Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

GEOMETRÍA I

Licenciatura en Matemática - Profesorado en Matemática - Año 2016

Equipo docente:
Francisco Vittone - Justina Gianatti - Martín Alegre

Unidad 1: Puntos, rectas, planos y figuras planas elementales.

---

1. Introducción.

En esta materia estudiaremos la geometría del plano y del espacio. La geometría nos proporciona las herramientas ideales para modelizar matemáticamente el espacio físico que nos rodea. Cuando queremos construir una casa, su plano está constituido de segmentos que forman polígonos, y sus medidas nos permiten obtener informaciones importantes como su perímetro o su área. Las fórmulas geométricas nos permiten calcular el área de los campos cultivables, la distancia entre ciudades, el volumen de líquido que contiene un determinado recipiente, etc.

La geometría que nosotros estudiaremos es, como toda la matemática, una modelización ideal de lo que vemos en la realidad física. Nos ocuparemos de ir aclarando este punto a medida que avancemos. Comenzaremos recordando los conceptos más básicos y fundamentales que ocuparán nuestro estudio: **puntos, rectas y planos**.

Antes de intentar dar una definición rigurosa de estos conceptos, apelaremos a los conocimientos del alumno para resolver algunas cuestiones.

1. Imaginen un punto A.

   a) Si el punto A está en un plano, ¿cuántas rectas del plano existen que pasen por A?

   b) Si el punto A está en el espacio, ¿cuántas rectas del espacio pasan por el punto A?

   c) ¿Cuántos planos en el espacio pasan por A?

2. Supongamos que ahora tenemos dos puntos A y B.

   a) Si A y B están en un plano, ¿cuántas rectas del plano existen que pasen por A y B?

   b) Si A y B están en el espacio, ¿cuántas rectas del espacio pasan por A y por B?

   c) ¿Cuántos planos en el espacio pasan por A y por B?

3. Dados tres puntos A, B y C, ¿qué puede decirse de las rectas y planos en el espacio que pasan por A, B y C?

Volcamos los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

	rectas en el plano	rectas en el espacio	planos en el espacio
un punto			
dos puntos			
tres puntos			

Del estudio anterior deducimos que:

- *Dos puntos determinan una única recta a la que pertenecen*.
- *Tres puntos no alineados determinan un único plano al que pertenecen*.

Hemos visto cómo se determinan rectas y planos en el espacio y hemos trabajado con ellos intuitivamente. Ha llegado el momento de plantearnos la siguiente pregunta:

¿Qué es un punto? ¿Qué es una recta? ¿Qué es un plano?

¡Intenten dar una respuesta adecuada!

2. Puntos, rectas y planos: Axiomas de incidencia

Al final de la primera sección planteamos el problema de definir correctamente qué entendemos por un punto, una recta, un plano, y hasta el mismo espacio. Antes que nada, debemos aclarar qué entendemos por una definición en matemática.

Dar una **definición** de un objeto matemático consiste en indicar todas las características que permiten identificarlo de manera única en el contexto en el que estamos trabajando.

Comencemos intentando dar una definición de recta. Obviamente debemos acudir a la idea mental que todos tenemos de una recta. Por empezar debemos decir que una recta es un conjunto de puntos. Esta definición es sin dudas insatisfactoria: un triángulo y un plano son también conjuntos de puntos. Podemos entonces mejorar nuestra definición y decir que una recta es un conjunto de puntos *alineados*. Pero entonces, cualquiera podría preguntarnos qué quiere decir que una determinada cantidad de puntos estén alineados... Peor aún, con todo derecho se nos podría reprochar que aún no hemos definido qué es un punto. Acá la situación se vuelve más dificil. ¿Qué es un punto?. A esta altura podríamos recurrir al mismo origen de la geometría como la conocemos hoy y consultar el libro de los *Elementos* de Euclides.

Euclides fue un matemático griego que vivió en Alejandría alrededor del 300 a.C. Su mérito principal fue reunir en una única obra, conocida como los *Elementos*, todo el conocimiento matemático de su época. Obviamente la geometría plana y sus teoremas principales eran ya conocidos antes de Euclides. Por ejemplo, los Egipcios conocían el Teorema de Pitágoras y sabían calcular perímetros y áreas. El mismo Pitágoras es anterior a Euclides. La importancia de los Elementos radica en el hecho que es la primera obra matemática rigurosa donde estos resultados se recopilan y se demuestran siguiendo los métodos de la lógica válidos aún hoy (si bien se cree que las demostraciones allí presentadas no son obra original de Euclides). Los Elementos representaron *toda* la geometría hasta principios del siglo XIX y fue el libro de texto más usado durante más de 2000 años (es el segundo libro con más impresiones en el mundo, después de la Biblia).

Volviendo a nuestro problema de definir los objetos básicos con los cuales trabajaremos, consultaremos los Elementos para ver qué definición da Euclides de punto, recta y plano:

- Un punto es lo que no tiene partes.
- Una línea es una longitud sin anchuras.
- Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
- Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

Si asumimos un espíritu crítico, no podemos dejar de observar que para definir un punto, Euclides utiliza la palabra *partes*. No tenemos una definición matemática de algo que no tiene partes. Tampoco es claro matemáticamente qué quiere decir que una línea yace por igual respecto de todos sus puntos.

Podríamos intentar definir estos conceptos, pero entraríamos en una historia de nunca acabar. De hecho **no es posible dar una definición de punto, recta o plano**. Por más ilógico que nos parezca, ésto tiene una lógica irreprochable: para definir cualquier objeto debemos recurrir a conceptos que previamente deberíamos haber definido. Esto es claramente imposible, deben existir conceptos que estén en la base de todos los demás y que no sea necesario definir.

Es por eso que decimos que **punto, recta y plano son conceptos primitivos**, es decir, son objetos que postulamos que existen, que conocemos intuitivamente, podemos dar una representación gráfica de ellos, pero no podemos definirlos, al menos no de la forma en que estamos acostumbrados.

Estamos comenzando a construir una teoría axiomática. Para ello partimos de ciertos conceptos primitivos, que no podemos definir directamente, pero sí listando una serie de propiedades que deben cumplir, y que aceptamos sin cuestionamiento. Estas propiedades deben ser verdades evidentes, es decir, deben ser simples y adaptarse a la realidad que, en nuestro caso, intentamos modelizar. Estos postulados se denominan **axiomas**.

A partir de los conceptos primitivos y los axiomas podremos definir todos los otros objetos que formarán parte de nuestra teoría, como segmentos, semirrectas, semiplanos, triángulos, cuadriláteros, polígonos, etc., y demostrar sus propiedades, que denominamos **teoremas**.

Pensemos ahora cuáles son las propiedades más básicas que conocemos y que caracterizan la relación entre puntos rectas y planos. Las hemos deducido en la primera sección y ahora las postularemos como axiomas:

- **Axioma 1:** Existe un conjunto no vacío que denotamos por $\mathcal{E}$ y que denominamos **espacio**. Los elementos de este conjunto se denominan **puntos**. Existen además dos conjuntos no vacíos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{P}$ cuyos elementos se denominan **rectas** y **planos** respectivamente.

- **Axioma 2:** Una **recta** es un subconjunto propio del espacio que tiene al menos dos puntos.

  Es decir: toda recta es un conjunto de puntos, y dada una recta cualquiera del espacio, existen al menos dos puntos que pertenecen a ella y existe al menos un punto que no pertenece a ella.

- **Axioma 3:** Dados dos puntos distintos, existe una única recta a la cual pertenecen.

El Axioma 3 suele enunciarse como "dos puntos distintos del plano determinan una única recta a la cual pertenecen". Aquí el verbo *determinar* significa que si tenemos los dos puntos dados, sabemos exactamente cuál es la única recta a la cual ellos pertenecen, y cuya existencia garantiza el Axioma 3.

Cuando dos puntos pertenecen a una recta, decimos también que la recta *pasa* por esos puntos. A veces se dice que la recta *contiene* a los puntos, aunque esto puede generar confusión ya que un punto no es un subconjunto de la recta sino un elemento de ella.

Mantendremos las representaciones gráficas que conocemos para puntos y rectas. Usaremos una letra imprenta mayúscula para denotar un punto y una letra imprenta minúscula para denotar una recta. Si una recta está determinada por los puntos A y B, la denotaremos también por $\overleftrightarrow{AB}$.

A partir de los axiomas anteriores podemos dar algunas definiciones precisas de conceptos que ya conocemos.

Definiciones:

• Una cantidad arbitraria de puntos del espacio se dicen **alineados** si existe una recta a la cual todos ellos pertenecen. En caso contrario se dice que los puntos no están alineados.

• Un punto que no pertenece a una recta o a un plano se dice **exterior** a la recta o al plano según corresponda.

El Axioma 2 garantiza que dados dos puntos cualesquiera exista siempre un punto que no esté alineado con ellos.

Pasaremos ahora a los planos, ¿cuáles son las propiedades que los caracterizan?

- **Axioma 4:** Un **plano** es un subconjunto propio del espacio formado por al menos tres puntos no alineados.

  Es decir, dado un plano cualquiera, existen al menos tres puntos no alineados que pertenecen a él y existe al menos un punto del espacio que no pertenece al plano.

- **Axioma 5:** Dados tres puntos no alineados, existe un único plano al que pertenecen.

- **Axioma 6:** Si dos puntos pertenecen a un plano, la recta que determinan está completamente contenida en el plano.

Al igual que hicimos con las rectas, podemos reformular el Axioma 5 como "tres puntos no alineados del espacio determinan un único plano al cual pertenecen". Utilizaremos generalmente letras griegas (π, α, β, etc.) para denotar un plano.

