Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

GEOMETRÍA I

Licenciatura en Matemática - Profesorado en Matemática - Año 2016

Equipo docente:
Francisco Vittone - Justina Gianatti - Martín Alegre.

Unidad 3: Congruencia de triángulos, área de figuras planas y el Teorema de Pitágoras.

---

1. Introducción.

En la unidad anterior hemos definido qué entendemos por dos triángulos congruentes y hemos establecido como axioma el primer criterio de congruencia de triángulos, o criterio LAL.

Recordemos que dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de modo que los pares de lados homólogos y los pares de ángulos homologos para esta correspondencia son congruentes entre si. El criterio LAL establece que si dos pares de lados homólogos y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes, lo que significa que automáticamente el tercer lado de un triángulo es congruente con el tercer lado del otro y los otros dos ángulos del primer triángulo son congruentes con los respectivos ángulos en el otro.

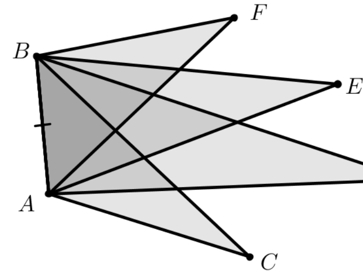
Es decir que un criterio de congruencia nos permite garantizar que dos triángulos son congruentes con mucha menos información que la que tendríamos que verificar según la definición de congruencia.

El objetivo de esta unidad es establecer otros criterios de congruencia y estudiar algunas de las muchas aplicaciones que tienen. Sin dudas los criterios de congruencia de triángulos constituyen los resultados más importantes y que más aplicaciones tienen en la geometría plana.

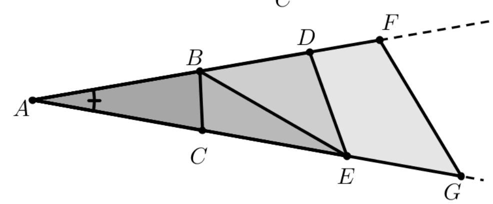
Comenzaremos descubriéndolos en base a nuestra experiencia y nos ocuparemos de demostrarlos en la próxima sección. Como ya hemos mencionado, un criterio de congruencia nos permitirá concluir que dos triángulos son congruentes cuando conocemos mucha menos información que la que requiere la definición. Determinaremos por lo tanto cuál es la menor cantidad de información de que debemos disponer para poder asegurar que dos triángulos son congruentes.

Un triángulo tiene seis elementos que lo caracterizan: sus tres lados y sus tres ángulos. El primer criterio de congruencia nos dice que si sabemos que tres de estos elementos (dos lados y un ángulo, el comprendido entre ellos) de un triángulo son congruentes con los respectivos elementos de otro, entonces los triángulos son congruentes. ¿Pero no podremos llegar a la misma conclusión con menos información?

Supongamos que conocemos sólo uno de estos elementos, es decir, conocemos la medida de un ángulo o un lado de un triángulo. ¿Cuántos triángulos no congruentes podemos construir con estos datos? Es bastante evidente que infinitos. En las siguientes figuras mostramos muchas maneras de construir muchos triángulos no congruentes que tienen un lado o un ángulo de la misma medida.



Triángulos no congruentes con un lado en común : $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ABD}$, $\overset{\triangle}{ABE}$, $\overset{\triangle}{ABF}$ son triángulos no congruentes con $\overline{AB}$ como lado en común.

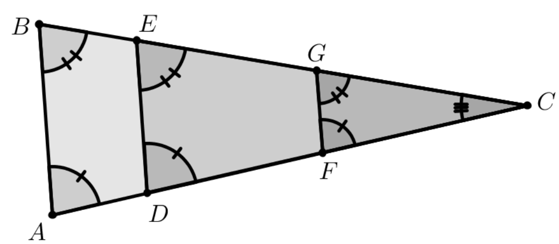


Triángulos no congruentes con un ángulo en común : $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ADE}$, $\overset{\triangle}{ABE}$, $\overset{\triangle}{AFG}$ son triángulos no congruentes con $\hat{A}$ como ángulo en común.

Es decir que si sabemos que dos triángulos tienen un lado o un ángulo de la misma medida, esto no nos alcanza para concluir que los triángulos son congruentes.

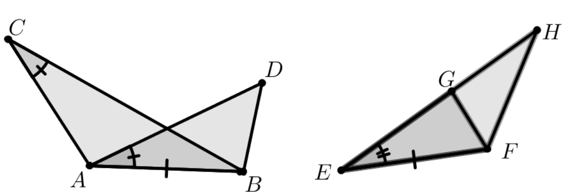
Por lo tanto necesitamos conocer más información. Supongamos entonces que tenemos ahora dos datos: dos ángulos, dos lados, o un ángulo y un lado.

Si conocemos dos ángulos de un triángulo, automáticamente conocemos el tercero. Nuevamente es fácil ver que existen muchos triángulos no congruentes que tienen ángulos de la misma medida. Basta tomar un triángulo cualquiera y cortar dos de sus lados por rectas paralelas al tercer lado. Obtenemos así triángulos que tienen los mismos tres ángulos pero sus lados no tienen obviamente la misma medida, y por lo tanto no son congruentes.

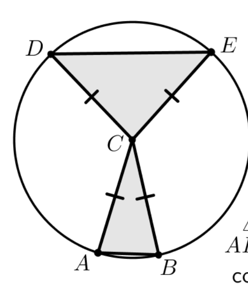


$\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{DEC}$ y $\overset{\triangle}{FGC}$ son triángulos no congruentes con tres ángulos congruentes.

Si conocemos un lado y un ángulo, o dos lados también podemos construir muchos triángulos no congruentes que tienen estos datos en común, como se muestra en la siguiente figura. Les proponemos que construyan otros.



$\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ABD}$, y $\overset{\triangle}{EFG}$ y y $\overset{\triangle}{EFH}$ son triángulos no congruentes con un lado y un ángulo congruentes.



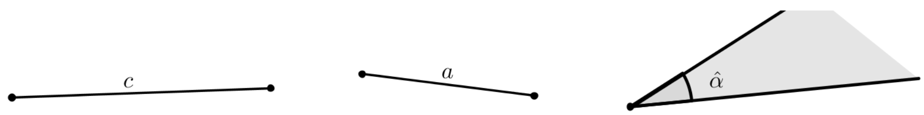
$\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{CDE}$ son triángulos no congruentes con dos lados congruentes.

Por lo tanto necesitamos conocer al menos tres datos sobre los triángulos. Las posibles formas de “agrupar” tres datos son dos ángulos y un lado, dos lados y un ángulo, tres lados o tres ángulos.

Ya hemos visto que si dos triángulos tienen sus tres ángulos congruentes no necesariamente son congruentes, y por lo tanto esto no constituye un criterio de congruencia.

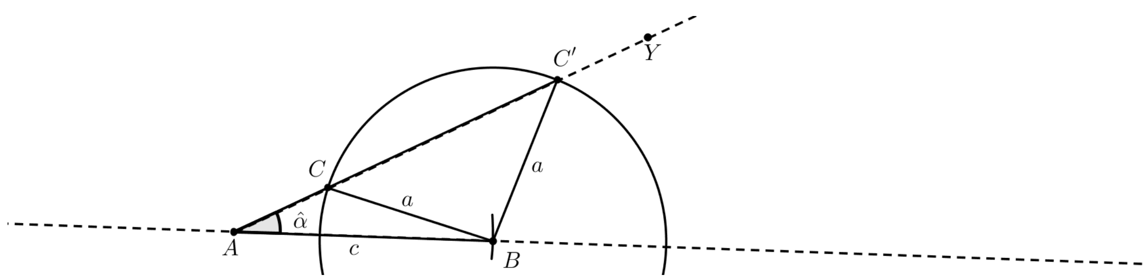
Supongamos ahora que conocemos la medida de dos lados y un ángulo. ¿Cuántos triángulos no congruentes podemos construir con estos datos? El axioma 17 nos dice que si el ángulo es el comprendido entre los lados dados, todos los triángulos que construyamos serán congruentes entre sí.

¿Qué ocure si el ángulo que tenemos como dato tiene como lado sólo uno de los lados del triángulo de los que conocemos la medida? Nuestros datos son la medida a y c de dos lados y un ángulo $\hat{\alpha}$ como los de la figura. Trataremos de ver cuántos triángulos podemos construir con estos datos, de modo que el ángulo sea adyacente sólo a uno de los lados dados.

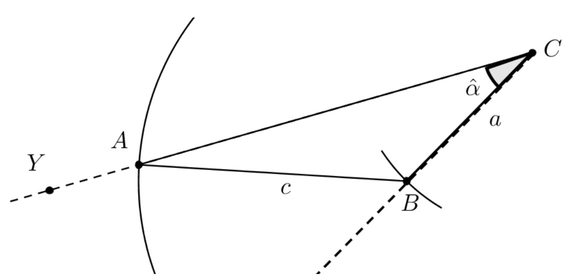


Comenzamos con un punto A cualquiera y con extremo en él construimos, utilizando el compás, un segmento de la medida c dada. Sea B el extremo del segmento. Sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ transportamos el ángulo $\hat{\alpha}$ de modo que su vértice sea A. Sea $\overrightarrow{AY}$ el otro lado del ángulo. Con centro en B trazamos una circunferencia de radio a.

Vemos que la circunferencia interseca a la recta $\overleftrightarrow{AY}$ en dos puntos. Estos dos puntos, llamémoslos C y C', estarán a distancia a de B, con lo cual $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ABC'}$ son dos triángulos que tienen dos lados y un ángulo respectivamente congruentes, pero que no son congruentes.



En este caso, $\hat{\alpha}$ se opone al menor de los dos lados ya que en el ejemplo $c > a$. Veamos qué ocurre cuando $\hat{\alpha}$ se opone al lado mayor. Partimos ahora de un punto C y marcamos un punto B tal que $BC = a$. Con vértice en C y sobre la semirrecta $\overrightarrow{CB}$ trasladamos el ángulo $\hat{\alpha}$. Sea $\overrightarrow{CY}$ el otro lado del ángulo $\hat{\alpha}$. Trazamos ahora con centro en B una circunferencia de radio c. Vemos que la circunferencia corta a $\overrightarrow{CY}$ en un único punto A, y por lo tanto queda determinado un único triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ con lados $AB = c$, $BC = a$ y $\hat{C} = \hat{\alpha}$.



