

Categorías. Parte 8.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

15 de noviembre de 2018

Yoneda Lemma

Idea

La filosofía del lema de Yoneda proviene de una rama de la matemática que se llama “teoría de representaciones”.

Rápidamente hablando, la teoría de representaciones propone que para estudiar objetos abstractos y complicados uno trate de “representarlos” como simetrías de un objeto “más sencillo”.

Ejemplo 1

Si G grupo, estudiamos los morfismos

$$G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

O sea, representamos a G con matrices (transformaciones lineales en \mathbb{R}^n).

Ejemplo 2: Teorema de Cayley

Si G es un grupo finito, existe n tal que

$$G \hookrightarrow S_n$$

O sea, representamos a G por permutaciones de n elementos.

Idea

Esta idea aplicada a teoría de categorías nos dice que para entender mejor una categoría \mathcal{C} uno puede tratar de representarla en una categoría más sencilla. Una categoría ideal para representar a \mathcal{C} es la categoría **Set**. O sea, lo que tendríamos que estudiar son los funtores de \mathcal{C} en **Set**.

Ingredientes

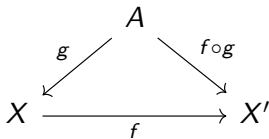
- ▶ Los funtores de \mathcal{C} en **Set** forman una categoría: **Set** ^{\mathcal{C}} (los morfismos de esta categoría son las transformaciones naturales).
- ▶ Si \mathcal{C} es una categoría localmente pequeña, para cada objeto A de \mathcal{C} tenemos definido un funtor Hom covariante

$$h^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$h^A(X) = \text{Hom}(A, X)$$

$$h^A(f : X \rightarrow X') = \text{Hom}(A, f)$$

$$h^A(f)(g) = f \circ g$$



$$h^A(f) : \underbrace{\text{Hom}(A, X)}_{\ni g} \rightarrow \underbrace{\text{Hom}(A, X')}_{\ni f \circ g}$$

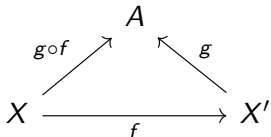
Hom contravariante

$h_A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ (funtor contravariante)

$$h_A(X) = \text{Hom}(X, A)$$

$$h_A(f : X \rightarrow X') = \text{Hom}(f, A)$$

$$h_A(f)(g) = g \circ f$$



$$h_A(f) : \underbrace{\text{Hom}(X', A)}_{\exists g} \rightarrow \underbrace{\text{Hom}(X, A)}_{\exists g \circ f}$$

Lema (Yoneda)

Sean \mathcal{C} una categoría localmente pequeña, A un objeto de \mathcal{C} y $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtor (covariante) arbitrario. Entonces, las transformaciones naturales de h^A en F están en correspondencia biyectiva con los elementos de $F(A)$:

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \simeq F(A).$$

Más aún, este isomorfismo es natural en A y F si pensamos a $\mathrm{Nat}(h^A, F)$ y $F(A)$ como funtores de $\mathcal{C} \times \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Set}$

Observación 1: el funtor $F(A)$

- ▶ $\mathbb{F} : \mathcal{C} \times \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Set}$
- ▶ $\mathbb{F}(A, F) := F(A)$
- ▶ Para $f : A \rightarrow A'$ y $\eta : F \rightrightarrows F'$,

$$\mathbb{F}(f, \eta) : F(A) \rightarrow F'(A')$$

se define por

$$\mathbb{F}(f, \eta) = F'(f) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ F(f)$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F'(A) \\ \downarrow F(f) & \searrow \mathbb{F}(f, \eta) & \downarrow F'(f) \\ F(A') & \xrightarrow{\eta_{A'}} & F'(A') \end{array}$$