En las secciones 1 y 2 hemos establecido otras propiedades de los puntos, rectas y planos que no aparecen en los axiomas. Por ejemplo, sabemos que dos rectas distintas que se intersecan lo hacen en exactamente un punto. Esto se debe a que este resultado puede obtenerse a partir de los axiomas que hemos formulado. De hecho, se trata de nuestro primer **teorema**.

Un teorema es una proposición que puede deducirse, siguiendo un procedimiento lógico riguroso, de los axiomas, las definiciones y las propiedades que fueron probadas anteriormente. Enunciaremos y demostraremos el primero:

Teorema 1. *Si dos rectas distintas se intersecan, lo hacen en un único punto.*

Antes de realizar la demostración destacaremos las "partes" que componen un Teorema. En primer lugar tenemos los *datos* que nos da el teorema, o sea, las bases sobre las cuales estamos trabajando. Estos datos se denominan **hipótesis**.

En nuestro caso, la hipótesis es que tenemos dos rectas en el espacio que se intersecan, o sea, tienen al menos un elemento, un punto, en común. Observemos que el hecho de tener dos rectas acarrea mucha información: podemos tomar como datos todos los axiomas que hemos enunciado hasta ahora.

La "segunda parte" del teorema es la propiedad que queremos probar. Ésta se denomina **tesis**. En nuestro caso, la tesis es que las dos rectas que verifican la hipótesis se cortan en exactamente un punto, o sea, no tienen otro punto en común además del que garantiza la hipótesis.

Es importante notar que en matemática se utilizan los términos hipótesis y tesis con un sentido distinto a como se los utiliza en otras ciencias.

Demostración: Sean r y s dos rectas distintas que se intersecan. Entonces existe al menos un punto P del espacio tal que $P \in r \cap s$.

Supongamos que existe otro punto Q, distinto de P, tal que $Q \in r \cap s$. Esto implica que los puntos P y Q están simultáneamente en las rectas r y s.

En particular, los puntos P y Q están en la recta r. Como por el axioma 3 dos puntos determinan una única recta, r es la única recta a la cual P y Q pertenecen simultáneamente. Es decir, $r = \overleftrightarrow{PQ}$.

Pero hemos dicho que P y Q también están simultáneamente en s. Luego nuevamente por el axioma 3, resulta $s = \overleftrightarrow{PQ}$.

Concluimos que $r = s$, lo cual no puede ocurrir pues contradice nuestra hipótesis de que $r \neq s$.

Luego no puede existir otro punto distinto de P en la intersección de r y s. Concluimos entonces que $r \cap s = \{P\}$, como queríamos probar. $\square$

El método usado en la demostración anterior se denomina *demostración por la contrarrecíproca*. Es decir, negando la tesis concluimos que debe negarse la hipótesis. Como la hipótsis es siempre válida, concluimos que nuestra tesis es correcta. Este método será mejor estudiado en Álgebra cuando se estudie la lógica matemática.

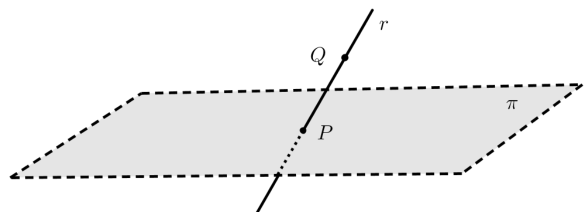
Un resultado similar al Teorema 1 puede probarse para la intersección de una recta y un plano en el espacio.

Teorema 2. *Si un plano y una recta que no está contenida en él se intersecan, lo hacen en un único punto.*

Demostración:

Comenzamos interpretando las hipótesis del teorema: tenemos una recta y un plano en el espacio que no la contiene, pero ambos se intersecan.

Llamemos r a la recta y π al plano. Las hipótesis nos dicen que existe al menos un punto común entre r y π, llamémoslo P. Como la recta r no está contenida en el plano π, deberá existir un punto $Q \neq P$ que verifique $Q \in r$ pero $Q \notin \pi$. Antes de seguir, realizaremos un dibujo que ilustre la situación.



La tesis del teorema es que r y π se intersecan en un único punto, este punto deberá ser por lo tanto P.

Supongamos que no sea así, o sea, que existe un punto $R \neq P$ tal que $R \in r \cap \pi$. En particular R es un punto de r, y por el Axioma 3, r es la recta determinada por P y Q. Pero, por el axioma 6, como P y R son puntos de π, la recta r debería estar completamente contenida en π, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $r \cap \pi = \{P\}$ como queríamos probar. $\square$.

Analizaremos ahora cómo se relacionan dos rectas en el espacio en términos de la intersección entre ellas. Este procedimiento se denomina determinar la *posición relativa de dos rectas*.

Es evidente que dados dos conjuntos cualesquiera, esos dos conjuntos se intersecan o no se intersecan (o sea, tienen intersección vacía), y estas dos posibilidades son mutuamente excluyentes.

Hemos visto que si dos rectas se intersecan, lo hacen en exactamente un punto.

¿Pero qué ocurre si no se cortan? En este caso, debemos distinguir dos situaciones particulares dependiendo si ambas rectas están contenidas en un plano o no. Comenzamos dando algunas definiciones.

Definiciones:

• Dos o más puntos que pertenecen a un mismo plano se denominan **puntos coplanares**. En caso contrario, se dicen no coplanares.

• Dos o más rectas contenidas en un mismo plano se denominan **rectas coplanares**

• Dos rectas que se intersecan en un punto se dice que se **cortan** en un punto. Si además son distintas, se dice que son **secantes**.

Observemos que dos puntos o tres puntos son siempre coplanares. Cuatro puntos pueden o no ser coplanares.

Respecto de dos rectas, pueden o no ser coplanares, pero siempre lo serán si las rectas se cortan.

Teorema 3. *Dos rectas secantes son siempre coplanares.*

Demostración:

La hipótesis del teorema es que tenemos dos rectas distintas r y s que son secantes, o sea, se cortan en un único punto P, por el Teorema 1.

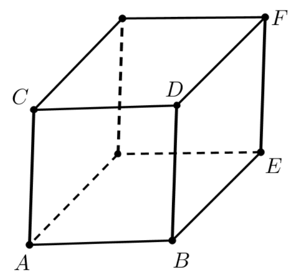
La tesis que debemos probar es que r y s están contenidas en un plano.

Por el axioma 2, existe un punto $Q \in r$ distinto de P. Y existirá además un punto $R \in s$ distinto de P. Observemos que $Q \neq R$, pues en ese caso $r \cap s = \{P, Q\}$ lo que no puede ocurrir.

Por el axioma 5, P, Q y R determinan un único plano al que pertenecen. Llamemos π a este plano.

Pero r es la recta determinada por P y Q, que pertenecen a π. Luego por el axioma 6, $r \subset \pi$. De la misma forma se prueba que $s \subset \pi$, lo que completa la demostración. $\square$

Tomemos ahora dos rectas no secantes. Estas rectas pueden ser coplanares o no serlo. Si observemos la siguiente figura, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ que contienen a las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del cubo no son secantes y son coplanares. Por otra parte, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ tampoco se intersecan, pero no son coplanares.



Las rectas de un plano que no se intersecan se denominan *paralelas*, pero debemos prestar atención porque como hemos visto existen rectas en el espacio que no se intersecan y no son paralelas en el sentido que usualmente lo entendemos. Es por eso que haremos la siguiente distinción:

Definiciones:

• Dos rectas se dicen **paralelas** si son coplanares y si se intersecan en todos sus puntos (o sea, son la misma recta) o su intersección es vacía. Si r y s son paralelas se denota $r \,||\, s$.

• Dos rectas que no son coplanares se denominan **alabeadas**.

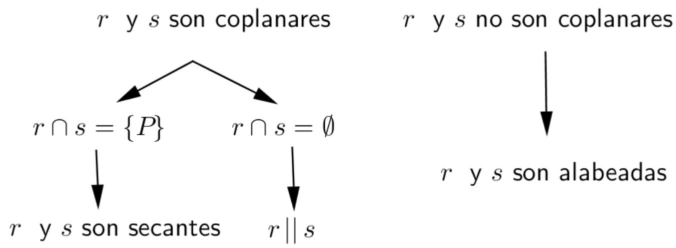
Observemos que dos rectas alabeadas automaticamente son no secantes, pues si lo fueran por el Teorema 3 deberían ser coplanares.

De la definición anterior obtenemos además las siguientes propiedades importantes.

- Toda recta es paralela a sí misma (se dice que el paralelismo es una relación reflexiva).
- Decir que r es paralela a s es lo mismo que decir que s es paralela a r. O sea, da lo mismo escribir $r \,||\, s$ que $s \,||\, r$. Esto significa que el paralelismo es una relación simétrica.
- Probaremos en los ejercicios que además el paralelismo de rectas verifica una propiedad que se denomina *transitiva*, que establece que

$$\text{si } r \,||\, s \text{ y } s \,||\, t \text{ entonces } r \,||\, t.$$

Resumiendo, dadas dos rectas distintas r y s en el espacio, tenemos las siguientes posibilidades:



Finalizaremos esta sección introduciendo uno de los enunciados más famosos y conflictivos de la historia de la matemática, el denominado **axioma de las paralelas**. Su gran utilidad se hará evidente más adelante.

- **Axioma 7** Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una recta paralela a la recta dada.

Una última observación: cualquiera podría objetar que el enunciado del Teorema 1 o del Teorema 2 es tan natural y evidente como cualquiera de los axiomas que enunciamos anteriormente. Pero entonces, ¿por qué son teoremas y no axiomas? La respuesta obvia en este caso es que estos resultados pueden demostrarse utilizando los axiomas anteriores y por lo tanto no es necesario postularlos como nuevos axiomas. Sin embargo podrían existir otros resultados igualmente evidentes que no sepamos demostrar, y por lo tanto no estaríamos aparentemente en condiciones de decidir si el resultado en cuestión es o no un axioma.