Concluimos que si dos triángulos tienen dos pares de lados homólogos congruentes y los ángulos que se oponen al mayor de los lados también son congruentes, entonces los triángulos son congruentes. Éste constituye por lo tanto un criterio de congruencia.

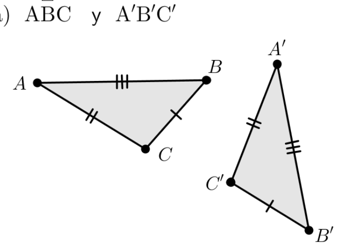
Les poponemos que, siguiendo el procedimiento anterior, intenten construir todos los triángulos no congruentes posibles si se conocen los siguientes datos: la medida de dos ángulos y un lado; la medida de tres lados. Completen la siguiente tabla con las conclusiones que obtengan:

Si se conocen...	¿Cuántos triángulos no congruentes pueden construirse?	¿Determina un criterio de congruencia?
dos lados y el ángulo comprendido entre ellos	1	Sí
dos lados y el ángulo opuesto al menor de ellos	más de uno	No
dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos		
dos ángulos y un lado		
tres lados		
tres ángulos		

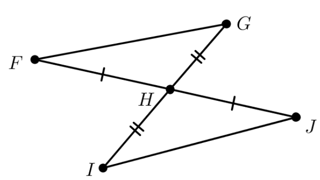
1.1. Ejercicios propuestos

1. En cada ítem, las mismas marcas sobre ángulos o lados indican que son congruentes. Determinar, en función del análisis realizado en esta sección, si los datos dados en cada caso junto con las propiedades de las distintas figuras son o no suficientes para determinar que los triángulos indicados son congruentes.

a) $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

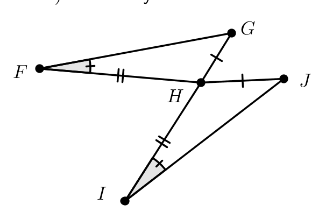


b) $\overset{\triangle}{FGH}$ y $\overset{\triangle}{JHI}$

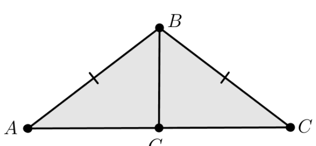


$F\ H\ J$ y $G\ H\ I$ alineados

c) $\overset{\triangle}{FGH}$ y $\overset{\triangle}{JHI}$

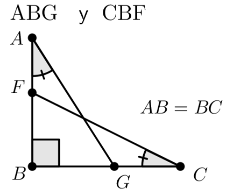


d) $\overset{\triangle}{ABG}$ y $\overset{\triangle}{CBG}$

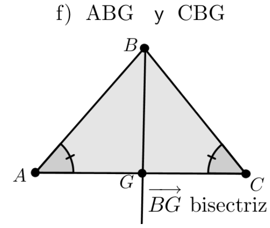


G punto medio de $\overline{AC}$

e) $\overset{\triangle}{ABG}$ y $\overset{\triangle}{CBF}$



f) $\overset{\triangle}{ABG}$ y $\overset{\triangle}{CBG}$



$\overrightarrow{BG}$ bisectriz de $\hat{B}$

2. Criterios de congruencia de triángulos

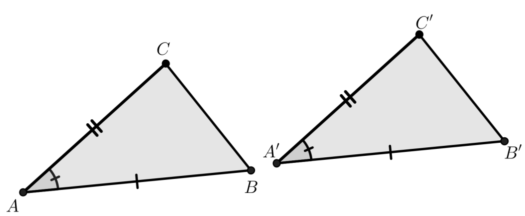
De la actividad propuesta en la introducción, surge que además del axioma 17, existen otros criterios de congruencia de triángulos. Sin embargo no necesitamos establecer estos criterios como axiomas, ya que pueden ser deducidos a partir del axioma 17. Dedicaremos esta sección a enunciarlos adecuadamente y demostrarlos.

Recordemos que dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son **congruentes** si existe una correspondencia $s : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ entre sus vértices de modo que los pares de lados y ángulos homólogos para esta correspondencia son congruentes.

En el desarrollo teórico de esta unidad, cuando trabajemos con triángulos genéricos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, supondremos, a menos que se especifique de otra manera, que la correspondencia está dada por $s(A) = A'$, $s(B) = B'$ y $s(C) = C'$. En ese caso, resulta

$$\overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{A'B'C'} \iff AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C',\ \hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}'.$$

Finalmente, utilizaremos la siguiente convención: cuando escribamos $\overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{DEF}$ supondremos que la correspondencia está dada por $s(A) = D$, $s(B) = E$ y $s(C) = F$. Así, $AB = DE$, $AC = DF$, $\hat{B} = \hat{E}$, etc.



CRITERIO LAL: (Axioma 17) Si en dos triángulos dos pares de lados homólogos y los ángulos comprendidos entre dichos lados son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.
En el dibujo:

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \text{ y } \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{A'B'C'}\ .$$

En la unidad anterior hemos visto varias aplicaciones de este criterio. Veremos a continuación de cada nuevo criterio que enunciemos algunas aplicaciones y problemas resueltos.

Comenzamos con un resultado muy simple que será de gran utilidad.

Lema 1. *La congruencia de triángulos define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los triángulos del espacio. Es decir:*

1. *es **reflexiva**, o sea, todo triángulo es congruente a sí mismo.*
2. *es **simétrica**, o sea, si $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente con $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, entonces $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ es congruente con $\overset{\triangle}{ABC}$.*
3. *es **transitiva**, o sea, si $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente con $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y si $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ es congruente con $\overset{\triangle}{A''B''C''}$, entonces $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente con $\overset{\triangle}{A''B''C''}$.*

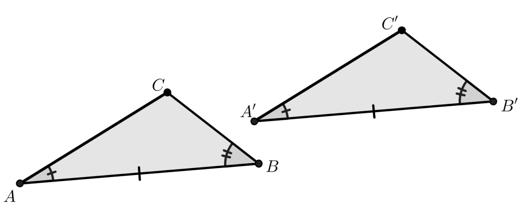
__Demostración:__ Sean $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ tres triángulos.

1. Consideremos la correspondencia trivial $s : \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$ tal que $s(A) = A$, $s(B) = B$ y $s(C) = C$. Entonces es claro que los pares de lados y ánguos homólogos son congruentes, pues en efecto son coincidentes. Luego $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente consigo mismo.

2. Supongamos ahora que $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente a $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y que la congruencia corresponde, sin pérdida de generalidad, a la correspondencia s tal que $s(A) = A'$, $s(B) = B'$ y $s(C) = C'$. Entonces

   $t : \{A', B', C'\} \to \{A, B, C\}$ tal que $t(A') = A$, $t(B') = B$ y $t(C') = C$ es tal que lados y ángulos homólogos son congruentes. Luego $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ es congruente a $\overset{\triangle}{ABC}$.

3. Finalmente supongamos que $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente a $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ es congruente a $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ con correpondencias s y t tales que $s(A) = A'$, $s(B) = B'$, $s(C) = C'$, y $t(A') = A''$, $t(B') = B''$, $t(C') = C''$. Entonces es fácil verificar que los lados homólogos y los ángulos homólogos para la correspondencia $l : \{A, B, C\} \to \{A'', B'', C''\}$ dada por $l(A) = A''$, $l(B) = B''$ y $l(C) = C''$, son congruentes. Luego $\overset{\triangle}{ABC}$ es congruente a $\overset{\triangle}{A''B''C''}$. □



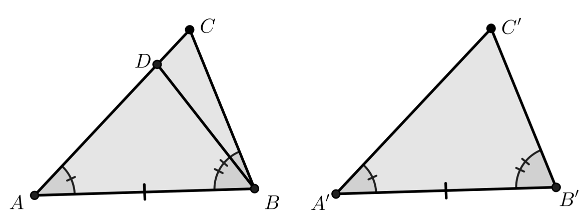
Teorema 2. CRITERIO ALA
Si en dos triángulos un par de lados homólogos y los ángulos con vértices en los extremos de dichos lados son respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.
En el dibujo:

$$AB = A'B', \ \hat{A} = \hat{A'} \ \ y \ \ \hat{B} = \hat{B'} \ \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{A'B'C'} \ .$$

Demostración:

Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ dos triángulos tales que $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A'}$ y $\hat{B} = \hat{B'}$. Observemos que basta probar que $AC = A'C'$, pues entonces por el criterio LAL resutaría $\overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{A'B'C'}$ y el teorema estaría demostrado. Supongamos, razonando por el absurdo, que $AC \neq A'C'$. Entonces $AC > A'C'$ o $AC < A'C'$.

Si $AC > A'C'$, entonces podemos determinar un punto D sobre el segmento $\overline{AC}$ de modo que $AD = A'C'$. Como D es un punto interior de $\hat{B}$, resulta $D\hat{B}A < \hat{B}$, como se muestra en la figura.



Comparando los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, resultan $AB = A'B'$ y $\hat{A} = \hat{A}'$ por hipótesis, y $AD = A'C'$ por construcción. Luego, por el criterio LAL, $\overset{\triangle}{ABD} =_c \overset{\triangle}{A'B'C'}$.

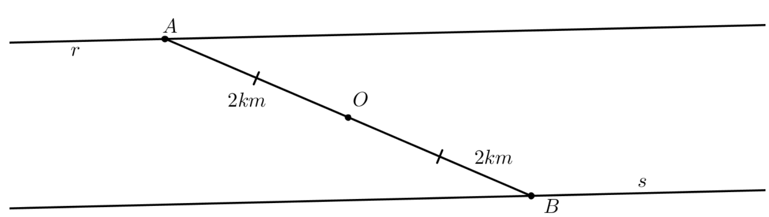
Pero entonces $A\hat{B}D = \hat{B}'$, lo cuál es absurdo pues $\hat{B}' = \hat{B}$ por hipótesis y $A\hat{B}D < \hat{B}$. El absurdo proviene de suponer que $AC \neq A'C'$, con lo cual deberá ser $AC = A'C'$ como queríamos probar.

