Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Licenciatura en Matemática

Estructuras Algebraicas II (2019)

Guía 1: Módulos, submódulos y homomorfismos

En lo que sigue, salvo aclaración, R-módulo significa R-módulo a izquierda.

1. Sea M un R-módulo.

   a) Verificar que se satisfacen $r0 = 0$ ($0 \in M$) y $(r - s)x = rx - sx$ para todos $r, s \in R$, $x \in M$.

   b) Mostrar que $rx = 0$ puede ocurrir incluso con $r \neq 0$ y $x \neq 0$.

2. Mostrar que el conjunto de endomorfismos de un grupo abeliano A, es decir

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A) = \{f : A \to A : f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ para todos } x, y \in A\},$$

   forma un anillo con identidad con las operaciones de suma punto a punto y composición.

3. Mostrar que todo grupo abeliano tiene una única estructura de $\mathbb{Z}$-módulo unitario.

4. Sea $n \geq 2$ y sea A un grupo abeliano. ¿Cuándo existe una estructura de $\mathbb{Z}_n$-módulo unitario en A? Y si existe, ¿es única?

5. Sea A un grupo abeliano. ¿Cuándo existe una estructura de $\mathbb{Q}$-módulo unitario en A? Y si existe, ¿es única?

6. Sea $\varphi : R \to S$ un homomorfismo de anillos con identidad y sea A un S-módulo unitario. Mostrar que A admite una estructura de R-módulo.

7. *a*) Probar (o recordar) que cualquier anillo R puede ser visto como un subanillo de un anillo con identidad R^1 tal que cualquier homomorfismo de anillos $R \to S$, de R en un anillo con identidad S, se extiende unívocamente a un homomorfismo de anillos con identidad $R^1 \to S$.

   b) Sea A un grupo abeliano. Probar que existe una correspondencia biyectiva entra las estructuras de R-módulo en A y las estructuras de R^1-módulo unitario en A.

8. Sea M un R-módulo unitario y sea I un ideal bilátero de R tal que $I \subset \mathrm{Ann}(M)$[1]. Mostrar que M admite una estructura de (R/I)-módulo.

9. Sea M un R-módulo. Probar que M tiene los mismos submódulos como R-módulo que como R^1-módulo (cfr. Ejercicio 7 para la notación)

10. Sea M un R-módulo (no necesariamente unitario) y sea $S \subset M$ un subconjunto. Describir los elementos del submódulo generado por S.

11. Sea A un submódulo de un R-módulo unitario M y sea I un ideal a izquierda de R. Se define LA como el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A con coeficientes en L.

[1] Recordar que $\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R : rx = 0 \text{ para todo } x \in M\}$.

a) Probar que LA es un submódulo de M. Más aún, mostrar que LA es el submódulo generado por el subconjunto $\{\ell a : \ell \in L, a \in A\}$

b) Probar que $LA \subset A$.

c) Probar que si L' es otro ideal a izquierda, entonces $L(L'A) = (LL')A$.

d) Probar que si $\{L_i\}_{i\in I}$ es una familia de ideal a izquierda de R y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de M entonces $L\left(\sum_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} LA_i$ y $\left(\sum_{i\in I} L_i\right) A = \sum_{i\in I} L_i A$.

12. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de R-módulos y sean C, D submódulos de A y B respectivamente.

    a) Mostrar que $\varphi(\varphi^{-1}(D)) = D \cap \operatorname{im}\varphi$.

    b) Mostrar que $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C + \ker\varphi$.

13. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de R-módulos. Mostrar que existe una correspondencia biyectiva entre los submódulos de A que contienen a $\ker\varphi$ y los submódulos de $\operatorname{im}\varphi$.

14. Sea M un R-módulo unitario y sea I un ideal bilátero de R. Mostrar que $M/(IM)$ tiene una estructura de (R/I)-módulo.

15. Sea R un dominio íntegro (conmutativo). Mostrar que todos los ideales principales no nulos de R son isomorfos (como R-módulos).

16. Sean A, B dos submódulo M. Mostrar con un ejemplo que $A \simeq B$ no implica $M/A \simeq M/B$.

17. Sea R un anillo con identidad y sean $x, y \in R$. Mostrar que si $xR = yR$ entonces Rx es isomorfo a Ry (como R-módulos). Más aún, mostrar que existe un isomorfismo $Rx \to Ry$ que manda x en y.

18. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de R-módulos.

    a) Mostrar que φ es un monomorfismo si y sólo si para todo par de homomorfismos de R-módulos $\psi, \eta : C \to A$, $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \eta$ implica $\psi = \eta$.

    b) Mostrar que φ es un epimorfismo si y sólo si para todo par de homomorfismos de R-módulos $\psi, \eta : B \to C$, $\psi \circ \varphi = \eta \circ \varphi$ implica $\psi = \eta$.

19. Sea M un R-módulo unitario. Mostrar que si $M = Rm$ es cíclico y R es conmutativo entonces $\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(m)$, en donde $\operatorname{Ann}(m) = \{r \in R : rm = 0\}$.

20. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal en donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Denotamos por V^T al $\mathbb{K}[x]$-módulo definido por $pv = p(T)v$, (con $p \in \mathbb{K}[x], v \in V$).

    a) Mostrar que si T es la transformación lineal nula entonces $\mathbb{K}[x]/\operatorname{Ann}(V^T) \simeq \mathbb{K}$ (como anillos).

    b) En tal caso, la estructura de $(\mathbb{K}[x]/\operatorname{Ann}(V^T))$-espacio vectorial de V^T se identifica con la estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial de V.