Este es el caso del axioma de las paralelas. Su enunciación (que no corresponde a la forma original de Euclides sino a una versión equivalente debida a Playfair del año 1795) no es del todo evidente como los axiomas anteriores. De hecho, en un sentido físico, para determinar si dos rectas dadas se intersecan o no, deberíamos recorrerlas en sus infinitos puntos, lo cual no es posible. Es decir, el axioma de las paralelas es una afirmación sobre el comportamiento de dos rectas en el infinito, lo que escapa a nuestra capacidad de observación física. Para muchos matemáticos el mismo Euclides notó que este axioma era de algún modo problemático dado que no lo utiliza en ninguna demostración de las primeras 28 proposiciones de los Elementos. Durante dos mil años se intentó, sin éxito, dar una demostración del axioma de las paralelas (conocido como quinto postulado de Euclides) utilizando los axiomas anteriores.

La realidad es que para que un enunciado sea realmente un axioma perteneciente a un determinado sistema axiomático, al quitarlo de la lista uno debería obtener un modelo diferente al que se obtiene si se lo incluye. Este asunto no es para nada elemental, y lo discutiremos con más detalle más adelante. Pero la realidad es que si uno respeta todos los axiomas de la geometría Euclidea salvo por el axioma de las paralelas que es sustituido por una de sus negaciones (dada una recta y un punto no perteneciente a ella por él no pasa ninguna paralela a la recta dada, o bien, dada una recta y un punto no perteneciente a ella por él pasa más de una recta paralela a la recta dada) se obtienen nuevos sistemas axiomáticos coherentes que dan lugar a dos nuevas geometrías: la geometría elíptica e hiperbólica, conocidas comunmente como *geometrías no euclideanas*. Se concluye entonces que el axioma de las paralelas es efectivamente un axioma que debe ser incluido.

De esta muy breve disquisición histórica se concluye que el camino transitado para construir la geometría como la estudiamos hoy en día fue largo e involucró las ideas de los más grandes matemáticos de la historia.

Por ejemplo, basta mencionar que los cinco axiomas que postula Euclides en sus Elementos son claramente insuficientes (Euclides demuestra propiedades haciendo suposiciones que no demuestra, y que luego se entendió que era necesario incluir como nuevos axiomas). La construcción de una teoría completa se debe a Hilbert con su trabajo *Fundamentos de geometría* publicada recién en 1899. Sin embargo, pese a las críticas que uno puede hacer a Euclides respecto de la incompletitud de su trabajo (algo claramente entendible dado el tiempo que pasó hasta poder tener una idea del todo clara de cómo estaban las cosas) su obra tiene gran valor porque las ideas que presenta son simples y claras y sus métodos se han mantenido vigentes más de veinticinco siglos desde que los presentó.

2.1. Ejercicios propuestos

1. Dibujar tres puntos no alineados A , B y C y un punto D de modo que A , B , C y D sean no coplanares.

   a) ¿Cuántas rectas distintas determinan?

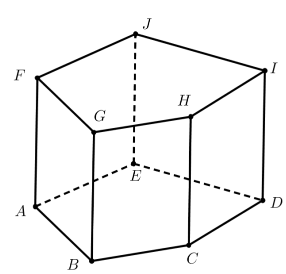
   b) Agruparlas en conjuntos de tres rectas coplanares cada uno.

   c) ¿Cuántos planos distintos determinan?

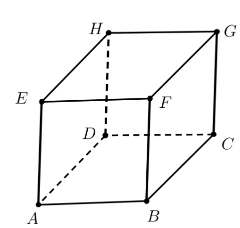
2. Representar gráficamente las hipótesis de las siguientes proposiciones y determinar si son verdaderas o falsas (o sea, si se verifica o no la tesis en cada caso).

   a) $\{A, B, C\} \subset r \ \wedge \{B, C\} \subset s \ \Rightarrow \ r = s.$ *b*) $\{A, B\} \subset r \ \wedge \ \{B, C\} \subset s \ \Rightarrow r = s.$

3. En la siguiente figura identificar cuatro pares de rectas coplanares y cuatro pares de rectas alabeadas. De las rectas coplanares dadas, decidir si son secantes o paralelas.



4. Basándose en la figura, marcar con una cruz en el casillero que corresponda de la siguiente tabla.



Pares de rectas	$\overrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EF}$	$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EA}$	$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{HG}$	$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{HC}$	$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EH}$	$\overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{AC}$	$\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{GD}$
Intersección $\emptyset$							
Paralelas							
Alabeadas							
Secantes							

5. En este ejercicio demostraremos el siguiente **Teorema**: Dados una recta y un punto que no pertenece a la recta, existe un único plano al cual el punto pertenece y que contiene a la recta. Es decir, una recta y un punto que no pertenece a ella determinan un único plano.

   Para hacer la demostración, sigan los siguientes pasos:

   a) Identificar las hipótesis del teorema y realizar un gráfico. Identificar la tesis del teorema.

   b) ¿Con las hipótesis del teorema, se verifican los datos del axioma 5 para garantizar la existencia de un plano?

   c) Una vez determinado el plano, ¿por qué el punto dado pertenece a él?

   d) ¿Qué axioma garantiza que la recta dada está contenida en él?

   e) Escribir detalladamente la demostración del teorema.

6. Sabemos que una recta y un plano tienen infinitos puntos. Sin embargo no estamos aún en condiciones de demostrarlo. Basándonos en los resultados de esta sección:

   a) ¿cuántos puntos distintos hay por lo menos en una recta?

   b) ¿cuántos puntos distintos hay por lo menos en un plano?

   c) ¿cuántos puntos distintos hay por lo menos en el espacio?

   d) ¿cuántas rectas distintas hay por lo menos en un plano?

   e) ¿cuántas rectas distintas hay por lo menos en el espacio?

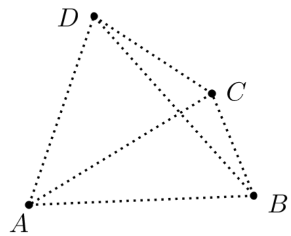
   f) ¿cuántos planos distintos hay por lo menos en el espacio?

7. Demostrar que el paralelismo de rectas en un plano es una relación transitiva. Es decir, si r, s y t son rectas en un plano π tales que $r\,||\,s$ y $s\,||\,t$, entonces $r\,||\,t$.

8. Demostrar que dos rectas paralelas distintas están contenidas en un único plano.

9. Demostrar que dada una recta cualquiera y un punto que no pertenece a ella existe al menos una recta alabeada a ella que pase por el punto dado.

10. Considerar el conjunto $\mathcal{E} = \{A, B, C, D\}$. Cada elemento de $\mathcal{E}$ se denomina un punto. Sea $\mathcal{R}$ es el conjunto formado por pares de puntos distintos de $\mathcal{E}$. Por ejemplo, $\{A, B\} \in \mathcal{R}$. Sea finalmente $\mathcal{P}$ el conjunto formado por ternas de puntos distintos de $\mathcal{E}$, por ejemplo $\{A, C, D\} \in \mathcal{P}$. Una forma de dibujar este modelo es la siguiente:



a) Dar por extensión los conjuntos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{P}$.

b) Mostrar que con $\mathcal{E}$, $\mathcal{R}$, y $\mathcal{P}$ así definidos se satisfacen los axiomas del 1 al 6, pero no se satisface el axioma 7. Este es un ejemplo de un modelo de lo que se denomina *geometría de incidencia* y prueba que el axioma 7 no puede deducirse de los 6 anteriores. ¿Por cuál de sus negaciones habría que cambiar el axioma 7 para que este modelo satisfaga todos los axiomas?

11. Considerar el conjunto $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Cada elemento de $\mathcal{E}$ se denomina un punto. Sea $\mathcal{R}$ es el conjunto formado por pares de puntos distintos de $\mathcal{E}$. Por ejemplo, $\{A, B\} \in \mathcal{R}$. Sea finalmente

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \quad & \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,F,E\}, \{B,C,G,F\}, \{C,G,H,D\}, \{D,H,E,A\}, \{E,F,G,H\}, \\ & \{A,B,G,H\}, \{C,D,E,F\}, \{B,C,E,H\} y \{A,D,F,G\}, \}.\end{aligned}$$

Este modelo puede dibujarse como en la figura del ejercicio 4.

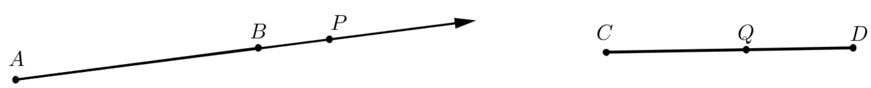
Mostrar que con $\mathcal{E}$, $\mathcal{R}$, y $\mathcal{P}$ así definidos se satisfacen los axiomas del 1 al 7.

---

3. Segmentos y semirrectas. Axiomas de orden en la recta

En esta sección nos ocuparemos de otras figuras geométricas que ya conocemos. Comencemos pensando en los segmentos y las semirrectas.

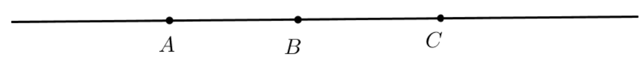
En la siguiente figura se han representado la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ y el segmento $\overline{CD}$. ¿Qué condición debe verificar un punto P para pertenecer a $\overrightarrow{AB}$? ¿Y qué condición debe cumplir un punto Q para pertenecer a $\overline{CD}$?



