$ es una subvariedad completa, irreducible y con índice de nulidad constante igual a* 1.

Demostración: Pongamos $M = f(\mathbb{R}^2)$. Comencemos probando que M tiene índice de nulidad constante igual a 1. Sea α^f le segunda forma fundamental de M y $\mathcal{N}_q$ el subespacio de nulidad de M en q. Veamos que $\mathcal{N} = span\{\frac{\partial f}{\partial s}\}$.

Como $\sigma_{t_0}(s) := f(t_0, s)$ es una geodésica en $\mathbb{H}^3$ para cada t_0 fijo, sigue que

$$\alpha^f\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) = 0.$$

Por otra parte, $\frac{\partial f}{\partial t} = X$ y entonces

$$\nabla_{\sigma'_{t_0}(s_0)}X = (A\sigma'_{t_0}(s_0))^T = (Ae^{t_0A}\sigma'(s_0))^T = (e^{t_0A}A\sigma'(s_0))^T = e^{t_0A}J'(s_0)$$

Pero por (1) en el Lema 43 tenemos $J'(s) = \sinh(s)\overline{x} = \tanh(s)J(s)$ y entonces

$$\nabla_{\sigma'_{t_0}(s_0)} X = \tanh(s_0)e^{t_0A}J(s_0) = \tanh(s_0)X_{\sigma_{t_0}(s_0)}$$

Luego $\alpha^f(\sigma'_{t_0}(s_0), X_{\sigma_{t_0}(s_0)}) = 0$ y por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial s} \in \mathcal{N}$.

Veamos que $\frac{\partial f}{\partial t}_{|(t_0,s_0)} = X_{f(t_0,s_0)} \notin \mathcal{N}$. Ahora,

$$(\nabla_X X)_{f(t_0,s_0)} = (AX_{f(t_0,s_0)})^T = (A^2 f(t_0,s_0))^T = (A^2 e^{t_0A}\sigma(s_0))^T = (e^{t_0A}A^2\sigma(s_0))^T$$

Como e^{t_0A} es una isometría que preserva M bastará ver que $(A^2\sigma(s_0))^T$ no es tangente a M. Tenemos

$$A^2\sigma(s_0) = \begin{pmatrix} a^2 + xx^{\mathbf{t}} & ax \\ x^{\mathbf{t}}a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh(s)v \\ \cosh(s) \end{pmatrix} = \cosh(s) \begin{pmatrix} ax \\ 1 \end{pmatrix}$$

como $av = 0$ y $x^{\mathbf{t}}v = 0$, y

$$(A^2\sigma(s_0))^T = A^2\sigma(s_0) + \left\langle A^2\sigma(s_0), \sigma(s_0)\right\rangle \sigma(s_0).$$

Pero $\left\langle A^2\sigma(s_0), \sigma(s_0)\right\rangle = \cosh(s_0)(\sinh(s_0)(ax)^{\mathbf{t}}v - \cosh(s_0)) = -\cosh^2(s_0)$ y entonces

$$(A^2\sigma(s_0))^T = \begin{pmatrix} \cosh(s_0)ax - \cosh^2(s_0)\sinh(s_0)v \\ \cosh(s_0) - \cosh^3(s_0) \end{pmatrix}$$

Observemos que $\cosh(s_0) - \cosh^3(s_0) = 0$ si y sólo si $s_0 = 0$ en cuyo caso

$$\cosh(0)ax - \cosh^2(0)\sinh(0)v = ax \neq 0.$$

Concluimos que $(A^2\sigma(s_0))^T \neq 0$ para cada s_0. Si $(A^2\sigma(s_0))^T$ es tangente M, deben existir α, β tales que

$$(A^2\sigma(s_0))^T = \alpha\sigma'(s_0) + \beta X_{\sigma(s_0)} = \alpha\sigma'(s_0) + \beta J(s_0).$$

Como $\sigma'(s_0) \perp J(s_0)$, obtenemos

$$\alpha = \left\langle A^2\sigma(s_0), \sigma'(s_0)\right\rangle = -\cosh(s_0)\sinh(s_0).$$

Entonces deberíamos tener

$$\cosh(s_0)ax - \cosh^2(s_0)\sinh(s_0)v = -\cosh^2(s_0)\sinh(s_0)v + \beta\cosh(s_0)x$$

y luego $ax = \beta x$ lo que no es posible pues $(ax)^{\mathbf{t}}x = 0$ and $ax \neq 0$. Concluimos que

$$\alpha^f \left(\frac{\partial f}{\partial t}_{(t_0,s_0)}, \frac{\partial f}{\partial t}_{(t_0,s_0)} \right) \neq 0.$$

Esto muestra además que M es irreducible, pues si no lo fuese, debería ser el producto de dos subvariedades 1-dimensionales y por lo tanto, debería tener curvatura constante igual a 0. Pero de la fórmula de Gauss se tiene $K\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) = -1$ dado que $\alpha^f\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) = 0$.

