Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Licenciatura en Matemática

Estructuras Algebraicas II (2019)

Guía 2: Producto y suma directa, módulos libres

1. Probar que el producto directo de una familia de módulos y sus proyecciones están caracterizados, salvo isomorfismo, por su propiedad universal.

2. Sea A_i un submódulo de M_i para cada $i \in I$. Probar que $\prod_{i\in I} A_i$ es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$ y que $\left(\prod_{i\in I} M_i\right) / \left(\prod_{i\in I} A_i\right) \simeq \prod_{i\in I} M_i/A_i$

3. Probar que si $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ es una partición de I, entonces $\prod_{i\in I} A_i \simeq \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I_j} A_i\right)$ para cada familia de R-módulos $\{A_i\}_{i\in I}$.

4. Probar que la suma directa de una familia de módulos y sus inclusiones están caracterizados, salvo isomorfismo, por su propiedad universal.

5. Sea A_i es un submódulo de M_i para cada $i \in I$. Probar que $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un submódulo de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ y que $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) / \left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} M_i/A_i$.

6. Probar que si $A_i \simeq B_i$ para todo $i \in I$ entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i \simeq \bigoplus_{i\in I} B_i$

7. Mostrar con un ejemplo que $A \oplus B \simeq A' \oplus B'$ no implica $B \simeq B'$, incluso cuando $A \simeq A'$.

8. Probar que si $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ es una partición de I, entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i \simeq \bigoplus_{j\in J}\left(\bigoplus_{i\in I_j} A_i\right)$ para cada familia de R-módulos $\{A_i\}_{i\in I}$.

9. Sean $\mu : A \to B$ y $\sigma : B \to A$ homomorfismos de módulos tales que $\sigma \circ \mu = \mathrm{id}_A$. Probar que $B \simeq \operatorname{im}\mu \oplus \ker\sigma$.

10. Sea I un conjunto totalmente ordenado[1]. Probar que un módulo M es la suma directa interna de una familia de submódulos $\{A_i\}_{i\in I}$ si y sólo si $M = \sum_{i\in I}$ y $A_j \cap \left(\sum_{i<j} A_i\right) = 0$ para todo $j \in J$.

11. Probar que la suma $\sum_{i\in I} A_i$ es directa si y sólo si toda subsuma finita $\sum_{i\in J} A_i$ es directa.

12. Sean A, B, C submódulos de algún R-módulo. Probar que si $A \subset C$ y $A \cap B = 0$ entonces $(A \oplus B) \cap C = A \oplus (B \oplus C)$.

13. Sean A, B, C submódulos de algún R-módulo. Probar que si $A \cap B = 0$ y $(A+B) \cap C = 0$, entonces $B \cap C = 0$ y $A \cap (B + C) = 0$. En otras palabras, si la suma $(A + B) + C$ es directa, también lo es $A + (B + C)$.

[1]Es decir, I está dotado de una relación binaria $\leq$ *reflexiva* ($i \leq i$), *transitiva* ($i \leq j$ y $j \leq k$ implica $i \leq k$) y *antisimétrica* ($i \leq j$ y $j \leq i$ implica $i = j$) tal que para todos $i, j \in I$ se tiene $i \leq j$ o bien $j \leq i$. A veces se escribe $i < j$ para decir que $i \leq j$ e $i \neq j$.

14. Dar un ejemplo de un submódulo que no sea un sumando directo.

15. Probar que un submódulo A de M es un sumando directo si y sólo si existe un endomorfismo η de M tal que $\operatorname{im} \eta = A$ y $\eta^2 = \eta$.

16. Probar que $\mathbb{Q}$, pensado como $\mathbb{Z}$-módulo, no admite una base pero todos los subconjuntos linealmente independientes maximales tienen la misma cardinalidad.

17. Probar que todo R-módulo M tiene un subconjunto linealmente independiente maximal y que todo subconjunto linealmente independiente genera un submódulo S tal que $S \cap A \neq 0$ para todo submódulo A de M.

18. Probar que una suma directa de R-módulos libres es libre.

19. Sea $R = \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ el anillo de endomorfismos de V, en donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ que admite una base numerable $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Sean α, β las transformaciones lineales de V tales que

$$\alpha(e_n) = \begin{cases} e_{n/2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \qquad \beta(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ e_{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

    a) Probar que $\{1\}$ y $\{\alpha, \beta\}$ son bases de ${}_RR$.

    b) Más generalmente, probar que ${}_RR$ tiene una base con m elementos para todo $m > 0$.

20. Sea M un módulo sobre un anillo de división. Probar que si $Y \subset M$ genera M y $X \subset Y$ es linealmente independiente, entonces M tiene una base B tal que $X \subset B \subset Y$.

21. Sea S un subespacio de un espacio vectorial V sobre un anillo de división. Probar que si $\dim V$ es finita y $\dim V = \dim S$ entonces $S = V$.

22. Sean V, W dos espacios vectoriales sobre el mismo anillo de división. Probar que si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $\dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim V$.

23. Sean $D \subset E \subset F$ anillos de división, cada uno subanillo del siguiente. Probar que

$$[F : D] = [F : E][E : D].$$

    (Aquí, por ejemplo, $[E : D]$ denota la dimensión de E como espacio vectorial sobre D.)

En los siguientes ejercicios R es un anillo con identidad.

24. Probar que R es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de R son 0 y R.

25. Probar que si R tiene un ideal bilátero que es también un ideal maximal a izquierda, entonces todas las bases de un R-módulo libre tienen la misma cardinalidad.

26. Probar que R es un anillo de división si y sólo si todo R-módulo es libre.