Observación 2: el funtor $\text{Nat}(h^A, F)$

- ▶ $\mathbb{G} : \mathcal{C} \times \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Set}$
- ▶ $\mathbb{G}(A, F) = \text{Nat}(h^A, F)$
- ▶ Para $f : A \rightarrow A'$ y $\eta : F \rightarrow F'$,

$$\mathbb{G}(f, \eta) : \text{Nat}(h^A, F) \rightarrow \text{Nat}(h^{A'}, F')$$

se define en cada $\mu : h^A \rightarrow F$, por

$$\begin{aligned}\mathbb{G}(f, \eta)(\mu) &= \tilde{\mu} : h^{A'} \rightarrow F' \\ \tilde{\mu}_X &= \eta_X \circ \mu_X \circ h_X(f)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} h^A(X) & \xrightarrow{\mu_X} & F(X) \\ \uparrow h_X(f) & & \downarrow \eta_X \\ h^{A'}(X) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_X} & F'(X) \end{array}$$

Demostración del Lema de Yoneda.

- ▶ Cada $\mu \in \text{Nat}(h^A, F)$ queda completamente determinada por el elemento $\mu_A(\text{id}_A) \in F(A)$.
- ▶ En efecto, dada $f \in h^A(X) = \text{Hom}(A, X)$, calculamos

$$\mu_X(f) = \mu_X(f \circ \text{id}_A) = \mu_X(h^A(f)(\text{id}_A)) = F(f)(\mu_A(\text{id}_A))$$

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) & \xrightarrow{\mu_A} & F(A) \\ h^A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ h^A(X) & \xrightarrow{\mu_X} & F(X) \end{array}$$

- ▶ Recíprocamente, cada elemento en $F(A)$ determina una transformación natural $\mu : h^A \rightarrow F$ de esta misma forma. \square

Ejercicio: Lema de Yoneda contravariante

Probar que para cada funtor contravariante $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ existe una correspondencia biyectiva

$$\text{Nat}(h_A, G) \simeq G(A).$$

Más aún, este isomorfismo es natural en A y G .

Yoneda embedding

- ▶ Si aplicamos el Lema de Yoneda para el caso en que $F = h^B$ es otro functor Hom nos queda un isomorfismo

$$\text{Nat}(h^A, h^B) \simeq h^B(A) = \text{Hom}(B, A)$$

que es natural en A y B .

- ▶ Dicho de otro modo, lo que tenemos es un functor covariante

$$h^- : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$$

de la categoría opuesta de \mathcal{C} en la categoría de funtores de \mathcal{C} en \mathbf{Set} que es *fully faithful* (biyectivo en morfismos).

- ▶ La versión contravariante del Lema de Yoneda nos da el llamado **embedding de Yoneda**

$$h_- : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

Otra vez el teorema de Cayley

- ▶ Un grupo G se puede presentar como una categoría \mathcal{G} :
 - ▶ $\text{ob } \mathcal{G} = \{\bullet\}$
 - ▶ $\text{mor } \mathcal{G} = \text{Hom}(\bullet, \bullet) = h^\bullet(\bullet) = G$
- ▶ El lema de Yoneda dice que $\text{Nat}(h^\bullet, h^\bullet) \simeq h^\bullet(\bullet) = G$.
- ▶ Un elemento $\eta \in \text{Nat}(h^\bullet, h^\bullet)$, o sea una transformación natural $\eta : h^\bullet \rightarrow h^\bullet$ es esencialmente una **función equivariante** de G en G .

$$\begin{array}{ccc} h^\bullet(\bullet) = G & \xrightarrow{\eta_\bullet} & G = h^\bullet(\bullet) \\ \downarrow h^\bullet(g)=g \times - & & \downarrow h^\bullet(g)=g \times - \\ h^\bullet(\bullet) = G & \xrightarrow{\eta_\bullet} & G = h^\bullet(\bullet) \end{array} \quad \boxed{\eta_\bullet(gx) = g\eta_\bullet(x)}$$

- ▶ **Ejercicio:** las funciones equivariantes son biyectivas.
- ▶ Luego, G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones (funciones biyectivas) de G .