Si suponemos que $AC < A'C'$ la demostración es análoga y se deja como ejercicio. $\square$

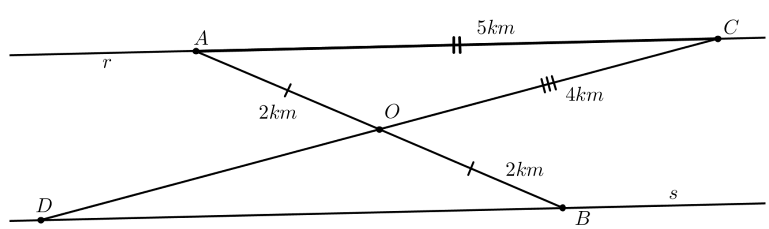
<u>Problemas resueltos:</u>

1. *Un barco atraviesa un río cuyos márgenes son paralelos. El barco recorre un total de $4km$ en línea recta y exactamente a mitad de camino deja caer una boya con un ancla que deberá recoger otro barco. El segundo barco sale desde la misma orilla y de un punto a $5km$ del punto de partida del primero y, navegando siempre en línea recta, recoge la boya al cabo de $4km$. ¿Qué distancia total recorre el segundo barco al atravesar el río? ¿A qué distancia del primer barco llega el segundo barco a la otra orilla?*

   Para resolver el problema, comenzamos analizando bien los datos que nos proporciona y realizamos un dibujo de la situación. El río corre entre dos márgenes paralelos, que modelizaremos con dos rectas paralelas que llamamos r y s. Denotemos por A y B el punto de partida y de llegada del primer barco respectivamente. El barco deja caer la boya en un punto, que denotamos con O, exáctamente a mitad de camino. En nuestra modelización matemática, esto quiere decir que O es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Sabemos que el barco recorre una distancia total de $4km$, o sea que $AB = 4km$ y entonces $AO = OB = 2km$.



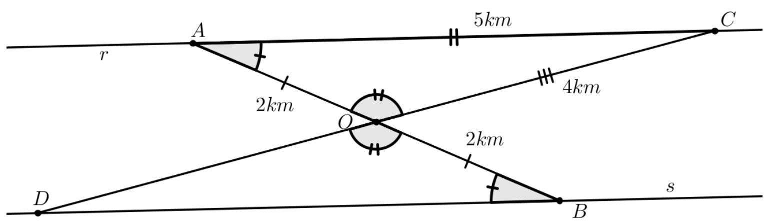
   El segundo barco sale de un punto C de la orilla r. Este punto está a $5km$ del punto de partida del primer barco, lo que quiere decir que $AC = 5km$. El segundo barco se mueve siempre en línea recta, pasando por O. Llega al margen s del río en un punto que denotamos por D. Como se mueve siempre en línea recta, $O \in \overline{CD}$. Por último, el barco recoge la boya, que se encuentra en el punto O, al cabo de $4km$, lo que nos indica que $CO = 4km$. Podemos finalmente realizar el dibujo completo de la situación.



Ya hemos modelizado el problema, para resolverlo debemos trabajar con las herramientas matemáticas que disponemos, y al final interpretar los resultados que obtengamos en función de lo que cada uno de los objetos geométricos que tenemos representan en la situación real.

El problema nos pide averiguar la distancia total que recorre el segundo barco, que en nuestro modelo viene dada por la longitud del segmento $\overline{CD}$. También debemos obtener la distancia entre los puntos de llegada de ambos barcos, que en nuestro modelo está representada por la longitud del segmento $\overline{BD}$.

Observemos que las restas r y s son paralelas, y por lo tanto $C\hat{A}O = O\hat{B}D$ por ser alternos internos entre r y s cortadas por $\overleftrightarrow{AB}$. Por otro lado, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ por ser opuestos por el vértice y $AO = OB = 2km$ por hipótesis.



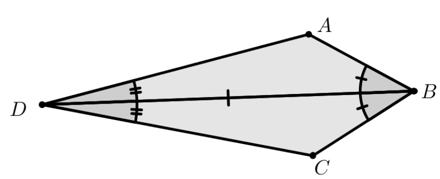
Concluimos que los triángulos $\overset{\triangle}{AOC}$ y $\overset{\triangle}{BOD}$ tienen un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente congruentes. Por el criterio ALA resultan congruentes.

Los lados homólogos son $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ y $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Esto implica que $OD = OC$ y $AC = BD$.

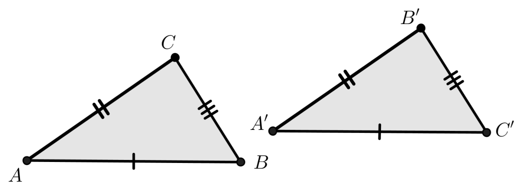
Concluimos que $OD = 4km$ y $BD = 5km$. Luego el segundo barco recorre un total de $8km$ (longitud de $\overline{CD}$) y llega a un punto a $5km$ del primer barco (longitud de $\overline{BD}$).

2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $\overline{BD}$ está contenido en la bisectriz de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{D}$. Demostrar que $AB = BC$ y $AD = CD$ es un romboide.*

   Este problema es completamente teórico. Comenzamos analizando los datos: tenemos un cuadrilátero $ABCD$ de modo que su diagonal es bisectriz de $\hat{B}$ y $\hat{D}$. Luego $A\hat{B}D = C\hat{B}D$ y $A\hat{D}B = C\hat{D}B$.



   Comparando los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{CBD}$ se tiene $A\hat{B}D = C\hat{B}D$, $A\hat{D}B = C\hat{D}B$ y $\overline{BD}$ es un lado común a ambos. Luego, por el criterio ALA ambos triángulos resultan congruentes, y en particular $AB = BC$ y $AD = DC$.



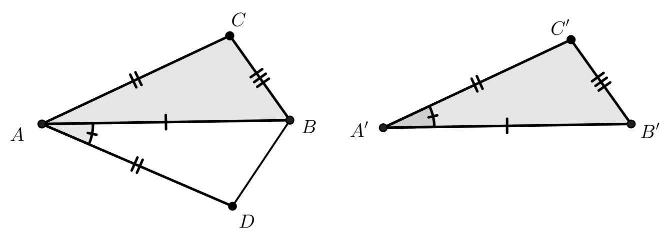
Teorema 3. CRITERIO LLL *Si dos triángulos tienen tres pares de lados homólogos congruentes, entonces los triángulos son congruentes.*
En el dibujo:

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \ \ y\ \ BC = B'C' \ \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} =_c A'\overset{\triangle}{B'}C'\ .$$

Demostración:

Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ dos triángulos tales que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$. Constuiremos un tercer triángulo que, utilizando criterios distintos, resultará congruente con ambos, lo que implicará que los triángulos originales son congruentes.

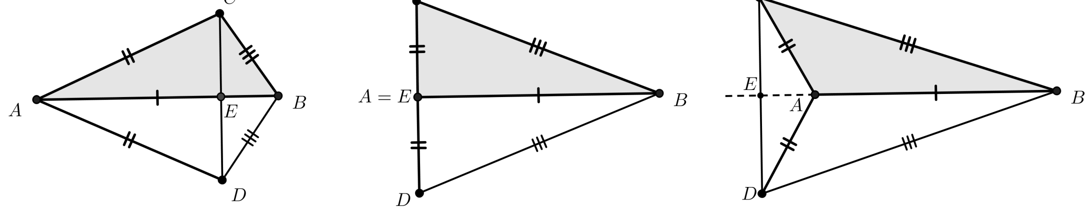
Consideremos un punto D en el semiplano $semp_{\overleftrightarrow{AB}}(\neg C)$ de modo que $B\hat{A}D = B'\hat{A}'C'$ y $AD = A'C'$ (¿por qué es esto posible?).



Comparando los triángulos $B\overset{\triangle}{A}D$ y $B'\overset{\triangle}{A'}C'$ tenemos $AB = A'B'$ por hipótesis, y $\hat{A}' = B\hat{A}D$ y $AD = A'C'$ por construcción. Consideremos la correspondencia $s : \{A', B', C'\} \to \{A, B, D\}$ tal que $s(A') = A$, $s(B') = B$, $s(C') = D$. Entonces dos pares de lados homólogos para esta correspondencia son congruentes, y los ángulos comprendidos entre ellos en cada triángulo son congruentes entre sí. Luego por el criterio LAL resulta $B\overset{\triangle}{A}D =_c B'\overset{\triangle}{A'}C'$. En particular, como $\overline{BD}$ y $\overline{B'C'}$ son lados homólogos, $BD = B'C'$. Por hipótesis, $B'C' = BC$ de donde resulta

$$BD = BC.$$

Ahora bien, como C y D son puntos en distintos semiplanos de los determinados por $\overleftrightarrow{AB}$, resulta $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$. Existen esencialmente tres opciones: E está entre A y B, $E = A$ o A está entre E y B (en realidad también podría ocurrir que $E = B$ o que B está entre A y E, pero estos casos son completamente análogos a los dos últimos anteriores).



Demostraremos el teorema para el caso en que E esté entre A y B y dejamos los otros dos como ejercicio. En este caso, E es un punto interior del ángulo $\hat{C}$ y del ángulo $\hat{D}$, por lo tanto resultan

$$\hat{C} = A\hat{C}E + E\hat{C}B \text{ y } \hat{D} = A\hat{D}E + E\hat{D}B \tag{1}$$

Pero $AC = AD$ y por lo tanto $\overset{\triangle}{ACD}$ es isósceles. Luego $A\hat{C}E = A\hat{D}E$. Pero también $\overset{\triangle}{CBD}$ es isósceles, pues $CB = DB$. Luego $E\hat{C}B = E\hat{D}B$. Reemplazando en (1) resulta $\hat{C} = \hat{D}$.

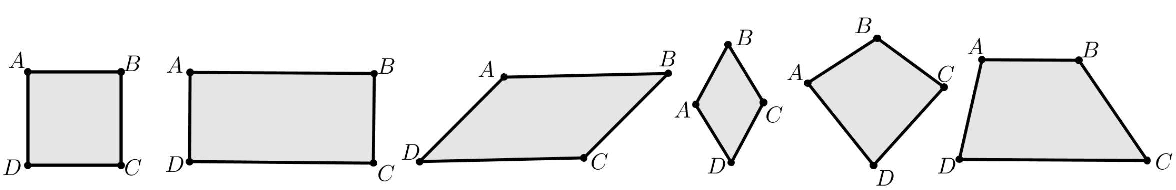
Por lo tanto, si comparamos los triángulos $\overset{\triangle}{ACB}$ y $\overset{\triangle}{ADB}$ tenemos $AC = AD$, $CB = DB$ y $\hat{C} = \hat{D}$. Por el criterio LAL $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ABD}$ son congruentes, y como $\overset{\triangle}{ABD}$ es congruente con $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, resulta que $\overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{A'B'C'}$. $\square$

Utilizaremos los criterios de congruencia para obtener algunas propiedades importantes de los cuadritaleros. Antes de continuar definiremos los distintos cuadriláteros en función de las propiedades que tienen.