Probaremos finalmente que M es completa. Consideremos una sucesión de Cauchy $w_k = \varphi_{t_k}\sigma(s_k)$ in M. Entonces existe un punto $w \in \mathbb{H}^n$ tal que $w_k \to w$ in $\mathbb{H}^3$. Pero entonces $\langle w_k, \overline{v}\rangle \to \langle w, \overline{v}\rangle$ de donde $\sinh(s_k)$ es convergente. Ésto implica que $\{s_k\}$ es acotada y contiene una subsucesión convergente, que seguiremos denotando $\{s_k\}$. Pero además $\langle w_k, \overline{x}\rangle \to \langle w, \overline{x}\rangle$, y entonces $t_k \cosh(s_k)$ es convergente. Como $s_k \to s_0$, obtenemos $1 \leq \cosh(s_k) \leq C$. Por lo tanto t_k debe ser acotada. Concluimos que w_k tiene una subsucesión convergente en M. Como $\{w_k\}$ converge a w en $\mathbb{H}^3$, debe ser $w \in M$. Luego M es completa. ■

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la distribución de nulidad de la segunda forma fundamental de una subvariedad M de una forma espacial. Hemos comenzado demostrando algunas propiedades básicas, entre las que destacamos una prueba geométrica de la completitud de las variedades integrales cuando la variedad es completa (cf. Teorema 4). Debido a que este resultado se desprende de una propiedad más general (cf. Teorema 6), esperamos que pueda ser útil para el estudio de la completitud de las variedades integrales de otras distribuciones determinadas por la nulidad de algún operador en la variedad (por ejemplo, para el estudio de la nulidad del tensor de curvatura).

Posteriormente hemos hecho una descripción local muy general de cualquier subvariedad del espacio Euclídeo o la esfera como unión de subvariedades paralelas, que involucra la distribución de nulidad. Consideramos que esta descripción puede ser de gran utilidad para el estudio de subvariedades de estas formas espaciales, debido a que el subespacio de nulidad es el núcleo de la aplicación de Gauss que juega un rol importante, fundamentalmente en la teoría de subvariedades del espacio Euclídeo. En [9] ya se da una clasificación local, pero sólo de hipersuperficies de una forma espacial con índice de nulidad constante, utilizando las denominadas "parametrizaciones de Gauss".

Finalmente, hemos probado en el Teorema 33 que la distribución perpendicular a la nulidad es completamente no integrable, cuando la variedad M es una subvariedad completa e irreducible del espacio Euclídeo o la esfera. La prueba es altamente no trivial. Para ello hemos debido proporcionar el marco adecuado recurriendo a la teoría de espacios fibrados, y probar varios resultados adaptando esta teoría al objeto de nuestro estudio: los fibrados afines y esféricos. Hemos utilizado además técnicas delicadas de la teoría de holonomía normal, trabajando con variedades focales y paralelas, tubos holonómicos, etc. El hecho de que esta propiedad no sea válida, como hemos probado al final del Capítulo 3, para subvariedades del espacio hiperbólico, nos da la pauta de que no es posible encontrar una prueba más sencilla utilizando sólo herramientas de la geometría local.

Resultados globales del tipo del Teorema 33 (como el "Homogeneous slice theorem", cf. [19]) han demostrado ser de gran utilidad en la teoría de subvariedades. Un resultado similar ha sido probado para subvariedades isoparamétricas en espacios de Hilbert y ha resultado ser una herramienta fundamental para probar la homogeneidad de este tipo de subvariedades (cf. [17]). Estimamos por ello que este Teorema global representa un aporte significativo para la teoría de subvariedades y será, personalmente, tema de futuras investigaciones.

