1. Probar que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano divisible. ¿Cuál es su descomposición como suma directa de copias de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$?

2. Sean R, S dos anillos con unidad. Probar que $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ tiene una estructura de anillo (con unidad) tal que $(r \otimes s)(r' \otimes s') = (rr') \otimes (ss')$.

3. Sean A, B dos R-módulos. Probar que los funtores $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ y $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ son exactos a izquierda.

4. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías localmente pequeñas. Probar que si un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un adjunto a izquierda para un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ entonces existe un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ que es natural en X e Y. *Ayuda:* definir dos funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ y mostrar que existe un isomorfismo natural entre ellos.