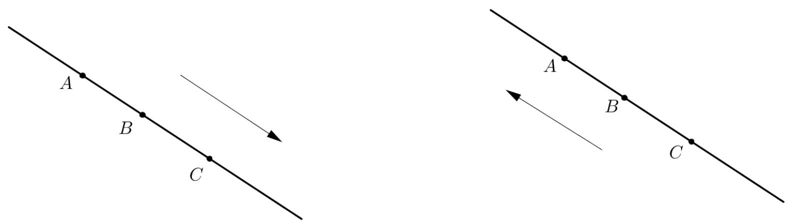
Si graficamos dos puntos P y Q que pertenecen a la semirrecta y al segmento respectivamente, dos ideas nos surgen intuitivamente: para pertenecer a $\overrightarrow{AB}$, P debe ser un punto de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que *esté del mismo lado que* B*, respecto del punto* A. Y para que Q esté en el segmento $\overline{CD}$, Q debe ser un punto de la recta $\overleftrightarrow{CD}$ *entre* C y D.

Nos ocuparemos de formalizar estos conceptos de "estar del mismo lado" que un punto, o "estar entre" dos puntos.

Tomemos una recta r y tres puntos A, B y C de r cualesquiera como en la figura. Nuestra intuición nos dice que estos puntos están ordenados: A está antes que B y B está antes que C.



Pensemos ahora que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ está modelizando una calle que debemos recorrer y que A, B y C son edificios de esa calle.



En este caso, podemos dibujar dos flechas indicando el sentido del recorrido. Para quienes la recorran en el primer sentido, es evidente que A es el primer punto de paso, luego pasaremos por B para finalmente llegar a C. Por lo tanto es natural decir que los puntos siguen el orden A, B, C. Sin embargo, para quienes la recorran en el segundo sentido, el primer punto de paso será C, el segundo B y finalmente llegaremos a A. Por lo tanto, en este caso, podemos decir que el orden de los puntos es C, B, A. Es evidente que no hay otra forma de recorrer la calle sin volver a pasar por algún punto que ya hayamos visto.

Por lo tanto hay básicamente dos formas de ordenar los puntos de una recta, teniendo en cuenta una de las dos maneras de recorrerla. Es importante notar que en cualquiera de los dos casos, todos coincidiremos en que B está entre A y C, y que C está del mismo lado que B respecto de A. También diremos que A y B están de lados distintos respecto de B, lo que implica que si comenzamos nuestro recorrido de B y elegimos uno de los dos sentidos posibles, sólo podremos pasar por uno de los puntos A o C.

En conclusión: dada una recta cualquiera, podemos ordenarla en dos sentidos distintos, pero los conceptos que intentamos definir de estar entre o estar del mismo lado de un punto respecto de otro no dependen del orden que elijamos.

Ahora bien, la posibilidad de ordenar los puntos de la recta no es algo que podamos deducir de los axiomas o los teoremas que hemos enunciado hasta ahora. Es decir, no hay un teorema que nos lo garantice. Por lo tanto, debemos postularlo como un axioma nuevo:

- **Axioma 8** Dada una recta r existen dos maneras de ordenar los puntos de r por una relación que denominamos "**precede a**" de modo que se verifican:
  - Dados dos puntos distintos cualesquiera A y B de r, A precede a B o B precede a A, pero no pueden darse las dos simultaneamente.
  - Si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C.

Estas dos maneras de ordenar la recta no son más que las que vimos en el ejemplo anterior. A partir del axioma 8, podemos presentar las siguientes definiciones:

Definiciones:

• Dados tres puntos alineados A, B y C, decimos que B **está entre** A y C si A precede a B y B precede a C o bien si C precede a B y B precede a A.

• Dados tres puntos A, B y C de una recta r, decimos que B y C **están del mismo lado** de r respecto de A si ambos preceden a A o A precede a ambos (observemos que no excluimos el caso $B = C$, pero sí debe ser $A \neq B$ y $A \neq C$).

Hemos construido un axioma y dos definiciones para poder definir segmento y semirrecta. Sin embargo, si revisamos los axiomas que vimos hasta ahora, ninguno nos garantiza que una recta tenga más de dos puntos. Por ejemplo, en el modelo del ejercicio 11 el axioma 8 se verifica trivialmente pues cada recta tiene exactamente dos elementos. Sin embargo, las representaciones físicas que conocemos de recta, semirrecta o segmento, nos indican que estas figuras geométricas deben estar constituidas por infinitos puntos. Esto quedará garantizado por el siguiente axioma:

- **Axioma 9** Dados dos puntos A y B existe al menos un punto $C \in \overleftrightarrow{AB}$ que está entre A y B.
- **Axioma 10** Dado un punto A de una recta r existe al menos un punto B de r que precede a A y un punto C de r tal que A precede a C.

Podemos finalmente dar las definiciones de segmento y semirrecta.

Definiciones:

Dados dos puntos distintos A y B se denominan:

• **segmento de extremos** A y B, y se denota $\overline{AB}$ al conjunto formado por A, B y todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que están entre A y B;

• **semirrecta de origen** A **que pasa por** B, y se denota $\overrightarrow{AB}$ al conjunto formado por A y todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que están del mismo lado que B respecto de A.

Podemos observar finalmente que el modelo del ejercicio 11 no verifica los axiomas 9 y 10 y de hecho las rectas, segmentos y semirrectas coinciden.

Ahora podemos probar algunas propiedades:

Teorema 4. *Las rectas, segmentos y semirrectas son conjuntos infinitos de puntos. Si A y B son puntos de una recta r, el segmento $\overline{AB}$ y la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ son subconjuntos propios de r. Además $\overline{AB}$ es un subconjunto propio de $\overrightarrow{AB}$.*

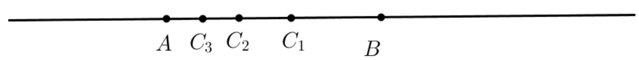
Demostración:

Probemos primero que un segmento tiene infinitos puntos. Sean A y B puntos distintos y supongamos que hemos ordenado la recta de modo que A precede a B. Por el axioma 9 existe un punto C_1 (distinto de A y B) que está entre A y B, y por lo tanto está en el segmento $\overline{AB}$. Observemos que en el orden que hemos establecido, A precede a C_1 y C_1 precede a B.

Si ahora consideramos los puntos A y C_1, siguiendo el mismo razonamiento, existirá un punto C_2 en el segmento $\overline{AC_1}$. C_2 es distinto de A y de C_1, pero es además distinto de B. En efecto, si $C_2 = B$, C_1 debería preceder a C_2 lo cual no ocurre.

Además, A precede a C_2 y por el axioma 8, como C_2 precede a C_1 y C_1 precede a B, C_2 precede a B. Luego C_2 está entre A y B, o sea, $C_2 \in \overline{AB}$.

Podemos seguir con este procedimiento infinitamente y así obtener infinitos puntos en $\overline{AB}$.



Por definición, $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ y $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$. Luego tanto la semirrecta como la recta deben tener infinitos puntos (tienen al menos los puntos del segmento).

Veamos ahora que $\overline{AB}$ es un subconjunto propio de $\overleftrightarrow{AB}$. Esto significa que debe existir al menos un punto C en $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $C \notin \overline{AB}$.

Estamos suponiendo que A precede a B. Por el axioma 10, existe un punto $C \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que B precede a C. Pero entonces A precede a C, por el axioma 8. Concluimos que C no puede estar entre A y B, y por lo tanto $C \notin \overline{AB}$ como queríamos probar. Observemos que el punto C que hemos elegido está en $\overrightarrow{AB}$ pues A precede tanto a B como a C. Luego $\overline{AB}$ es también un subconjunto propio de $\overrightarrow{AB}$.

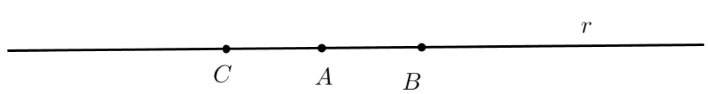
La demostración de que una semirrecta es un subconjunto propio de una recta en la que está contenida es análoga y se deja como ejercicio. $\square$

Teorema 5. *Sea r una recta y sean A, B y C puntos distintos de r tal que C precede a A y A precede a B (en alguno de los órdenes de r). Entonces*

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = r \qquad y \qquad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$$

Demostración:

Consideremos una recta r y tres puntos A, B y C que cumplan las hipótesis del teorema, como se muestra en la figura.



Demostraremos primero que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = r$. Observemos que debemos demostrar la igualdad de dos conjuntos de puntos, y por lo tanto debemos probar lo que denominamos "doble inclusión".

Comencemos probando que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \subset r$, o sea, que cualquier punto de $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ es un punto de r. Sea entonces Q un punto arbitrario de $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. Entonces $Q \in \overrightarrow{AB}$ o bien $Q \in \overrightarrow{AC}$. En cualquiera de los dos casos $Q \in r$.

Probemos ahora que $r \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. Tomemos entonces un punto $Q \in r$. Debemos probar que Q es un punto de la unión de las semirrectas.

Tenemos tres opciones: $Q = A$, Q está del mismo lado que B respecto de A o Q no está del mismo lado que B respecto de A.

En el primer caso, si $Q = A$, es claro que Q es un punto tanto de $\overrightarrow{AB}$ como de $\overrightarrow{AC}$ y por lo tanto es un punto de la unión de estas dos semirrectas.

Si Q está del mismo lado que B respecto de A, entonces por definición $Q \in \overrightarrow{AB}$. En particular $Q \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.

