Categorías. Parte 7.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

13 de noviembre de 2018

Mónadas

A monad is just a monoid in the category of endofuntors.

Saunders Mac Lane
Categories for the working mathematician

Idea/Ejemplo

Dada una adjunción

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

¿qué propiedades tiene el endofuntor

$$T = G \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}?$$

Tenemos asociadas dos transformaciones naturales:

- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad de adjunción)
- $\mu : T^2 \to T$ que se define como sigue:
  - $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$
  - $\varepsilon_{F(X)} : F(G(F(X))) \to F(X)$
  - $\mu_X := G(\varepsilon_{F(X)}) : \underbrace{G(F(G(F(X))))}_{T^2(X)} \to \underbrace{G(F(X))}_{T(X)}$

Ejercicio

μ es una transformación natural.

Estas dos transformaciones naturales se caracterizan por las siguientes propiedades

Asociatividad

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

En donde

- $(T\mu)_X = T(\mu_X) : T^3(X) \to T^2(X)$
- $(\mu_T)_X = \mu_{T(X)} : T^3(X) \to T^2(X)$

Neutro

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

En donde

- $(T\eta)_X = T(\eta_X) : T(X) \to T^2(X)$
- $(\eta_T)_X = \eta_{T(X)} : T(X) \to T^2(X)$

Ejercicio

$T\mu$, μ_T, $T\eta$, η_T son transformaciones naturales. ¿Se puede generalizar?

Demostración.

Veamos la demostración de la asociatividad y dejemos la otra como ejercicio. Debemos ver que para cada X, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"] & T(X)
\end{tikzcd}$$

$$\mu_X \circ \mu_{T(X)} \stackrel{?}{=} \mu_X \circ T(\mu_X)$$

O sea, hay que ver que

$$\boxed{G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(\varepsilon_{F(G(F(X)))}) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(F(G(\varepsilon_{F(X)})))}$$

Demostración (cont.)

Para ver esto se usa que $\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ es una transformación natural: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(G(F(G(F(X))))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(G(F(X)))}"] \arrow[d, "F(G(\varepsilon_{F(X)}))"'] & F(G(F(X))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\
F(G(F(X))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(X)}"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

y luego aplicamos el funtor G. $\square$

Definición

Una **mónada** sobre una categoría $\mathscr{C}$ consiste de un endofuntor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ y dos transformaciones naturales

- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad)
- $\mu : T^2 \to T$ (multiplicación)

tales que

$$\mu \circ \mu_T = \mu \circ T\mu, \qquad \mu \circ \eta_T = \mathrm{id}_T = \mu \circ T\eta$$

O sea, los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: power set

Consideremos el funtor

- $T : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$
- $T(X) = \mathcal{P}(X)$
- $T(X \xrightarrow{f} Y) = \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}(Y)$ (aplicar f a cada subconjunto).

Entonces T es una mónada con unidad

$$\eta_A : A \to T(A), \qquad a \mapsto \{a\}$$

y multiplicación

$$\mu_A(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) \to \mathcal{P}(A), \qquad \mathcal{X} \mapsto \bigcup \mathcal{X}$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{X} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, entonces $\mu_A(\mathcal{X}) = \{a, b\}$.

Ejemplo (cont.)

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & T(T((A))) \arrow[d, "\mu_A"] & T(A) \arrow[l, "T(\eta_A)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \\
& T(A) &
\end{tikzcd}$$

- $T(\eta_A) : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots\}$
- $\mu_{T(A)} : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{\{a, b, c, \ldots\}\}$
- $\mu_A \circ T(\eta_A) : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{a, b, c, \ldots\}$
- $\mu_A \circ \eta_{T(A)} : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{a, b, c, \ldots\}$ ✓

Ejemplo (cont.)

Verificar como ejercicio que conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(T(T(A))) \arrow[r, "T(\mu_A)"] \arrow[d, "\mu_{T(A)}"'] & T(T(A)) \arrow[d, "\mu_A"] \\
T(T(A)) \arrow[r, "\mu_A"] & T(A)
\end{tikzcd}
$$

Pregunta

¿Proviene esta mónada de una adjunción?

Respuesta

Sí, pensar como ejercicio cuál sería una adjunción para esta mónada.

Comentario

Toda mónada proviene de adjunción. Más aún dada una mónada

$$(T, \eta, \mu), \qquad T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

Uno puede formar la categoría $\mathbf{Adj}(\mathscr{C}, T)$ de todas las adjunciones F, G tales que

$$(T, \eta, \mu) = (G \circ F, \eta, G\varepsilon F)$$

en donde η y ε son la unidad y co-unidad de la adjunción, respectivamente. La categoría $\mathbf{Adj}(\mathscr{C}, T)$ tiene

- objeto inicial: categoría de Kleisli
- objeto terminal: categoría de Eilenberg-Moore