

# Categorías. Parte 6.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

8 de noviembre de 2018

# Adjunciones

## Repaso de la clase anterior

- ▶  $\text{free} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ , el funtor “libre”
  - ▶  $\text{free}(\Sigma) = \Sigma^*$  (monoide libre en  $\Sigma$ )
  - ▶  $\text{free}(f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) = f^* : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  (morfismo de monoides).

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \hookrightarrow & \Sigma_1^* \\ \downarrow f & & \downarrow \exists! f^* \\ \Sigma_2 & \hookrightarrow & \Sigma_2^* \end{array}$$

- ▶  $\text{fgt} : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ , el funtor “olvido”
- ▶ Propiedad universal (adjunción):

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \hookrightarrow & \text{fgt}(\text{free}(\Sigma)) \\ & \searrow f & \swarrow \text{fgt}(\tilde{f}) \\ & & \text{fgt}(M) \end{array}$$

## Definición

Una **adjunción** entre dos funtores  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$  es una transformación natural  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \dashrightarrow G \circ F$  tal que para todo  $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ , para todo  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$  y para todo  $f : X \rightarrow G(Y)$  existe un único morfismo  $\tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ & \searrow f & \swarrow G(\tilde{f}) \\ & G(Y) & \end{array}$$

## Nomenclatura (la explicaremos más adelante)

- ▶  $F$  se dice que es un **adjunto a izquierda** de  $G$ .
- ▶  $G$  se dice que es un **adjunto a derecha** de  $F$ .
- ▶  $\eta$  es la **unidad de adjunción**.

## Observación

En el ejemplo anterior, el funtor  $\text{free} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$  también lo podemos realizar como

$$\text{List} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$$

En este caso, el morfismo

$$\eta_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \text{fgt}(\text{List}(\Sigma))$$

está definido por  $\eta_{\Sigma}(s) = [s]$ , para cada  $s \in \Sigma$ . **Siempre hay que verificar que  $\eta$  es una transformación natural:** o sea si  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  es una función, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \xrightarrow{i_1} & \text{fgt}(\text{List}(\Sigma_1)) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{fgt}(\text{List}(f)) \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{i_2} & \text{fgt}(\text{List}(\Sigma_2)) \end{array}$$

$\forall s_1 \in \Sigma_1,$

$$\begin{aligned}(\text{fgt}(\text{List}(f)) \circ i_1)(s_1) &= \text{fgt}(\text{List}(f))(i_1(s_1)) \\ &= \text{fgt}(\text{List}(f))([s_1]) \\ &= \text{List}(f)([s_1]) \\ &= [f(s_1)] \\ &= i_2(f(s_1)) \\ &= (i_2 \circ f)(s_1).\end{aligned}$$

Luego

$$\text{fgt}(\text{List}(f)) \circ i_1 = i_2 \circ f.$$

## Ejemplo

Consideremos el siguiente caso particular:

►  $f : \Sigma \rightarrow \text{fgt}(\mathbb{N}_0)$ ,

$$f \equiv 1 \quad (\text{función constante})$$

- El morfismo de monoides asociado  $\tilde{f} : \text{List}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{N}_0$  es la función longitud

$$\boxed{\tilde{f} = \text{len}}$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\eta_\Sigma} & \text{fgt}(\text{List}(\Sigma)) \\ & \searrow 1 & \swarrow \text{fgt}(\text{len}) \\ & \text{fgt}(\mathbb{N}_0) & \end{array}$$

## Co-unidad de adjunción

- Unidad de una adjunción

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D} \quad \boxed{\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \dashrightarrow G \circ F}$$
  
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ & \searrow f & \swarrow (G(\tilde{f})) \\ & G(Y) & \end{array} \quad \exists! \tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$$

- Co-unidad de una adjunción

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D} \quad \boxed{\varepsilon : F \circ G \dashrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}}$$
  
$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ & \swarrow F(g^*) & \nearrow g \text{ (arbitraria)} \\ & F(X) & \end{array} \quad \exists! g^* : X \rightarrow G(Y)$$

¿Cómo se construyen estas cosas?