Finalmente, si Q no está del mismo lado que B respecto de A, es porque Q precede a A. En efecto, por el axioma 8, debe verificarse que A precede a Q o que Q precede a A. Pero A no puede preceder a Q pues en ese caso Q estaría del mismo lado que B respecto de A. Luego Q está del mismo lado que C respecto de A y por lo tanto $Q \in \overrightarrow{AC}$. En particular $Q \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.

Hemos probado que en cualquiera de los tres casos que pueden presentarse, resulta $Q \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$, con lo cual concluimos que $r \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ como queríamos ver.

Veamos ahora que $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$. Nuevamente se trata de una igualdad de conjuntos y debemos probar la doble contención. Una contención es inmediata: $\{A\} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$ pues A es un punto de ambas semirrectas.

Para probar la otra contención, debemos ver que A es el único punto común de ambas semirrectas. Supongamos por el absurdo que esto no es así, o sea, que existe un punto $Q \neq A$ tal que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$.

Como $Q \in \overrightarrow{AB}$ y A precede a B, concluimos que A precede a Q. Pero como además $Q \in \overrightarrow{AC}$ y C precede a A, concluimos que Q precede a A. Pero esto es absurdo pues contradice el axioma 8, siendo $Q \neq A$. $\square$

Definición:

Si B y C son puntos de una recta r que no están del mismo lado respecto de un punto A, las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se denominan **semirrectas opuestas**. Muchas veces será conveniente utilizar la notación

$$\overline{AC} = op\,\overline{AB}.$$

3.1. Ejercicios propuestos

1. Dibujar tres puntos distintos A, B y C en el plano. Indicar en cada caso todos los segmentos y semirrectas distintos que pueden determinarse con extremos en dos de los puntos dados en el caso de los segmentos o con origen en alguno de los puntos y que pasa también por alguno de ellos en el caso de las semirrectas, cuando:

   a) A, B y C están alineados y B está entre A y C.

   b) A, B y C no están alineados.

2. Dibujar cuatro puntos distintos A, B, C y D de modo que el punto C esté entre A y D, y D esté entre B y C. Determinar:

    a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DB}$
    b) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC}$
    c) $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{CA}$
    d) $\overrightarrow{DB} \cup \overline{DA}$
    e) $\overline{AD} \cap \overline{CB}$
    f) $\overrightarrow{DA} \cap \overline{DB}$

3. Sean A, B, C y D cuatro puntos alineados dados en ese orden. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$
    b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
    c) $\overline{BC} = \overline{CB}$
    d) $\overline{CB} \subset \overrightarrow{BC}$
    e) $D \in \overrightarrow{CA}$
    f) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$

4. Definir un segmento como intersección de dos semirrectas.

5. Comprobar, analizando las respectivas definiciones, que:

    a) Si C es un punto que está entre A y B, entonces C está entre B y A.
    b) Si C es un punto de una recta que está del mismo lado que un punto B respecto de un punto A, entonces B está del mismo lado que C respecto de A.
    c) Si A y B son puntos cualesquiera, entonces $\overline{AB} = \overline{BA}$.
    d) Si $C \in \overrightarrow{AB}$ y $C \neq A$, entonces $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

6. Dados dos puntos distintos A y B, demostrar que si $C \in \overline{AB}$ entonces $\overline{AC} \subset \overline{AB}$.

7. Demostrar que dados dos puntos distintos A y B cualesquiera, la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ es un subconjunto propio de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (releer y adaptar la última parte de la demostración del Teorema 4).

8. Demostrar que dados dos puntos distintos A y B cualesquiera, $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

9. Demostrar que por un punto de un plano existen infinitas rectas contenidas en el plano que pasan por el punto dado.

10. Dados tres puntos alineados A, B y C distintos dos a dos, demostrar que $C \in \overrightarrow{AB}$ si y sólo si $A \notin \overline{BC}$.

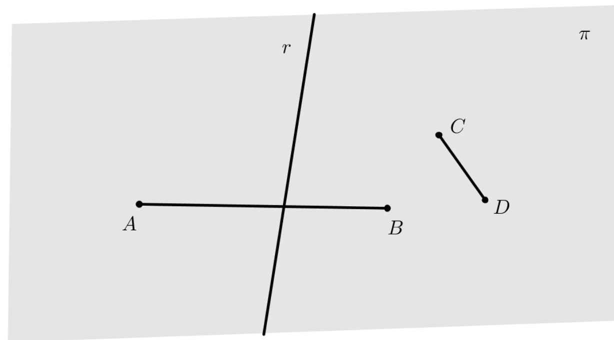
---

4. Semiplanos y semiespacios. Axiomas de separación en el plano y en el espacio.

El Teorema 5 establece que dada una recta r y un punto A que pertenece a ella, este punto divide a la recta en dos regiones (dos semirrectas) de modo que todos los puntos de la recta distintos de A están en exactamente una de las regiones. En el ejercicio 10 de la sección anterior, vimos que dos puntos están en la misma región si y sólo si el segmento que determinan no contiene a A, y están en distintas regiones si el segmento que determinan sí pasa por A.

Hemos podido probar este resultado gracias al axioma 8, que nos garantiza que una recta es un conjunto ordenado, y este orden satisface lo que intuitivamente entendemos por un conjunto ordenado.

Pretendemos repetir el mismo procedimiento para el plano y una recta que esté contenida en él. Si hacemos un dibujo, veremos que toda recta de un plano π lo divide también en dos regiones, los denominados *semiplanos*, de modo que todos los puntos del plano están en una u otra región, y podemos determinar si dos puntos están o no en la misma región en función de si el segmento que determinan corta o no a r.



Sin embargo, no es posible dar en el plano o el espacio un orden entre sus puntos que respete esta situación. O sea, no podemos esperar generalizar el axioma 8. Sin embargo, sí podemos adaptar el Teorema 5 y postularlo como un axioma.

- **Axioma 11** Dado un plano y una recta contenida en él, existen dos subconjuntos disjuntos del plano tales que:
  - la recta tiene intersección vacía con cada uno de los subconjuntos.
  - todo punto del plano exterior a la recta está en exactamente uno de estos subconjuntos;
  - dos puntos distintos del plano exteriores a la recta están en un mismo subconjunto si y sólo si el segmento que determinan no interseca a la recta.

En este axioma está implícita la definición de semiplano, que formalizamos como sigue:

Definiciones:

• Dada una recta r contenida en un plano π y un punto $P \in \pi$ exterior a r, sea $\mathcal{S}$ la región de π cuya existencia garantiza el axioma 11 que contiene a P. Es decir, $\mathcal{S}$ es el conjunto formado por P y por todos los puntos Q de π tales que $\overline{QP} \cap r = \emptyset$.

Se denomina **semiplano** determinado por r que contiene a P, y se lo denota $semp_r(P)$ al conjunto

$$semp_r(P) = r \cup \mathcal{S} = r \cup \{P\} \cup \{Q \in \pi : \overline{PQ} \cap r = \emptyset\}$$

r se denomina la **frontera** del semiplano y los puntos del conjunto $\{P\} \cup \{Q \in \pi : \overline{PQ} \cap r = \emptyset\}$ se denominan **puntos interiores** del semiplano.

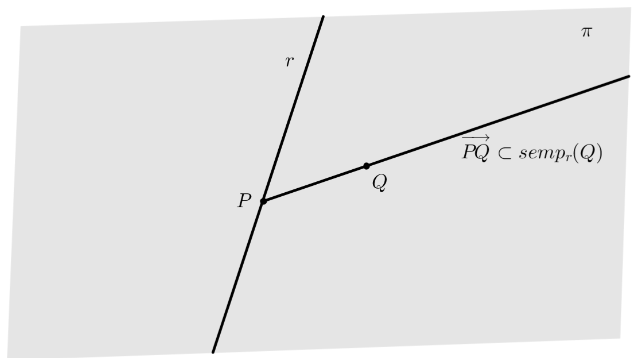
El axioma 11 establece que dada una recta r contenida en un plano π y dos puntos P y Q exteriores a r tales que $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$ se verifica

$$\pi = semp_r(P) \cup semp_r(Q) \;\text{ y }\; semp_r(P) \cap semp_r(Q) = r.$$

Probaremos una primera propiedad sobre los semiplanos:

Teorema 6. *Sea r una recta contenida en un plano π, $P \in r$ y Q un punto exterior a r. Entonces*

$$\overrightarrow{PQ} \subset semp_r(Q).$$



<u>Demostración:</u>

Según las hipótesis del teorema tenemos una recta r contenida en un plano π y dos puntos P y Q de π tales que

$$P \in r \qquad \text{y} \qquad Q \notin r.$$

Debemos probar que $\overrightarrow{PQ} \subset semp_r(Q)$.

Es nuevamente una inclusión de conjuntos. Por lo tanto, debemos considerar un punto $S \in \overrightarrow{PQ}$ y ver que $S \in semp_r(Q)$, o sea, que $S \in r$ o bien $S = Q$ o $\overline{SQ} \cap r = \emptyset$.

Si $S \in r$ o $S = Q$, trivialmente $S \in semp_r(Q)$. Supongamos entonces que $S \notin r$ y $S \neq Q$, en particular también $S \neq P$. Supongamos por el absurdo que $\overline{SQ} \cap r \neq \emptyset$. Como $\overline{SQ} \subset \overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PQ} \cap r = \{P\}$, la única opción es que $\overline{SQ} \cap r = \{P\}$. Esto implica que P está entre S y Q, pero entonces S y Q no están del mismo lado de r respecto de P, o sea $S \notin \overrightarrow{PQ}$, lo cual es un absurdo.

Luego $\overline{SQ} \cap r = \emptyset$ como queríamos ver y $S \in semp_r(Q)$. $\square$

De la misma manera que una recta divide al plano en dos regiones, un plano dividirá al espacio en dos regiones que denominaremos *semiespacios*. Nuevamente, debemos postularlo como axioma.