Bibliografía

[1] D.V. Alekseevskif, A.S. Solodovnikov, and E.B. Vinberg. *Geometry II: Spaces of constant curvature.* Springer, 1993.

[2] S. Alexander. Reducibility of Euclidean immersions of low codimension. *J. Diff. Geom.*, 3:69–82, 1969.

[3] W. Ambrose and I.M. Singer. A theorem on holonomy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75:428–443, 1953.

[4] J. Berndt, S. Console, and C. Olmos. *Submanifolds and holonomy.* Chapman and Hall. Boca Raton, 2003.

[5] A. Besse. *Einstein Manifolds.* Springer, 2008.

[6] E. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* Mc. Graw-Hill, 1955.

[7] S. Console, A. Di Scala, and C. Olmos. A Berger type normal holonomy theorem for complex submanifolds. *To appear in Math. Ann., ArXiv:math.DG0807.3419v2*, 2009.

[8] M. Dajczer. *Submanifolds and Isometric Immersions.* Math. Lecture Series 13. Publish or Perish, 1990.

[9] M. Dajczer and D. Gromoll. Gauss parametrizations and rigidity aspects of submanifolds. *J. Diff. Geom.*, 22:1–12, 1985.

[10] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides. IMPA, 2005.

[11] C. Doering and A. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias.* Coleção Matemática Universitaria. IMPA, 2008.

[12] J. H Eschenburg and C. Olmos. Rank and symmetry of Riemannian manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 69:483–499, 1994.

[13] M. Falcitelli, S. Ianus, and A.M. Pastore. *Riemannian submersions and related topics.* World scientific publishing, 2004.

[14] D. Ferus. On the completeness of nullity foliations. *Michigan Math. J.*, 18:61–64, 1971.

[15] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces.* Progr. Math.,152. Birkhäuser Boston, 1999.

[16] P. Hartman. On isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 115:94–109, 1965.

[17] E. Heintze and X. Liu. Homogeneity of infinite-dimensional isoparametric submanifolds. *Ann. Math.*, 149(2):149–181, 1999.

[18] E. Heintze, X. Liu, and C. Olmos. Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem. *Integrable systems, geometry and topology, AMS*, pages 151–190, 2006.

[19] E. Heintze, C. Olmos, and G. Thorbergsson. Submanifolds with constant principal curvatures and normal holonomy groups. *Int. J. Math.*, 2(2), 1991.

[20] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press. San Diego, 1978.

[21] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. John Wiley and Sons, 1963.

[22] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer. New York, 2003.

[23] J.D. Moore. Isometric immersions of Riemannian products. *J. Diff. Geom.*, 21:79–107, 1971.

[24] C. Olmos. The normal holonomy group. *Proc. Am. Math. Soc.*, 110:813–818, 1990.

[25] C. Olmos. Homogeneous submanifolds of higher rank and parallel mean curvature. *J. Diff. Geom.*, 39:605–627, 1994.

[26] C. Olmos. A geometric proof of the Berger holonomy theorem. *Ann. Math.*, 161, 2005.

[27] C. Olmos and F. Vittone. On completeness of integral manifolds of nullity distributions. *To appear in Revista de la UMA, arXiv:1104.1412v1*, 2011.

[28] C. Olmos and A. Will. Normal holonomy in Lorentzian space and submanifold geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(4):1777–1788, 2001.

[29] B. ONeill. *Semi-riemannian Geometry.* Academic Press. New York, 1983.

[30] R. Palais. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* Mem. Amer. Math. Soc. 1957.

[31] R. Palais and C.L. Terng. *Critical point theory and submanifold geometry.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1988.

[32] W. A. Poor. *Differential Geometric Structures.* McGraw-Hill, 1981.

[33] P. Stefan. Integrability of systems of vector fields. *J. London Math. Soc.*, 21:544–556, 1980.

[34] H.J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 180:171–188, 1973.

[35] C. L. Terng. Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups. *J. Diff. Geom.*, 21:79–107, 1985.

[36] G. Thorbergsson. Isoparametric foliations and their buildings. *Ann. Math.*, 133(2):429–446, 1991.

[37] F. Vittone. On the nullity distribution of a submanifold of a space form. *To appear in Math. Zei. DOI: 10.1007/s00209-011-0918-3*, 2011.

[38] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlang. New York, 1983.