Definiciones:

En un cuadrilátero $ABCD$, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ se denominan **lados opuestos**. Un cuadrilátero $ABCD$ se denomina:

- **cuadrado** si sus cuatro lados son congruentes entre sí y sus cuatro ángulos son rectos.
- **rectángulo** si sus cuatro ángulos son rectos.
- **paralelogramo** si los pares de lados opuestos son paralelos.
- **rombo** si los cuatro lados son congruentes entre sí.
- **romboide** si $AB = BC$ y $CD = DA$.
- **trapecio** si tiene un par de lados opuestos paralelos.

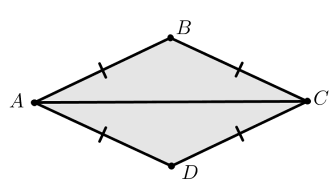


cuadrado rectángulo paralelogramo rombo romboide trapecio

Problemas resueltos

1. *Probar que en un rombo los ángulos opuestos son congruentes.*

   Consideremos un rombo $ABCD$. Entonces $AB = BC = CD = DA$. Tracemos la diagonal $\overline{AC}$.

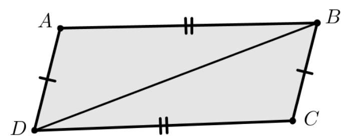


Comparando los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{CDA}$ resultan $AB = AD$ y $BC = CD$ por hipótesis, y $\overline{AC}$ es lado común. Consideremos la correspondencia $s : \{A, B, C\} \to \{C, D, A\}$ tal que $s(A) = C$, $s(B) = D$ y $s(C) = A$. Luego por el criterio LLL resulta $\overset{\triangle}{ABC} =_c \overset{\triangle}{CDA}$. Como $\hat{B}$ y $\hat{D}$ son ángulos homólogos resulta $\hat{B} = \hat{D}$. Los otros pares de ángulos homólogos son $C\hat{A}B$ y $D\hat{C}A$, y $B\hat{C}A$ y $D\hat{A}C$. Luego

$$\hat{A} = C\hat{A}B + D\hat{A}C = D\hat{C}A + B\hat{C}A = \hat{C}.$$

2. *Probar que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si los dos pares de lados opuestos son congruentes.*

$\Leftarrow$) Consideremos un cuadrilátero $ABCD$ tal que $AB = CD$ y $BC = AD$, como en la figura.



Si trazamos la diagonal $\overline{BD}$ y comparamos los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{CDB}$ tenemos $AB = CD$ y $BC = AD$ por hipótesis, y $\overline{BD}$ es un lado común a ambos triángulos. Luego por el criterio LLL, $\overset{\triangle}{ABD} =_c \overset{\triangle}{CDB}$ para la correspondencia $s : \{A, B, D\} \to \{C, D, B\}$ tal que $s(A) = C$, $s(B) = D$ y $s(D) = B$. Los ángulos homólogos son $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $A\hat{B}D$ y $C\hat{D}B$, y $A\hat{D}B$ y $C\hat{B}D$.

En particular resulta $A\hat{B}D =_c C\hat{D}B$. Pero estos ángulos son alternos internos entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$, cortados por la transversal $\overleftrightarrow{BD}$. Como los ángulos son congruentes, resulta $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{DC}$.

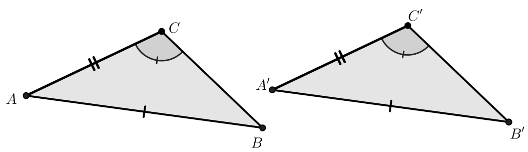
También tenemos $A\hat{D}B =_c C\hat{B}D$, y estos ángulos son alternos internos congruentes entre las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{BD}$. Luego $\overleftrightarrow{AD} \,||\, \overleftrightarrow{BC}$ y por lo tanto $ABCD$ es un paralelogramo.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $ABCD$ es un paralelogramo con $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD} \,||\, \overleftrightarrow{BC}$.

Si trazamos la diagonal $\overline{BD}$, tenemos que los ángulos $A\hat{B}D$ y $C\hat{D}B$ resultan congruentes por ser alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{DC}$ cortadas por $\overleftrightarrow{BD}$. De la misma manera, los ángulos $A\hat{D}B$ y $C\hat{B}D$ son congruentes (¿por qué?).

Comparando los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{CDB}$ resultan $A\hat{B}D = C\hat{D}B$, $A\hat{D}B = C\hat{B}D$ y $\overline{BD}$ es un lado común. Luego ambos triángulos son congruentes, con la correspondencia dada por $s(A) = C$, $s(B) = D$ y $s(D) = B$. Como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son pares de lados homólogos, resultan congruentes como queríamos probar.

Observemos que hemos probado además que $\hat{A} = \hat{C}$ y $\hat{B} = \hat{D}$. O sea, en todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.



Teorema 4. **Criterio LLA** *Si dos triángulos tienen dos pares de lados homólogos congruentes, y los ángulos opuestos al mayor de los lados son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.*
En el dibujo: $AB > AC$,

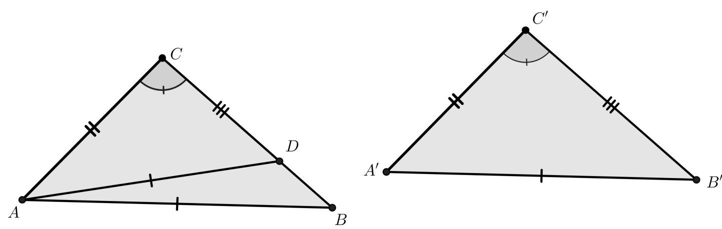
$$AB = A'B',\ AC = A'C' \ \text{ y } \ \hat{C} = \hat{C'} \ \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} =_c A'\overset{\triangle}{B'}C' \ .$$

Demostración:

Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ dos triángulos tales que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AB > AC$ y $\hat{C} = \hat{C}'$.

Para probar la congruencia de los triángulos, bastará mostrar que $BC = B'C'$. El teorema entonces sigue del criterio LAL o del criterio LLL.

Para ello razonaremos por el absurdo. Supongamos que fuese $BC \neq B'C'$, entonces $BC > B'C'$ o $BC < B'C'$. Supongamos primero que $BC > B'C'$, Podemos entonces encontrar un punto $D \in BC$ tal que $CD = C'B'$, como en la figura



Los triángulos $\overset{\triangle}{ADC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ resultan congruentes pues $AC = A'C'$ y $\hat{C} = \hat{C'}$ por hipótesis, y $CD = C'B'$ por construcción.

Luego $AD = A'B'$. Pero $A'B' = AB$ por hipótesis, de donde resulta que $\overset{\triangle}{ADB}$ es un triángulo isósceles. Por el Pons Asinorum, resulta $\hat{B} = B\hat{D}A$. Pero por ser un ángulo exterior a $A\hat{D}C$ resulta $B\hat{D}A = \hat{C} + D\hat{A}C > \hat{C}$. O sea que $\hat{B} > \hat{C}$ lo que es absurdo, pues $AB > AC$ y a mayor lado debe oponerse mayor ángulo. $\square$

En esta sección hemos presentado varias aplicaciones de los criterios de congruencia de triángulos. Muchas de ellas han servido para estudiar propiedades importantes de los cuadriláteros. Proponemos como ejercicio que prueben algunas más. Estas propiedades deben recordarse ya que pueden ser útiles para resolver muchos problemas. Los ejercicios que presentan propiedades teóricas importantes estarán marcados con un asterisco (*).

En las distintas secciones que componen esta unidad estudiaremos muchas otras aplicaciones de estos criterios.

Finalizamos esta sección introduciendo el concepto de congruencia de polígonos.

Definiciones:

Sean $A_1A_2\cdots A_n$ y $A'_1A'_2\cdots A'_n$ dos polígonos de n lados y sea

$$s : \{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \to \{A'_1, A'_2, \cdots, A'_n\}$$

una aplicación que a cada vértice del primer polígono le hace corresponder un único vértice del segundo, de modo que a vértices distintos de uno le corresponden vértices distintos del otro. Entonces los pares de lados

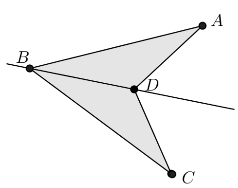
$$\overline{A_iA_{i+1}}\text{y } \overline{s(A_i)s(A_{i+1})},\ i=1,\cdots,n-1,\ \text{y } \overline{A_nA_1} \text{ y } \overline{s(A_1)s(A_n)}$$

se denominan **pares de lados homólogos** para la correspondencia s. Los ángulos $\hat{A}_i$ y $s(\hat{A}_i)$, $i=1,\cdots,n$ se denominan **pares de ángulos homólogos** para la correspondencia s.

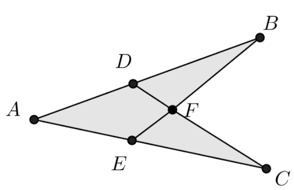
Decimos que los polígonos son **congruentes** si existe una correspondencia entre sus vértices de modo que los pares de lados homólogos y los pares de ángulos homólogos son congruentes entre sí.

En los ejercicios analizaremos si existen criterios de congruencia de polígonos.

2.1. Ejercicios propuestos

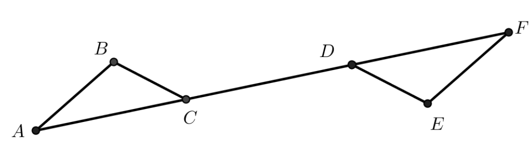
1. 

   En la figura, $\overleftrightarrow{BD}$ es la bisectriz de $A\hat{B}C$ y $A\hat{D}C$.
   Demostrar que $B\overset{\triangle}{A}D =_c B\overset{\triangle}{C}D$.

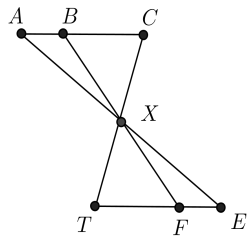
2. 