- **Axioma 12** Dado un plano en el espacio, existen dos subconjuntos disjuntos del espacio tales que:
  - El plano tiene intersección vacía con cada uno de los subconjuntos;
  - todo punto exterior al plano está en exactamente uno de estos subconjuntos;

- dos puntos distintos del espacio exteriores al plano están en un mismo subconjunto si y sólo si el segmento que determinan no interseca al plano.

Definiciones:

• Dado un plano π del espacio y un punto $P \notin \pi$, sea $\mathcal{S}$ la región del espacio cuya existencia garantiza el axioma 12 que contiene a P. Es decir, $\mathcal{S}$ es el conjunto formado por P y por todos los puntos Q del espacio tales que $\overline{QP} \cap \pi = \emptyset$.

Se denomina **semiespacio** determinado por π que contiene a P, y se lo denota $seme_\pi(P)$ al conjunto

$$seme_\pi(P) = \pi \cup \mathcal{S} = \pi \cup \{P\} \cup \{Q \in \mathcal{E} : \overline{PQ} \cap \pi = \emptyset\}$$

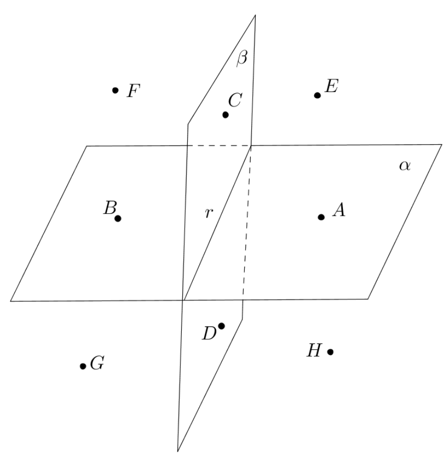
π se denomina la **frontera** del semiespacio y los puntos del conjunto $\{P\} \cup \{Q \in \mathcal{E} : \overline{PQ} \cap \pi = \emptyset\}$ se denominan **puntos interiores** del semiespacio.

El axioma 12 establece que dado un plano π y dos puntos P y Q exteriores a π tales que $\overline{PQ} \cap \pi \neq \emptyset$ el espacio se descompone como

$$\mathcal{E} = seme_\pi(P) \cup seme_\pi(Q) \ \text{ y } \ seme_\pi(P) \cap seme_\pi(Q) = \pi.$$

4.1. Ejercicios propuestos

1. Basándose en la siguiente figura:



   a) nombrar los cuatro semiplanos que se observan;
   b) nombrar los cuatro semiespacios que se observan;
   c) nombrar dos semiplanos con la misma frontera contenidos en planos diferentes;
   d) completar con $\in$, $\notin$, $\subset$ o $=$ según corresponda:

1) $semp_r(C) \,.....\, \alpha \cap seme_\beta(E)$

2) $\overline{DC} \,.....\, seme_\beta(C)$

3) $E \,.....\, seme_\alpha(E) \cap seme_\beta(F)$

4) $\{E, D\} \,.....\, seme_\alpha(E) \cap seme_\beta(E)$

5) $r \,.....\, semp_r(A) \cap seme_\beta(F)$

6) $r \,.....\, seme_\alpha(C) \cap seme_\alpha(D)$.

2. Dibujar cuatro puntos A, B, C y D que sean los vértices de un cuadrilátero nombrados en sentido antihorario.

   a) Nombrar todos los semiplanos distintos que contengan como punto interior a alguno de los vértices del cuadrilátero y cuyas fronteras contengan a alguno de los lados del cuadrilátero.

   b) Elegir dos cualesquiera de los semiplanos anteriores y colorear la intersección entre ellos.

   c) Nombrar los cuatro semiplanos cuyas fronteras contienen a las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ del cuadrilátero.

   d) Elegir dos semiplanos de frontera distinta entre los del ítem anterior y colorear su intersección.

3. Para cada ítem realizar un gráfico de la situación y nombrar:

   a) Dos semiplanos que tengan la misma frontera.

   b) Dos semiplanos que tengan fronteras paralelas y distintas y cuya intersección sea no vacía.

   c) Dos semiplanos que tengan fronteras distintas y cuya intersección sea vacía.

   d) Dos semiplanos cuyas fronteras sean distintas y cuya intersección sea un semiplano.

   e) Dos semiplanos cuyas fronteras sean distintas y cuya intersección sea no vacía y no sea un semiplano.

4. Consideremos un plano α y dos puntos $P \in \alpha$ y $Q \notin \alpha$. Demostrar que $\overrightarrow{PQ} \subset seme_\alpha(Q)$. (Esta demostración es análoga a la del Teorema 6).

5. Dada una recta r contenida en un plano π y dos puntos P y Q exteriores a r tales que $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$ demostrar que

$$\pi = semp_r(P) \cup semp_r(Q) \quad \text{y} \quad semp_r(P) \cap semp_r(Q) = r.$$

6. Dado un plano π del espacio y dos puntos $P, Q \notin \pi$ tales que $\overline{PQ} \cap \pi \neq \emptyset$, demostrar que

$$\mathcal{E} = seme_\pi(P) \cup seme_\pi(Q) \quad \text{y} \quad seme_\pi(P) \cap seme_\pi(Q) = \pi.$$

7. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente las respuestas.

   a) Si dos segmentos distintos se intersecan, su intersección es un punto.

   b) Dos semirrectas con el mismo origen están contenidas en un mismo plano.

   c) Si r y s son rectas alabeadas, no existe ninguna recta t tal que r y t sean secantes y r y s sean secantes.

   d) Si dos semiplanos no tienen puntos interiores en común, entonces tienen la misma frontera.

   e) Si dos semiplanos tienen la misma frontera, entonces su unión es un plano.

   f) La unión de dos semiplanos de distinta frontera puede ser un plano.

   g) Dados cuatro puntos no coplanares, existe siempre un semiespacio de modo que los cuatro puntos están contenidos en el.

5. Ángulos y polígonos

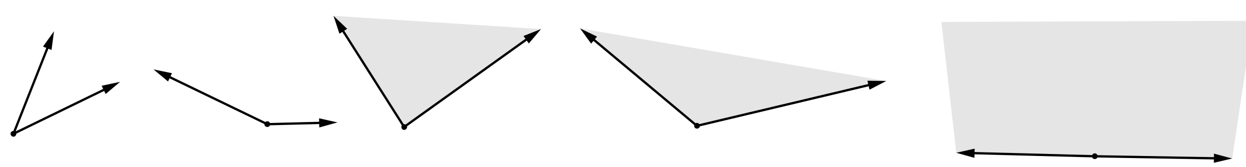
Finalizaremos esta unidad definiendo las primeras figuras planas elementales: los ángulos y polígonos.

Como hemos mencionado al principio, dar una definición de un nuevo objeto matemático significa dar todas las características que lo identifican para asegurarnos que hemos dado una buena definición, es decir, que cualquiera que la lea sepa identificar de manera exacta a qué objeto nos estamos refiriendo.

Comenzaremos dando la definición de un ángulo, que es la figura más sencilla que conocemos.

En los siguientes dibujos representamos lo que todos nos imaginamos como un ángulo.

Si prestamos atención a las figuras vemos que entre ellas hay una diferencia. En algunas se han dibujado sólo los lados del ángulo y en otras se ha dibujado además su interior.



Por lo tanto lo primero que tenemos que hacer es decidir a cuál de estos dos objetos llamaremos ángulo.

Por conveniencia para lo que sigue en esta asignatura, nos interesará considerar a los puntos interiores del ángulo como puntos pertenecientes al ángulo. Podríamos haberlo definido dando simplemente sus lados y también hubiese estado bien.

En ese caso la definición es muy simple, basta observar que un ángulo no es más que la intersección de dos semiplanos o bien un semiplano, como en la última figura.

Definiciones:

• Se denomina **ángulo convexo** o simplemente **ángulo** a un semiplano o la intersección de dos semiplanos contenidos en un mismo plano cuyas fronteras son rectas que se cortan en un punto.

• Se denomina **vértice** del ángulo al punto de intersección de las fronteras de los semiplanos que lo definen o a cualquier punto de la frontera del semiplano que lo define en el caso que el ángulo sea un semiplano.

• Se denominan **lados** del ángulo a las semirrectas que lo limitan, con origen en el vértice del ángulo.

• Los puntos del ángulo que no están sobre los lados se denominan **puntos interiores** del ángulo.

• Si O es el vértice del ángulo y A y B son puntos distintos de O uno sobre cada lado del ángulo, el ángulo se denota indistintamete por $A\hat{O}B$ o $B\hat{O}A$.

• Si un ángulo es un semiplano, se lo denomina **ángulo llano**.

Observemos que hemos introducido en la definición de ángulo la palabra *convexo*. Esto es porque un ángulo convexo es en particular un conjunto convexo, que definimos a continuación:

Definiciones:

• Un subconjunto del espacio se denomina un **conjunto plano** o **figura plana** si está contenido en un plano.

• Un subconjunto del espacio se denomina **convexo** si está constituido por un único punto, o si dados dos puntos P y Q distintos del subcojunto el segmento que estos puntos determinan está contenido en el subconjunto.

Por el axioma 6 es claro que un plano es una figura convexa del espacio. De hecho dados dos puntos distintos P y Q de un plano π culquiera, se tiene $\overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ} \subset \pi$.

La figura plana convexa más sencilla que tenemos además del plano es un semiplano:

Teorema 7. *Un semiplano es una figura convexa*

Demostración:

Sea $semp_r(T)$ un semiplano y consideremos dos puntos distintos $P, Q \in semp_r(T)$. Debemos ver que $\overline{PQ} \subset semp_r(T)$.