- ▶ Debemos definir  $\varepsilon_Y$
- ▶ Verificar que es una transformación natural
- ▶ Definir  $g^*$
- ▶ Probar la unicidad

Definición de  $\varepsilon_Y$

$$\begin{array}{ccc} G(Y) & \xrightarrow{\eta_{G(Y)}} & G(F(G(Y))) \\ & \searrow \text{id}_{G(Y)} & \swarrow G(\varepsilon_Y) \\ & G(Y) & \end{array} \qquad \begin{array}{c} F(G(Y)) \\ \downarrow \exists! \varepsilon_Y \\ Y \end{array}$$



$\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  (naturalidad)

Hay que ver que para cada  $g : Y \rightarrow Y'$ , conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ F(G(g)) \downarrow & & \downarrow g \\ F(G(Y')) & \xrightarrow{\varepsilon_{Y'}} & Y' \end{array}$$

$$g \circ \varepsilon_Y \stackrel{?}{=} \varepsilon_{Y'} \circ F(G(g))$$

$\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  (cont.)

Primero notamos que en el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 G(Y) & \xrightarrow{G(g)} & G(Y') & & \\
 \downarrow \text{id}_{G(Y)} & \searrow \eta_{G(Y)} & \downarrow & \searrow \eta_{G(Y')} & \\
 & G(F(G(Y))) & \xrightarrow{G(F(G(g)))} & G(F(G(Y'))) & \\
 & \swarrow G(\varepsilon_Y) & \downarrow \text{id}_{G(Y')} & \swarrow G(\varepsilon_{Y'}) & \\
 G(Y) & \xrightarrow{G(g)} & G(Y') & & 
 \end{array}$$

conmutan los triángulos laterales, el rectángulo de atrás y el paralelogramo superior (pues  $\eta$  es una transformación natural). Con lo cual tenemos que,

$$G(\varepsilon_{Y'}) \circ G(F(G(g))) \circ \eta_{G(Y)} = G(g) = G(g) \circ G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}$$

$\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  (cont.)

Así, obtenemos que tanto  $G(\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)))$  como  $G(g \circ \varepsilon_Y)$  hacen que conmute el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(Y) & \xrightarrow{\eta_{G(Y)}} & G(F(G(Y))) \\ & \searrow^{G(g)} & \swarrow \text{---} \\ & & G(Y') \end{array}$$

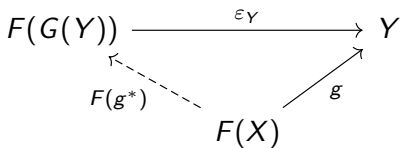
y por propiedades de la adjunción sigue que

$$\boxed{\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)) = g \circ \varepsilon_Y}$$

como queríamos probar.

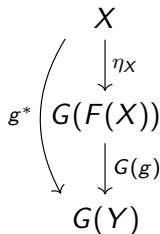
## Existencia y unicidad de $g^*$

Buscamos  $g^* : X \rightarrow G(Y)$  tal que conmuta el diagrama



Si existe tal  $g^*$ , entonces usando la definición de  $\varepsilon_Y$  y que  $\eta$  es transformación natural, tenemos

$$\begin{aligned} g^* &= \text{id}_{G(Y)} \circ g^* \\ &= G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} \circ g^* \\ &= G(\varepsilon_Y) \circ G(F(g^*)) \circ \eta_X \\ &= G(\varepsilon_Y F(g^*)) \circ \eta_X. \\ &= G(g) \circ \eta_X \end{aligned}$$



Lo cual muestra la existencia y la unicidad.

## Ejercicio

Construir la unidad de adjunción a partir de la co-unidad de adjunción (esto ayudará a entender mejor lo que acabamos de hacer).

## Observación/Ejercicio

Una adjunción  $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$  determina un isomorfismo (biyección) de Hom-sets

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

que es natural en  $X$  e  $Y$ . Esto explica la terminología de adjunto a izquierda para  $F$  y adjunto a derecha para  $G$ .

## Notación

$$\frac{X \rightarrow G(Y)}{F(X) \rightarrow Y}$$

A cada  $f : X \rightarrow G(Y)$  le corresponde  $\tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$  y a cada  $g : F(X) \rightarrow Y$  le corresponde  $g^* : X \rightarrow G(Y)$ .

## Ejemplo

Consideremos el  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{1}$ . ¿Tiene  $G$  un adjunto a izquierda?