   En la figura $AB = AC$, D es el punto medio de $\overline{AB}$, E es el punto medio de $\overline{AC}$, $D,\ F,\ C$ y $E,\ F,\ B$ son puntos alineados.
   Demostrar que $A\overset{\triangle}{B}E =_c A\overset{\triangle}{C}D$ y $D\overset{\triangle}{B}F =_c E\overset{\triangle}{F}C$.

3. En la siguiente figura, $AD = CF$, $\hat{A} = \hat{F}$, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$ y $A, C\ D$ y F están alineados. Demostrar que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ y que $AB = EF$.



4.



En la figura, $B \in \overline{AC}$, $\{X\} = \overline{AE} \cap \overline{BF} \cap \overline{CT}$, $F \in \overline{TE}$ y

- $\hat{C} = C\hat{B}X$,
- $BX = TX = FX$

Probar que $AC = TE$.

5. En un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se tiene $AB = BC$. Sea X un punto en el semiplano que define $\overleftrightarrow{AB}$ que no contiene a C, tal que $\overset{\triangle}{ABX}$ es equilátero. Sea M un punto en el semiplano que define $\overleftrightarrow{BC}$ que no contiene al punto A y tal que $\overset{\triangle}{BMC}$ es equilátero. Demostrar que $AM = CX$.

6. * Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $ABCD$ es un paralelogramo, es decir, tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

   b) Los lados opuestos de $ABCD$ son congruentes.

   c) Los ángulos opuestos de $ABCD$ son congruentes.

   d) Un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.

   e) Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan, es decir, se intersecan en su punto medio.

7. * Demostrar que un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo.

8. * Demostrar que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales son congruentes.

9. * Demostrar que un cuadrilátero es un romboide si y sólo si sus diagonales se cortan perpendicularmente en el punto medio de una de ellas.

10. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

    a) Dos cuadrados con un lado en común son congruentes.

    b) Dos rectángulos con un lado en común son congruentes.

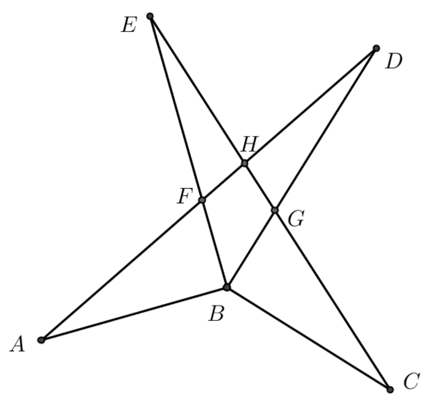
    c) Si dos rectángulos tienen un lado y una de las diagonales respectivamente congruentes entonces son congruentes.

    d) Si dos rombos tienen un par de lados homólogos congruentes entonces son congruentes.

    e) Si dos paralelogramos tienen sus cuatro pares de lados homólogos congruentes, entonces son congruentes.

11. Sean $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los cuadrados de un plano, $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los rectángulos, $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los rombos y $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los paralelogramos del plano. Graficar todos los conjuntos utilizando diagramas de Venn donde se evidencien las distintas relaciones de contención e intersección entre ellos.

12. Demostrar que la congruencia de polígonos define una relación de equivalencia. Esto es:
    - es *reflexiva*: todo polígono es congruente a sí mismo;
    - es *simétrica*: si un polígono P es congruente a un polígono P', entonces P' es congruente con P.
    - es *transitiva*: si un polígono P es congruente a un polígono P', y P' es congruente a P'', entonces P es congruente a P''.
13. En la siguiente figura, $\{H\} = \overline{EC} \cap \overline{AD}$, $\{F\} = \overline{EB} \cap \overline{AD}$, $\{G\} = \overline{BD} \cap \overline{EC}$, $\overline{EB} \perp \overline{AB}$, $\overline{DB} \perp \overline{BC}$, $\hat{E} = \hat{D}$, $AB = BC$.



    a) Probar que $\hat{A} = \hat{C}$ y $AD = CE$.
    b) Probar que $BGHF$ es un romboide.
14. Probar que las bisectrices de dos ángulos interiores y consecutivos de un paralelogramos son perpendiculares.
15. Demostrar que un cuadrilátero es un rombo si y sólo si las diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio.

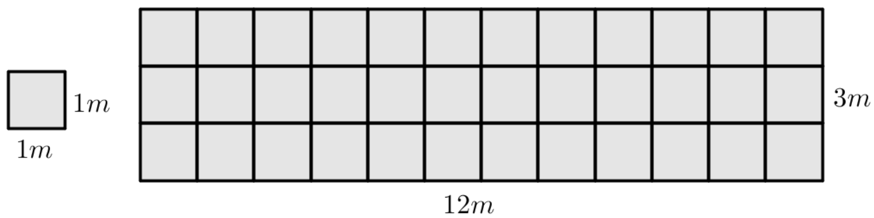
---

3. Área de figuras planas

En esta sección determinaremos qué entendemos por el área de una figura plana. Esta es una forma de medir, y la definiremos de manera similar a como ya hemos hecho con la longitud y la medida angular. Repasaremos por lo tanto cuáles son las propiedades que la caracterizan en situaciones reales concretas y veremos cómo podemos modelizarlas para crear nuestra teoría matemática.

Supongamos que queremos pintar un paredón de $12m$ de largo por $3m$ de alto. Necesitamos saber cuántos litros de pintura debemos comprar, para que no sobre demasiado pero que tampoco falte. Una forma de hacerlo sería comprar una lata, ver hasta cuánto nos dura, cuando se termina comprar otra y así sucesivamente hasta terminar la pared. Sin embargo, nos interesa mantener un registro más preciso que nos permita preveer la cantidad de pintura a utilizar no sólo en este caso, si no cada vez que debamos pintar otra pared.

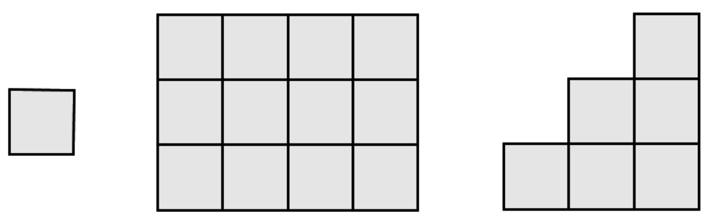
Una forma posible de proceder es la siguiente. Pintamos un cuadrado de un metro de largo por un metro de alto en la pared, y vemos cuántos litros de pintura necesitamos para esto. Supongamos que hacen falta $0,2$ litros de pintura para pintar este cuadrado. Ahora cubrimos la pared con cuadrados congruentes a éste de modo de no dejar espacios descubiertos pero que dos de estos cuadrados coincidan en a lo sumo un lado, o sea, los colocamos sin superponerlos. Llegaremos a la conclusión que necesitamos 36 cuadrados para cubrir la pared, y por lo tanto necesitaremos $7,2$ litros de pintura.



Si ahora debemos pintar una pared de $2m$ por $2m$, podremos cubrirla con 4 cuadrados de $1m$ por $1m$ y necesitaremos $0,8$ litros.

Se hace evidente que este cuadrado sirve para medir, de la misma manera que un segmento fijo nos servía como unidad para a partir de él determinar la longitud de cualquier otro segmento. Esta nueva forma de medir se denominará *área*.

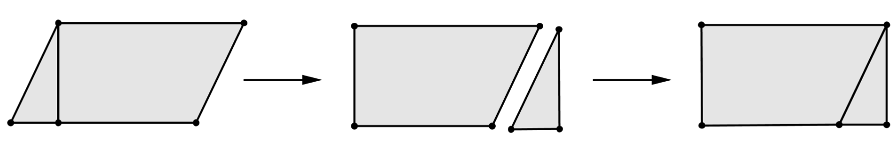
La medida del cuadrado que tomamos en el ejemplo es irrelevante, en realidad el cuadrado constituye una unidad en sí mismo. Por ejemplo, si conocemos un cuadrado como el de la figura, y decimos que él tiene un área de una unidad, ¿qué área tendrán las siguientes figuras?



También es claro que si partimos el rectángulo en dos triángulos congruentes, el área del cada triángulo será la mitad de la del rectángulo.

Básicamente, determinar el área de una figura plana consistirá en ver cuántas veces entra un cuadrado, que denominamos unidad, en la figura plana.

Antes de determinar el resultado que nos permita definir correctamente el área, observemos que debe cumplirse además un principio básico: si una figura se corta en un número cualquiera de piezas que se reacomodan en su totalidad, como un rompecabezas, para formar una nueva figura, el área de ésta es la misma que el área de la primera. Lo vemos en el siguiente ejemplo:



Comenzamos dando algunas definiciones.

Definiciones:

• Dada una figura plana F, decimos que una colección de polígonos $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ es una **subdivisión de** F si F es la unión de todos ellos, y dos cualesquira de ellos no tienen puntos interiores en común, es decir, si se intersecan, lo hacen en puntos de sus lados.

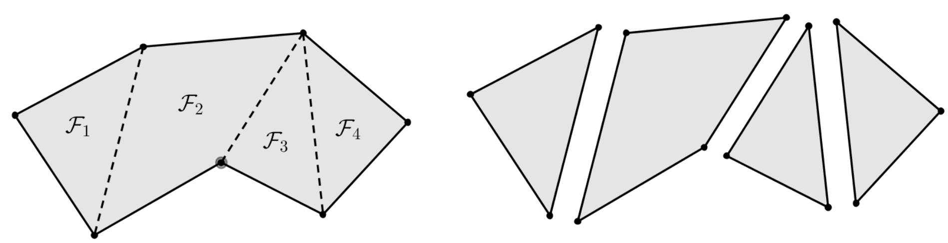
• Una figura plana se denomina **simple** si admite una subdivisión en polígonos.