Debemos analizar varios casos.

El primero, si $P, Q \in r$, se tiene $\overline{PQ} \subset r \subset semp_r(T)$.

Supongamos ahora que $P \in r$ y $Q \notin r$. En este caso, $\overline{PQ} \subset \overrightarrow{PQ} \subset semp_r(T)$ por Teorema 6.

Finalmente, supongamos que $P \notin r$ y $Q \notin r$ y consideremos un punto $S \in \overline{PQ}$. Por el axioma 11 y la definición de semiplano tenemos que $\overline{PQ} \cap r = \emptyset$. Supongamos por el absurdo que $\overline{PS} \cap r \neq \emptyset$. Pero por el ejercicio 6 de la sección 3 resulta $\overline{PS} \subset \overline{PQ}$ y por lo tanto $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$. Pero esto es absurdo. Por lo tanto $\overline{PS} \cup r = \emptyset$ y entonces P y S esán en un mismo semiplano de los que define r. O sea, $S \in semp_r(T)$ y por lo tanto $\overline{PS} \subset semp_r(T)$ como queríamos probar. $\square$

Como consecuencia de este teorema resulta que un ángulo llano es una figura convexa.

Cualquier otro ángulo es intersección de dos semiplanos y por lo tanto será una figura plana convexa como consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 8. *La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

Demostración:

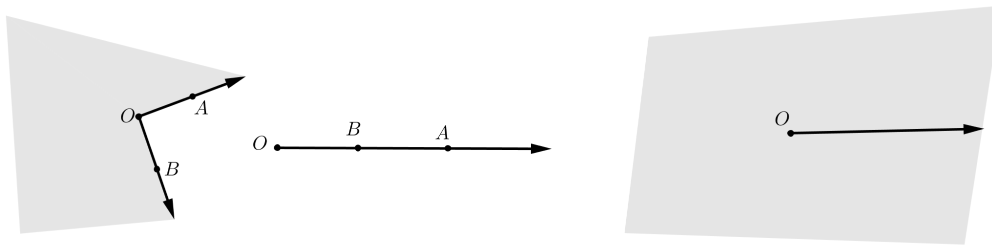
Sean A y B dos conjuntos convexos y sea $C = A \cap B$. Debemos ver que C es convexo, esto es, C está constituido por un único punto o el segmento determinado por cualquier par de puntos de C está contenido en C.

Supongamos que C no está constituido por un único punto y consideremos entonces $P,\ Q \in C$ dos puntos cualesquiera de C. Debemos ver que $\overline{PQ} \subset C$. No perdamos de vista que estamos probando una contención de conjuntos y por lo tanto debemos tomar un punto arbitrario de $\overline{PQ}$ y ver que es un punto de C.

Ahora bien, como $P,\ Q \in C = A \cap B$, en particular tenemos $P,\ Q \in A$ y $P,\ Q \in B$. Como A y B son convexos por hipótesis, $\overline{PQ} \subset A$ y $\overline{PQ} \subset B$.

Luego si $R \in \overline{PQ}$, resulta $R \in A$ y $R \in B$, con lo cual $R \in A \cap B = C$ como queríamos probar. $\square$

En la definición de ángulo hemos omitido deliberadamente las siguientes figuras planas:



La primera figura muestra lo que se conoce como un ángulo *cóncavo*. La segunda no es teóricamente un ángulo, pero nos será de gran utilidad cuando veamos cómo medir ángulos (será un ángulo de medida 0). El último, que no es más que un plano, se denomina *ángulo pleno*. Formalizamos estos conceptos en la siguiente definición:

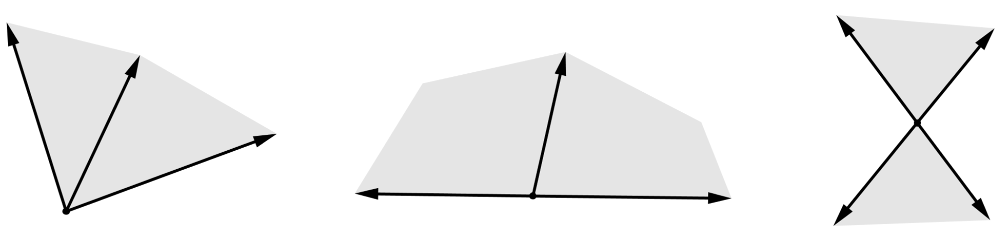
Definiciones:

• Se denomina **ángulo cóncavo** al complemento, en el plano, de un ángulo convexo no llano junto con los lados del ángulo. El **vértice** y los **lados** del ángulo cóncavo son el vértice y los lados del ángulo convexo que lo definen.

• Se denomina **ángulo nulo** a cualquier semirrecta del plano. Si el ángulo está definido por la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ y $B \in \overrightarrow{OA}$ es distinto de O y de A, O se denomina el vértice del ángulo, $\overrightarrow{OA}$ el lado y se lo denota igualmente $A\hat{O}B$.

• Se denomina **ángulo pleno** a un plano. Su lado es cualquier semirrecta del plano y su vértice es el origen de la semirrecta.

A continuación definiremos algunas relaciones entre distintos ángulos que resultarán de gran utilidad en lo que sigue.



ángulos consecutivos　　ángulos adyacentes　　ángulos opuestos por el vértice

Definiciones:

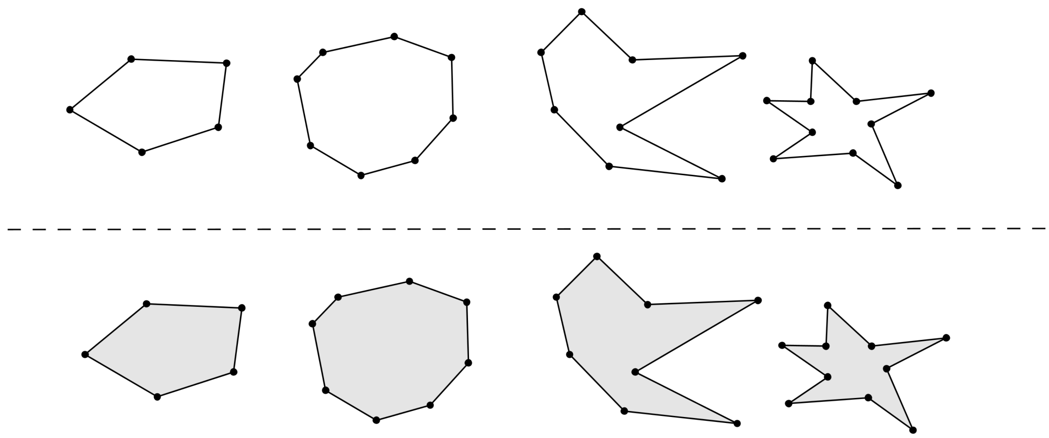
• Dos ángulos se denominan **consecutivos** si su intersección es uno de sus lados.

• Dos ángulos se dicen **adyacentes** si son consecutivos y su unión es un ángulo llano.

• Dos ángulos se dicen **opuestos por el vértice** si los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro.

Finalizaremos esta sección y este capítulo definiendo qué es un polígono.

Nuevamente debemos guiarnos por la idea que todos tenemos en la cabeza de polígono. A continuación representamos varios de ellos.



Hemos presentado dos grupos. Los del primer grupo solo tienen "borde", mientras que los del segundo grupo tienen además "relleno". El primer paso es decidir cuál de los dos grupos representa lo que nosotros queremos llamar polígono.

Tenemos que tener en cuenta que, independientemente de la teoría matemática que estamos construyendo, los polígonos son las figuras geométricas que posiblemente más aplicaciones tienen en la vida real. Cualquier plano de un campo o de una casa es un polígono. Una pared es un polígono, un piso es un polígono, los techos están formados por polígonos. Los canteros de las plazas son muchas veces polígonos. Y de estos polígonos de la vida real nos interesan dos características principales: cuánto mide su contorno (lo que se denomina *perímetro*) y cuánto mide su *área*.

No podemos ignorar estas aplicaciones de gran utilidad en nuestra teoría, y si pretendemos definir en algún momento qué entendemos por área de un polígono y medirla, debemos dar una definición que verifiquen las figuras del segundo grupo.

Esta definición es bastante más complicada que si quisieramos definir un polígono sólo por su borde, pero será de una utilidad mucho mayor.

Las figuras del primer grupo se llamarán *poligonales* y su definición será relativamente sencilla.

Dentro de las figuras del segundo grupo, podemos observar que hay dos tipos: las dos primeras son figuras convexas, mientras que las dos de la derecha no lo son. Definir un polígono no convexo puede resultar muy engorroso. Y de cualquier manera cualquier polígono no convexo puede pensarse como unión de polígonos convexos y por lo tanto podremos calcular perfectamente su área. Por ello nos limitaremos a definir qué es un polígono convexo.

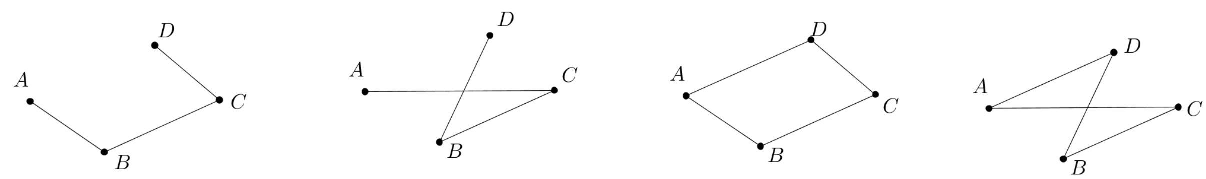
Definiciones:

Consideremos n puntos **ordenados** $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$, donde n representa un número natural arbitrario. Diremos que A_1 y A_2, A_2 y A_3, ... , A_{n-1} y A_n y A_n y A_1 son **puntos consecutivos**. Se denomina **poligonal**

de vértices A_1, A_2, ... , A_n a la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$. Se denomina **poligonal cerrada de vértices** A_1, A_2, ... , A_n a la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Observemos que el orden en que vienen dados los puntos es fundamental para definir la poligonal.