- ▶  $\mathbf{1}$ :  $\bullet \looparrowright \text{id} \bullet$ .
- ▶  $F : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{D} \iff F(\bullet) \in \text{ob } \mathcal{D}$
- ▶  $F$  adjunto a izquierda de  $G$ :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad ! \quad} & G(F(\bullet)) \\ & \searrow \quad ! \quad & \swarrow G(F(\bullet) \rightarrow Y) \\ & & G(Y) \end{array}$$

- ▶  $\exists ! F(\bullet) \rightarrow Y$
- ▶  $F$  es un adjunto a izquierda de  $G \iff F(\bullet)$  es un objeto inicial en la categoría  $\mathcal{D}$

## Ejemplo

Consideremos el functor diagonal  $\text{diag} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$

$$\text{diag}(X) = (X, X)$$

$$\text{diag}(f) = (f, f)$$

¿Tiene  $\text{diag}$  un adjunto a derecha? Debería ser un functor

$G : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X=?} & G(X, X) & (X, X) \\ & \searrow & \swarrow G(\tilde{f}) & \downarrow \exists! \tilde{f} \\ & & G(Y_1, Y_2) & (Y_1, Y_2) \end{array}$$

Si  $G(Y_1, Y_2) = Y_1 \times Y_2$  puedo definir

$$\tilde{f} = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$$

$$\eta_X = \text{id}_X \times \text{id}_X : X \rightarrow X \times X$$

## Ejemplo (cont.)

- ▶ Si  $\mathcal{C}$  tiene productos binarios, entonces el functor producto

$$- \times - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

es un adjunto a izquierda para el functor diagonal.

- ▶ Co-unit = ???

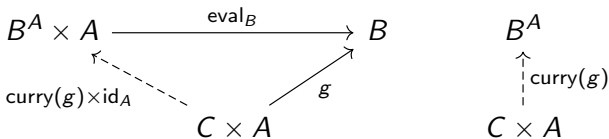
$$\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} : \text{diag}(- \times -(Y_1, Y_2)) \rightarrow (Y_1, Y_2)$$

$$\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} : (Y_1 \times Y_2, Y_1 \times Y_2) \rightarrow (Y_1, Y_2)$$

**Ejercicio:**  $\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} = (\pi_1, \pi_2)$



## Ejemplo: exponenciales



- Hay una biyección  $\text{Hom}(C \times A, B) \rightarrow \text{Hom}(C, B^A)$

$$g \mapsto \text{curry}(g)$$

**Ejercicio:** esta función es 1-1 y sobre.

- Informal: esto nos da una adjunción

$$\frac{C \rightarrow B^A}{C \times A \rightarrow B}$$

## Ejemplo (cont.)

- Formal: fijando un conjunto  $A$ , el funtor

$$- \times A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

tiene adjunto a derecha

$$(\ )^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

- Co-unidad de adjunción:  $\varepsilon_B = \text{eval}_B$

$$\begin{array}{ccc} B^A \times A & \xrightarrow{\varepsilon_B = \text{eval}_B} & B \\ & \nwarrow \text{curry}(g) \times \text{id}_A & \nearrow g \\ & C \times A & \end{array}$$

$g^*$

- ¿Unidad de adjunción?

## Ejercicio

Una categoría  $\mathcal{C}$  con productos binarios tiene exponenciales  $\iff$  para cada  $A \in \text{ob } \mathcal{C}$  el funtor  $- \times A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tiene un adjunto a derecha.

## Ejemplo

Consideremos las categorías (posets)

►  $Int = (\mathbb{Z}, \leq)$

►  $Real = (\mathbb{R}, \leq)$

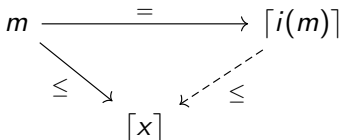
y los funtores

►  $i : Int \hookrightarrow Real$

►  $\lceil \cdot \rceil : Real \rightarrow Int$  (función techo)

$$x \leq y \implies \lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$$

$$x \rightarrow y \implies \lceil x \rceil \rightarrow \lceil y \rceil$$



►  $m \leq \lceil x \rceil \implies i(m) \leq x$

► Esto mismo vale para cualquier conexión de Galois (ejercicio).