El siguiente resultado garantiza que existe una función de área que cumple las propiedades que buscamos. Su demostración escapa los objetivos de este curso y por lo tanto no la haremos. El lector interesado puede consultarla en *Elementary geometry from an advanced standpoint*, Edwin E. Moise, Editorial Adisson-Wesley

Teorema 5. *Supongamos que tenemos dada una medida de longitud l en un plano. Existe una única función $\mathcal{A}$, que denominamos **área** que a cada figura plana $F \in \mathcal{F}$ le asigna un número real positivo que verifica:*

1. *Si C es un cuadrado de lado de longitud a, entonces $\mathcal{A}(C) = a^2$*
2. *Si F y F' son polígonos congruentes, entonces $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F')$.*
3. *Si $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ es una subdivisión de una figura plana F, entonces*

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F_1) + \mathcal{A}(F_2) + \cdots + \mathcal{A}(F_n).$$

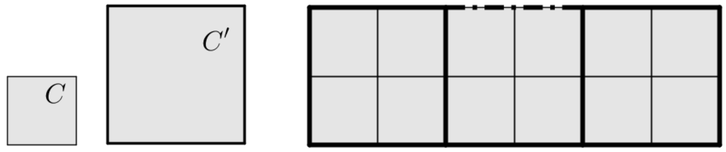


Subdivisión de $\mathcal{F}$ en los polígonos $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ y $\mathcal{F}_4$

Las dos últimas propiedades implican que si dos figuras planas admiten subdivisiones formadas por polígonos congruentes, entonces tienen igual área. Esta es la propiedad de "rearmar un rompecabezas" de modo que el área se conserva. En la figura del inicio de la página anterior, vemos por ejemplo que el área del paralelogramo inicial es igual al área del rectángulo final.

El cuadrado C cuyo lado tiene longitud igual a 1 se denomina **cuadrado unidad** o **unidad de área**.

Así, si tomamos el cuadrado C de la figura como unidad, el rectángulo que se muestra tiene un área de doce unidades, mientras que si tomamos el cuadrado C', el rectángulo tendrá un área de tres unidades. Obviamente estas funciones de áreas que tienen distintos cuadrados como unidad de área provienen de distintas funciones de longitud (cada una de ellas toma el lado del correspondiente cuadrado como segmento unidad).



Las unidades de área asociadas a las distintas unidades de longitud tienen nombres particulares. Por ejemplo si tomamos el metro como unidad de longitud, una unidad de área será un cuadrado de un metro de lado. Este cuadrado tiene obviamente área 1 para la función de área asociada al metro. Para hacer más evidente esta relación, decimos que el cuadrado tiene área de **un metro cuadrado**, que denotamos $1m^2$.

De la misma manera, si tomamos como unidad de área un cuadrado de un centímetro de lado, su área es 1, pero para evidenciar que la función de área que utilizamos está asociada al centímetro como unidad de longitud, decimos que es **un centímetro cuadrado**, y lo denotamos $1cm^2$. Podemos hacer lo mismo con cualquier unidad de longitud.

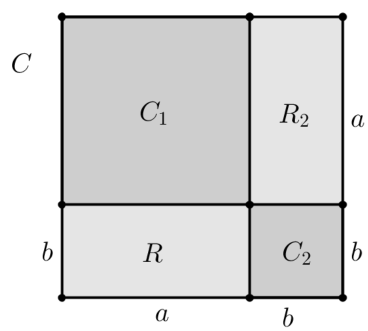
Calcularemos ahora el área de triángulos y cuadriláteros. No existe en general una fórmula para el área de un polígono o una figura plana arbitraria, pero utilizando el "principio del rompecabezas" podremos calcularla a partir de las anteriores.

De ahora en más supondremos que estamos trabajando con una unidad de longitud fija, y la unidad de área es la asociada a esta unidad de longitud, sin importar cuál sea esta. Comenzamos calculando el área del rectángulo:

Teorema 6. *El área de un rectángulo de lados de longitudes a y b es ab.*

Demostración:

Consideremos un ractángulo R de lados a y b, y construyamos un cuadrado C de lado $a+b$ como en la figura.



Si llamamos R_2 al otro rectángulo de lados b y a, C_1 al cuadrado de lado a y C_2 al cuadrado de lado b, tenemos que $\{R, R_2, C_1, C_2\}$ es una subdivisión de C, y por lo tanto

$$\mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(R) + \mathcal{A}(R_2) + \mathcal{A}(C_1) + \mathcal{A}(C_2). \tag{2}$$

Ahora bien, R y R_2 son rectángulos congruentes pues tienen lados de la misma longitud, y sus ángulos son trivialmente congruentes pues son todos rectos. Luego por el Teorema 5, resulta $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R_2)$. También por el Teorema 5, resultan $\mathcal{A}(C) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\mathcal{A}(C_1) = a^2$, $\mathcal{A}(C_2) = b^2$. Reemplazando en (2) tenemos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2\mathcal{A}(R) + a^2 + b^2 \ \Rightarrow \ \mathcal{A}(R) = ab$$

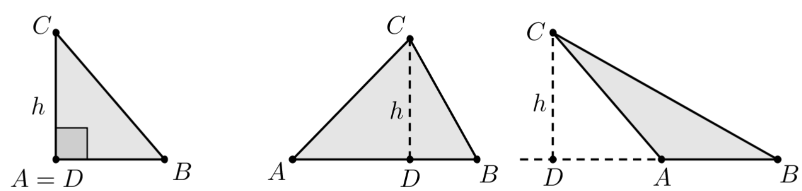
como queríamos probar. $\square$

Determinaremos ahora la fórmula para el área de un triángulo.

Definiciones:

• Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo. Trazamos la única recta perpendicular al lado $\overline{AB}$ que pasa por C. Esta recta corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto D, denominado **pie de la perpendicular**. Se denomina **altura** de $\overset{\triangle}{ABC}$ recpecto de la **base** $\overline{AB}$ al segmento $\overline{DC}$ y a su medida. A su medida generalmente se la denota por la letra h.

Si repetimos este procedimiento determinamos de manera análoga las alturas de $\overset{\triangle}{ABC}$ respecto de las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Por lo tanto todo triángulo tiene tres alturas.



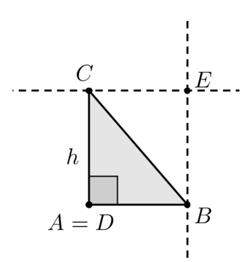
Teorema 7. *El área de un triángulo es la mitad del producto de la medida de cualquiera de sus bases por la altura correspondiente. Solemos escribir:*

$$\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{bh}{2}$$

Demostración:

Tomaremos como base el lado $\overline{AB}$. Debemos analizar tres casos como se muestra en la figura anterior: que el pie D de la perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ por C coincida con A, que esté entre A y B, o que no pertenezca a $\overline{AB}$.

En el primer caso, $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo rectángulo, pues como $D = A$ resulta $\overline{AC} \perp \overline{AB}$. Trazamos por C una paralela a $\overline{AB}$ y por B una paralela a $\overline{AC}$ que se cortan en un punto E. Entonces no es difícil ver que el cuadrilátero $ABEC$ determinado es un rectángulo (¡probarlo!).



Si comparamos los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{CEB}$, ambos triángulos tienen, por construcción, lados de la misma longitud. Por el criterio LLL resultan congruentes, y por el Teorema 5 tendrán entonces la misma área.

Por otro lado, $\{\overset{\triangle}{ABC}, \overset{\triangle}{CEB}\}$ es una subdivisión del rectángulo $ABEC$. Por lo tanto resulta:

$$AB \cdot AC = \mathcal{A}(ABEC) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{CEB}) = 2\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}AB \cdot AC.$$

Analicemos ahora el caso en que D está entre A y B. En este caso, $\overset{\triangle}{ADC}$ y $\overset{\triangle}{BDC}$ son triángulos rectángulos en D y por lo tanto $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ADC}) = \frac{1}{2}AD \cdot h$ y $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{1}{2}DB \cdot h$. Además $\{\overset{\triangle}{ADC},\ \overset{\triangle}{BDC}\}$ es una subdivisión de $\overset{\triangle}{ABC}$ y por lo tanto

$$\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ADC}) + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{1}{2}AD \cdot h + \frac{1}{2}DB \cdot h = \frac{1}{2}(AD + DB) \cdot h = \frac{AB \cdot h}{2}$$

Analicemos finalmente el caso en que $D \notin \overline{AB}$. Si consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{BDC}$, tenemos que $\{\overset{\triangle}{ADC},\ \overset{\triangle}{ABC}\}$ es una subdivisión de $\overset{\triangle}{BDC}$ y por lo tanto

$$\frac{1}{2}DB \cdot h = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{BDC}) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ADC}) + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}DA \cdot h + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC})$$

de donde obtenemos que

$$\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}DB \cdot h - \frac{1}{2}DA \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot h$$

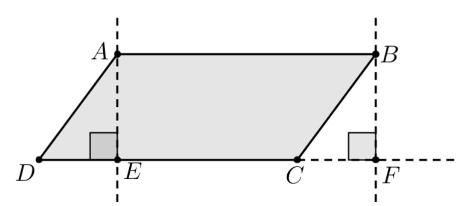
como queríamos probar. □

Definiciones:

• Dado un paralelogramo, se denomina **altura** del paralelogramo respecto de uno de sus lados, a la medida de la altura del triángulo cuyos vértices son los vértices del lado dado y uno de los vértices del lado opuesto. Cada uno de los lados se denomina también una **base** del paralelogramo.

Siguiendo la definición anterior, fijada una base del paralelogramo, a esta base le corresponden dos alturas, dependiendo de cuál de los vértices del lado opuesto consideremos. Para que la definición tenga sentido, debemos probar que ambas alturas son congruentes.

Sea $ABCD$ un paralelogramo, consideremos la base $\overline{DC}$ y sean E y F los pies de las perpendiculares a $\overleftrightarrow{DC}$ por A y B respectivamente.



Observemos que al ser $\overleftrightarrow{DC}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ resultan $\overline{AB} \perp \overline{AE}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BF}$. Por lo tanto esl cuadrilátero $EFBA$ es un rectángulo, de donde $AE = BF$.

Teorema 8. *El área de un paralelogramo es el producto de la medida de una base por la altura correspondiente.*

Demostración:

Consideremos un paralelogramos $ABCD$ y sea E el pie de la perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$ por A.

Tracemos la diagonal $\overline{AC}$ de $ABCD$. Entonces por el criterio LLL los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{CDA}$ resultan congruentes, y por lo tanto tienen el mismo área. Además el conjunto formado por ellos dos constituye una subdivisión del paralelogramo. Pero la altura AE del paralelogramo es también altura del triángulo $\overset{\triangle}{CDA}$ y por lo tanto

$$\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(\overset{\triangle}{CDA}) = 2 \cdot \frac{CD \cdot AE}{2} = CD \cdot AE$$

como queríamos probar. □

Definiciones:

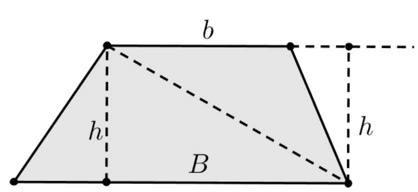
• Dado un trapecio, los lados paralelos se denominan **bases** del trapecio. La base de mayor longitud se denomina **base mayor** y su longitud se denota B y la de menor longitud **base menor** y su longitud se denota como b.