En la siguiente figura ilustramos las poligonales de vértices A, B, C, D y A, C, B, D y las poligonales cerradas de vértices A, B, C, D y A, C, B, D.



Daremos ahora la definición de polígono convexo:

Definiciones:

• Consideremos $n \geq 3$ puntos A_1, A_2, $\cdots$, A_n del plano, no colineales tres a tres, ordenados de modo que cada una de las rectas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{A_2A_3}$, ... , $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$ y $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ dejen en un mismo semiplano los $n-2$ puntos restantes. Se denomina **polígono convexo**, o simplemente **polígono**, a la intersección de los semiplanos determinados por las rectas que unen pares de puntos consecutivos y que contienen a los puntos restantes. Se denota *polígono* $A_1A_2A_3...A_n$.

• Cada uno de los puntos A_1, A_2, $\cdots$, A_n se denomina **vértice** del polígono.

• La poligonal cerrada de vértices A_1, A_2, $\cdots$, A_n se denomina **fontera** del polígono y cada uno de los segmentos que la componen se denomina **lado** del polígono.

• Los ángulos $A_1\hat{A}_2A_3$,..., $A_{n-2}\hat{A}_{n-1}A_n$, $A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ se denominan **ángulos interiores** del polígono.

• Todo segmento determinado por dos vértices no consecutivos del polígono se denomina **diagonal** del polígono.

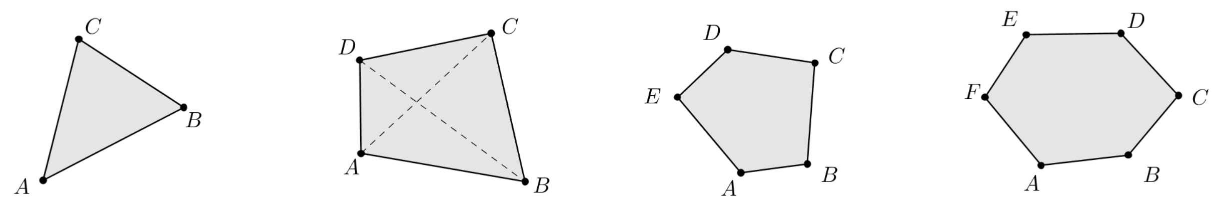
De la definición de polígono es inmediato que el polígono más simple es el que tiene tres vértices, que se denomina **triángulo**. El triángulo es sin dudas una de las figuras planas más importantes de la geometría, y esto se debe a que cualquier polígono puede pensarse como la unión de triángulos. Para el triángulo de vértices A, B y C se usa la notación $\overset{\triangle}{ABC}$.

Un triángulo tiene tres ángulos interiores, pero no tiene diagonales, pues no existen vértices no consecutivos.

Los polígonos de cuatro vértices se denominan **cuadriláteros**, y también les dedicaremos una atención especial en las siguientes unidades. El cuadrilátero tiene dos diagonales.

Los polígonos de cinco vértices (y cinco lados) se denominan **pentágonos**, los de seis vértices **hexágonos**, los de siete **heptágonos**, los de ocho **octógonos**, los de nueve **eneágonos**, los de diez **decágonos**, los de once lados **endecágonos**, los de doce **dodecágonos**. El polígono de 20 lados es otro de los que reciben nombre particular, se llama **icoságono**. Para los demás polígonos directamente decimos "*polígono de n lados*".

Siempre que denotamos un polígono lo hacemos dando sus vértices de manera ordenada siguiendo el sentido de las agujas del reloj o el sentido opuesto al de las agujas del reloj (sentido horario u antihorario respectivamente).

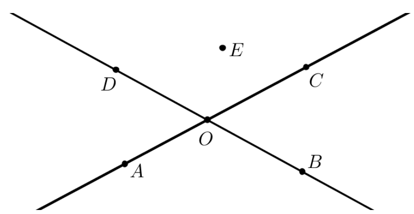


triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ | cuadrilátero$ABCD$ de diagonales$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ | pentágono$ABCDE$ | hexágono$ABCDEF$

En los ejercicios que siguen determinaremos la cantidad de vértices, ángulos y diagonales de un polígono de n lados.

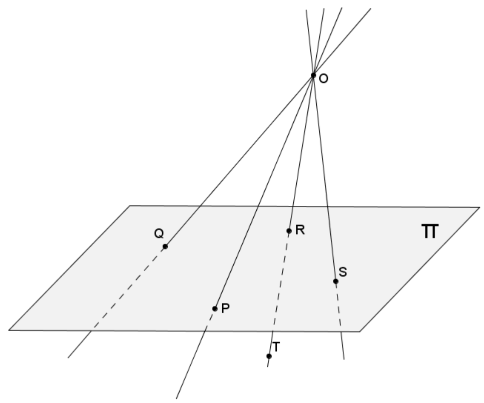
5.1. Ejercicios propuestos

1. Basándose en la siguiente figura,



   a) nombrar dos ángulos adyacentes a $B\hat{O}C$;
   b) nombrar un ángulo consecutivo no adyacente a $B\hat{O}C$;
   c) nombrar un ángulo llano y un ángulo cóncavo;
   d) nombrar dos pares de ángulos opuestos por el vértice;
   e) determinar:
      1) $semp_{\overleftrightarrow{AC}}(D) \cap semp_{\overleftrightarrow{OD}}(E)$
      2) $B\hat{O}C \cap semp_{\overleftrightarrow{OC}}(D)$;
      3) $B\hat{O}E \cap A\hat{O}E$;
      4) $A\hat{O}D \cup D\hat{O}E$.

2. A partir de la figura,



a) determinar:

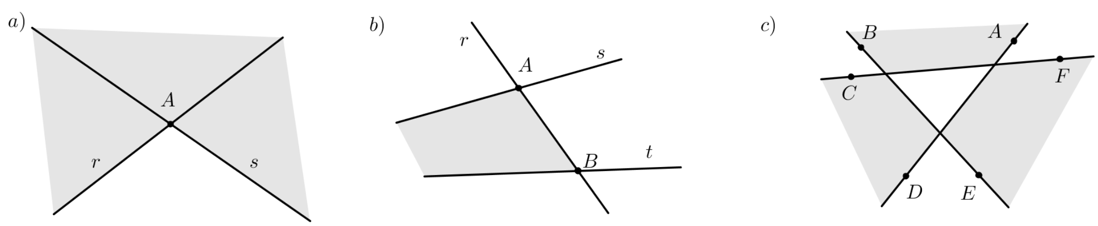
1) $\pi \cap \overleftrightarrow{OT} =$
2) $R\hat{O}S \cap \pi =$
3) $\overleftrightarrow{OT} \cap seme_{\pi}(T)$
4) $\overline{QR} \cap \overline{PS} =$
5) $\overrightarrow{PO} \cap \overrightarrow{RT} =$
6) $Q\hat{P}T \cap \pi =$

b) definiendo los planos que hagan falta, nombrar:

1) un semiespacio que contenga los puntos $O,\ P,\ R,\ S$ y T:..................
2) un par de rectas alabeadas:................
3) un ángulo que contenga los puntos $P,\ Q,\ R,$ y S: ....
4) un punto del semiplano de frontera $\overleftrightarrow{QS}$ que no contiene a P: ....

c) indicar si los puntos $O,\ R,\ P$ y T son coplanares. Justificar la respuesta.

3. Definir a través de operaciones entre conjuntos las figuras sombreadas. Indicar en cada caso si es convexa.



4. Determinar en cada caso si la figura que se propone es siempre, nunca o a veces convexa. En caso que lo sea a veces, dar un ejemplo en que sea convexa y uno en que no lo sea.

a) una recta;

b) una semirrecta;

c) un segmento;

d) un semiespacio;

e) la unión en el espacio de dos semiplanos con la misma frontera;

f) la unión de dos ángulos consecutivos;

g) la unión de dos figuras convexas.

5. Dibujar cinco puntos A, B, C, D y E en un plano y determinar con distintos colores las poligonales que se piden a continuación:

   a) la poligonal de vértices A, B, C, D y E.

   b) la poligonal de vértices A, C, D, B y E.

   c) la poligonal cerrada de vértices B, C, A, E y D.

6. Dibujar un triángulo de vértices $A,\ B$ y C y expresarlo como intersección de tres semiplanos. ¿Es posible expresarlo como intersección de dos ángulos?

7. Construir un pentágono $ABCDE$.

   a) Nombrar sus lados, vértices, ángulos y diagonales.

   b) Expresar el pentágono como intersección de semiplanos.

8. Completar la siguiente tabla.

Polígono	N° lados	N° diagonales	N° diagonales desde un vértice
		0	
	6		
			1
octógono			

9. Determinar una fórmula para calcular la cantidad de diagonales que tiene un polígono de n lados.

10. Para cada uno de los polígonos de la tabla anterior, realizar un dibujo y marcar todas las diagonales con extremo en uno de sus vértices. ¿Cuántos triángulos quedan determinados?

11. Demostrar que si P es un punto interior de un ángulo (es decir, no está sobre los lados) la semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que pasa por P está completamente contenida en el ángulo (prestar atención al Teorema 6).