• Se denomina **altura** del trapecio respecto de una de sus bases, a la medida de la altura del triángulo cuyos vértices son los vértices de la base y uno de los vértices de la base opuesta.

Dejamos como ejercicio la prueba de los siguiente teoremas, con las figuras como guía:

Teorema 9. *El área de un trapecio T de bases B y b y altura h es*

$$\mathcal{A}(T) = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

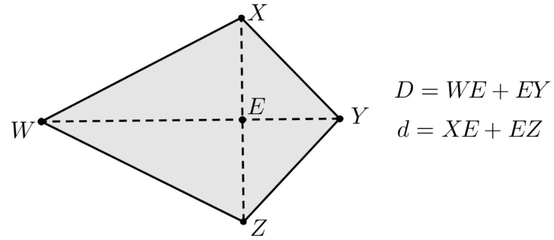


Definiciones:

• Dado un rombo o un romboide, la diagonal de mayor longitud se denomina **diagonal mayor** y su longitud se denota D. La diagonal de menor longitud se denota **diagonal menor** y su longitud se denota d.

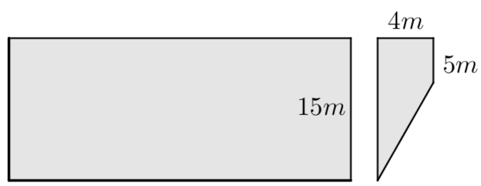
Teorema 10. *El área de un rombo o un romboide R de diagonales D y d es*

$$\mathcal{A}(R) = \frac{D \cdot d}{2}$$



Problemas resueltos

1. *Una pileta tiene un área total de $340m^2$ y está formada por un rectángulo para los adultos y un trapecio para los niños como en la figura. ¿Cuál es el área de cada zona de la pileta? ¿Cuál es la longitud de la pileta para adultos?*



Denotemos por A la pileta para adultos y por N la pileta para niños. N es un trapecio de base mayor de longitud $15m$, base menor de $5m$ y altura $4m$. Por lo tanto

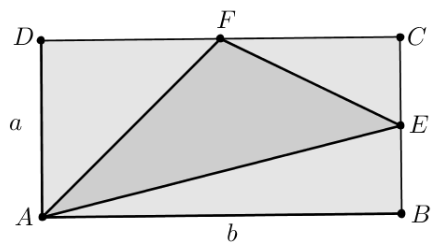
$$\mathcal{A}(N) = \frac{(15+5)\cdot 4}{2} m^2 = 40m^2.$$

Por otra parte, si denotamos por P a la pileta completa, tenemos $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(N)$, de donde $340m^2 - 40m^2 = \mathcal{A}(A)$.

Luego el área del sector para adultos es de $300m^2$ y el del sector para niños es de $40m^2$.

Responderemos ahora a la segunda pregunta. Denotemos por l la longitud del lado de la pileta para adultos. Entonces $\mathcal{A}(A) = l \cdot 15 = 300$, de donde $l = 20m$.

2. *Sea $ABCD$ un rectángulo de área $8cm^2$. Sean E y F los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. ¿Cuál es el área de $\overset{\triangle}{AEF}$?*



Supongamos que los lados del rectángulo miden $AD = a$ y $AB = b$. Entonces $ab = \mathcal{A}(ABCD) = 8$. Por otra parte,

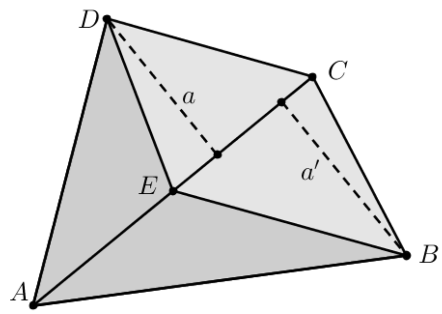
$$\mathcal{A}(\overset{\triangle}{AEF}) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(\overset{\triangle}{FCE}) - \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABE}) - \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ADF}).$$

Por otra parte, $EB = \frac{a}{2}$, $FC = FD = \frac{b}{2}$. Luego $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ECF}) = \frac{\frac{a}{2}\frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{8}$, $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABE}) = \frac{\frac{a}{2}b}{2} = \frac{ab}{4}$ y $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ADF}) = \frac{a\frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{4}$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{A}(\overset{\triangle}{AEF}) = ab - \frac{ab}{8} - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} = \frac{3}{8}ab = \frac{3}{8}8 = 3.$$

3. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de área $10cm^2$ y sea E el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$. Calcular el área de $ABED$.*



Observemos que el área del cuadrilátero $ABCD$ se obtiene como la suma de las áreas de los triángulos $\overset{\triangle}{ACD}$ y $\overset{\triangle}{ACB}$. Denotemos por a y a' las alturas respectivas de estos triángulos respecto del lado común $\overline{AC}$. Tenemos entonces:

$$10 = \mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ACD}) + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ACB}) = \frac{AC \cdot a}{2} + \frac{AC \cdot a'}{2} = \frac{AC \cdot (a + a')}{2}$$

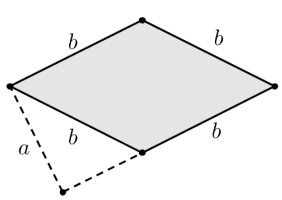
Por otra parte, $\mathcal{A}(ABED) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{AED}) + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{AEB})$. Observemos que estos dos triángulos tienen alturas a y a' respectivamente respecto del lado común $\overline{AE}$. Como además $AE = \frac{1}{2}AC$, se tiene:

$$\mathcal{A}(ABED) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{AED}) + \mathcal{A}(\overset{\triangle}{AEB}) = \frac{AE \cdot a}{2} + \frac{AE \cdot a'}{2} = \frac{AE \cdot (a + a')}{2} = \frac{1}{2}\frac{AC \cdot (a + a')}{2} = 5$$

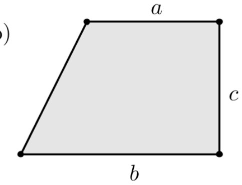
3.1. Ejercicios propuestos

1. Calcular en cada caso el área de la figura sombreada expresándola en cm^2, en dm^2 y en m^2, si $a = 8cm$, $b = 1dm$ y $c = 0,05m$.

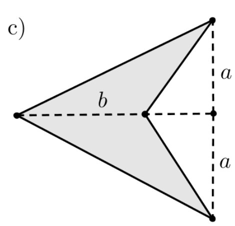
a)



b)



c)



2. Una hectárea es el área de un cuadrado de $100m$ de lado, y de denota $1ha$. En un campo rectangular de $250ha$ está atravesado diagonalmente por un río. De un lado del río, se siembra $2/5$ del terreno con maíz. Del otro margen del río, se siembra una tercera parte del terreno con girasol. El resto se detina al pastoreo.

   a) ¿Cuántas hectáreas se destinan al pastoreo?

   b) Si se cosechan $335040kg$ de maíz, ¿Cuál es el rendimiento promedio por hectárea?

3. Para embaldosar un patio rectangular de $12m$ por $6m$ con baldosas cuadradas pueden utilizarse baldosas de $30cm$ de lado a $\$15$ el metro cuadrado, o baldosas de $35cm$ de lado a $\$14,50$ el metro cuadrado. ¿Cuál de las dos opciones es más barata?

4. Sean r y s dos rectas paralelas distintas. Sean A y B dos puntos distintos sobre r y C y D dos puntos distintos sobre s. Demostrar que $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC}) = \mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABD})$.

5. Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo escaleno de área 7. Se construye el triángulo $\overset{\triangle}{XYZ}$ de la siguiente manera: X es el punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ tal que $AX = 2AB$; Y es el punto de la semirrecta $\overrightarrow{BC}$ tal que $BY = 3BC$; Z es el punto en la semirrecta $\overrightarrow{CA}$ tal que $CZ = 4CA$. Hallar el rea del tringulo $\overset{\triangle}{XYZ}$.

6. Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, sea D el punto medio del lado $\overline{AB}$. Determinar el área de $\overset{\triangle}{ADC}$ en función de $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABC})$.

7. Demostrar que las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes entre sí.

8. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea P un punto cualquiera del lado $\overline{CD}$. Probar que $\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ABP}) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)$.

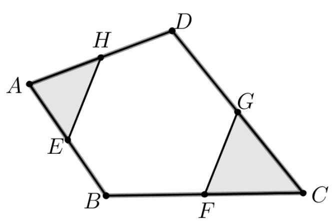
9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de área $10cm^2$. Sean E y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcular el área de $EBFD$.

10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero de área $20cm^2$. Determinar el área sombreada en la figura correspondiente si:

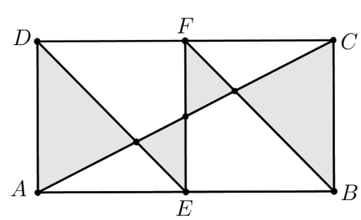
    a) $ABCD$ es convexo, E, F, G y H son los puntos medios de los lados.

    b) $ABCD$ es un rectángulo y E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

a)



b)



11. Demostrar las fórmulas para calcular el área de un trapecio y de un romboide.

12. En el plano hay dibujado un rectángulo y tres hormigas están paradas en tres de sus vértices (una en cada vértice). Las hormigas se mueven por turnos. En cada turno, una hormiga se mueve por el plano y las otras dos se quedan quietas. La hormiga que se mueve camina siguiendo la línea recta que es paralela a la línea determinada por las dos hormigas que están quietas en ese turno. Es posible que, después de algunos turnos, las tres hormigas se encuentren ubicadas en los puntos medios de tres lados del rectángulo?

    Aclaración: La distancia que recorre una hormiga en cada turno puede ser variable.

---

4. El Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras constituye uno de los resultados más famosos de la matemática. Coloquialmente, establece que "en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos". Es además el teorema del que más demostraciones se han publicado (en el libro *Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, aparecen 377 demostraciones).

A pesar de que el resultado se atribuye a Pitágoras de Samos, era ya conocido anteriormente al menos por los egipcios que lo utilizaban constantemente para realizar mediciones. Es un ejemplo perfecto del salto cualitativo que realizaron los griegos en matemática: comienzan a demostrarse rigurosamente resultados que hasta el momento se conocían empíricamente. Pitágoras de Samos fue un matemático que fundó una escuela mística en Crotona, actualmente en el sur de Italia. Se cree que estudió con Thales de Mileto y viajó por Egipto y Babilonia antes de fundar su hermandad. En general se habla de los pitagóricos, y los resultados que se atribuyen a Pitágoras deben atribuirse a los miembros de su grupo, fundado en 585 a.C. y que perduró hasta aproximadamente el 400 a.C.

Por los desarrollos de la lógica en tiempos de Pitágoras es poco probable que él mismo haya dado una demostración del teorema que lleva su nombre, aunque es probable que los pitagóricos lo demostraran hacia el final del período en que estuvo activa la escuela.

La importancia de los pitagóricos es que fueron los primeros en insistir que el mundo podía describirse perfectamente por medio de la matemática, y que las ideas matemáticas eran eso, ideas, y que sus realizaciones físicas no eran más que modelos de esas ideas (para los egipcios, por ejemplo, una recta no era más que una cuerda tendida).

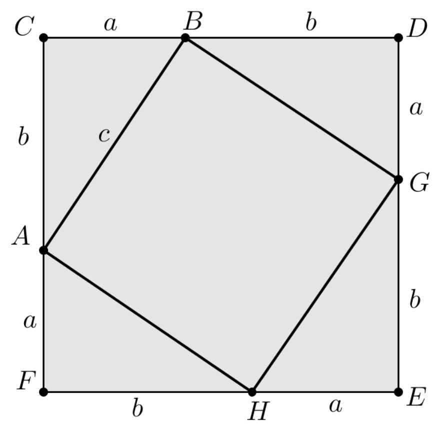
La historia de la hermandad pitagórica es de las más interesantes y misteriosas de la historia de la matemática, probablemente porque sabemos muy poco de ellos lo que da lugar a muchas especulaciones sobre el caracter místico de la misma. Para más detalles sobre este y otros temas recomendamos los libros *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días*, de Morris Kline, o *Historia de las matemáticas* de Ian Stewart. Una buena descripción de cómo funcionaba el ritual de la hermandad pitagórica aparece en la novela *El teorema del loro*, de Denis Guedj, y un recuento de la historia matemática relacionada con el teorema de Fermat, y que incluye una muy linda descripción de la visión numérica que los pitagóricos tenían del mundo, puede encontrarse en el libro *El último teorema de Fermat*, de Simon Singh.

Dedicaremos esta sección a dar una de las tantas demostraciones del Teorema de Pitágoras, utilizando el área de figuras planas como herramienta. Demostraremos además su recíproco, menos famoso pero igualmente útil.

Teorema 11. Teorema de Pitágoras. *En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

Demostración:

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo de catetos a y b e hipotenusa c. Construimos un cuadrado de lado $a+b$ de modo que el vértice del ángulo recto C de $\overset{\triangle}{ABC}$ sea uno de los vértices del cuadrado y los vértices A y B estén sobre los lados del cuadrado. Sean D, E y F los otros vértices del cuadrado tal que B está entre C y D y A está entre C y F, como se muestra en la siguiente figura.



Por construcción $CB = a$ y por lo tanto $BD = b$, y $CA = b$ y por lo tanto $AF = a$. Consideremos los puntos G y H tales que $G \in \overline{DE}$ y $DG = a$, $H \in \overline{FE}$ y $FH = b$. En consecuencia $GE = b$ y $HE = a$.

Comparando los triángulos , $\overset{\triangle}{ACB}$, $\overset{\triangle}{BDG}$, $\overset{\triangle}{GEH}$ y $\overset{\triangle}{HFA}$, todos resultan congruentes entre sí pues todos tienen un ángulo recto comprendido entre dos lados de medidas a y b (criterio LAL). Por lo tanto se tiene

$$AB = BG = GH = HA = c.$$

Además, el área de todos ellos es igual al área de $\overset{\triangle}{ACB}$ que a su vez es

$$\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ACB}) = \frac{ab}{2}.$$

Por otra parte, estos cuato triángulos junto con el cuadrilátero $ABGH$ constituyen una subdivisión de $CDEF$. Por lo tanto:

$$(a+b)^2 = \mathcal{A}(CDEF) = 4\mathcal{A}(\overset{\triangle}{ACB}) + \mathcal{A}(ABGH) = 2ab + \mathcal{A}(ABGH). \tag{3}$$

Demostraremos $ABGH$ que es un cuadrado. Observemos que $ABGH$ es un paralelogramo pues tiene los dos pares de lados opuestos congruentes. Nos bastará probar que tiene al menos un ángulo recto (¿por qué?).

Observemos que $C\hat{A}B + C\hat{B}A = 1llano - \hat{C} = 1R$. Por otra parte $C\hat{B}A = H\hat{A}F$ y $C\hat{A}B + B\hat{A}H + H\hat{A}F = 1llano$, de donde

$$B\hat{A}H = 1llano - (C\hat{A}B + H\hat{A}F) = 1R.$$

Concluimos que $ABGH$ es un cuadrado y por lo tanto $\mathcal{A}(ABGH) = c^2$. Reemplazando en (3) resulta

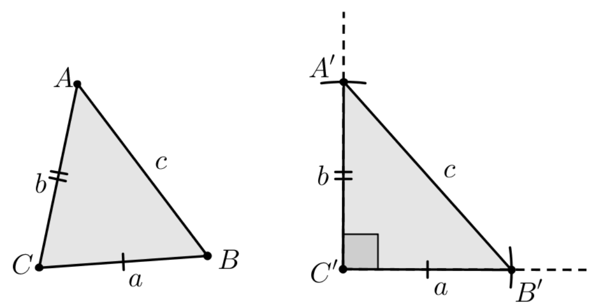
$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

de donde obtenemos $a^2 + b^2 = c^2$ como queríamos probar. $\square$

Teorema 12. **Recíproco del Teorema de Pitágoras.** *Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un tiángulo de lados a, b y c tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Entonces $\overset{\triangle}{ABC}$ es rectángulo en $\hat{C}$.*

Demostración:

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo de lados a, b y c con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Construyamos un triángulo $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ rectángulo en $\hat{C}'$ tal que $C'A' = b$ y $C'B' = a$. Si aplicamos el Teorema de Pitágoras a $A'\overset{\triangle}{B'}C'$, resulta $A'B' = \sqrt{C'A'^2 + C'B'^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$.



Aplicando el criterio LLL, $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ resultan congruentes y por lo tanto $\overset{\triangle}{ABC}$ es rectángulo en $\hat{C}$. $\square$

4.1. Ejercicios propuestos

1. Determinar si los números a, b y c dados en cada caso pueden o no ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

    a) $a = 50cm$, $b = 30cm$, $c = 40cm$;

    b) $a = 9cm$, $b = 10cm$, $c = 5cm$;

    c) $a = 15cm$, $b = 9cm$, $c = 12cm$;

    d) $a = 13cm$, $b = 6cm$, $c = 11cm$.

2. Una industria construye bastidores para colocar telas para pintura de $80cm$ por $60cm$. Para reforzarlos se utlizan dos barillas de pino que se colocan en las diagonales. Las barillas se obtienen cortando tirantes de pino que miden $2,10m$ de largo. ¿De cada tirante pueden obtenerse refuerzos para cuántos bastidores?

3. Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo isósceles con $AB = BC$.

    a) Demostrar que el pie de la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ es el punto medio de $\overline{AC}$.

    b) Calcular el área de $\overset{\triangle}{ABC}$ si $AC = 22cm$ y $BC = 13$.

4. Un trapecio en el cual los lados no paralelos son congruentes se denomina **trapecio isósceles**. Calcular el área de un trapecio isósceles si sus lados paralelos miden $5cm$ y $11cm$, y los lados congruentes no paralelos miden $4cm$.

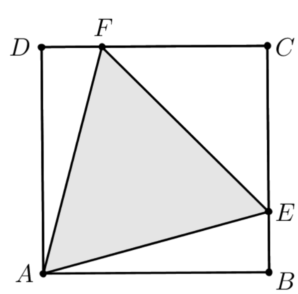
5. Un trapecio isósceles tiene $63cm$ de perímetro, los lados no parelelos miden $12cm$ y la base mayor es igual al doble de la base menor. Determinar su área.

6. Determinar la longitud de la altura de un triángulo equilátero de lado 2.

7. Determinar una fórmula para calcular el área de un triángulo equilátero de lado l.

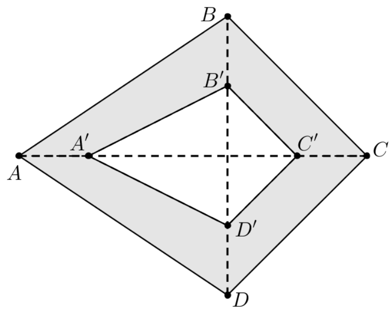
8. Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro, y la diagonal del cuadrado mide 1. Calcular el área del triángulo.

9. En un cuadrado $ABCD$ de lado 1 se inscribe un triángulo equilátero $\overset{\triangle}{AEF}$. Determinar su área.

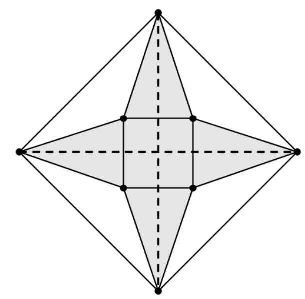


10. Ambos cuadriláteros de la figura son romboides y $d(A,A') = d(B,B') = d(C,C') = d(D,D') = 5cm$. $ABCD$ tiene diagonales de $25cm$ y $45cm$. Calcular el área de la figura sombreada.

11. En la siguiente figura ambos cuadriláteros son cuadrados y todos los triángulos son isósceles. Determinar el área de la figura sombreada si el cuadrado mayor tiene diagonales de $55dm$ y el perímetro del cuadrado del centro es $4m$.



Ejercicio 10


Ejercicio 11

12. En un cuadrado se traza una perpendicular a uno de los lados que pase por el punto de intersección de las diagonales. La longitud del segmento que va desde este punto al pie de la perpendicular trazada es de $7cm$. Determinar el área del cuadrado.
