Categorías. Parte 5.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

6 de noviembre de 2018

Más sobre transformaciones naturales

Repaso de la clase anterior

- Transformación natural $\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

- $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ CCC (categorías pequeñas)
  - $\mathrm{ob}\, \mathscr{D}^{\mathscr{C}} = \{F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}\}$ (funtores)
  - $\mathrm{mor}\, \mathscr{D}^{\mathscr{C}} = \{\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G\}$ (transformaciones naturales)

Ejemplo

- Sea $\mathscr{C}$ una categoría sin flechas (discreta). Es decir,

$$\operatorname{mor}\mathscr{C} = \{\mathrm{id}_A : A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}\}$$

- $\mathscr{C}$ es esencialmente un conjunto.
- Si $\mathscr{D}$ es otra categoría discreta, entonces

$$\mathscr{D}^{\mathscr{C}} \simeq (\operatorname{ob}\mathscr{D})^{\operatorname{ob}\mathscr{C}}$$

  pues al no haber flechas no triviales, cualquier funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ queda determinado por lo que vale en objetos: $F : \operatorname{ob}\mathscr{C} \to \operatorname{ob}\mathscr{D}$.
- Como cualquier conjunto puede pensarse como una categoría discreta, tenemos que la noción de funtor generaliza a la noción de función.

Ejemplo: categoría $\mathbf{1}$

- $\operatorname{ob}\mathbf{1} = \{\bullet\}$, $\operatorname{mor}\mathbf{1} = \{\mathrm{id}_\bullet : \bullet \to \bullet\}$
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña: $\mathscr{C}^{\mathbf{1}} = ???$
- $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}^{\mathbf{1}}$ son objetos isomorfos en **Cat**, es decir, existe un par de funtores

$$F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathbf{1}} \qquad\qquad G : \mathscr{C}^{\mathbf{1}} \to \mathscr{C}$$

tales que

$$F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{C}^{\mathbf{1}}} \qquad\qquad G \circ F = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$$

Ejemplo (cont.)

- $\operatorname{ob} \mathscr{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{funtores } \alpha : \mathbf{1} \to \mathscr{C}\}$

$$\alpha : \mathbf{1} \to \mathscr{C} \iff \alpha(\bullet) \in \mathscr{C}$$

- $\operatorname{mor} \mathscr{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{transformaciones naturales } \eta : \alpha \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \beta\}$

$$\eta : \alpha \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \beta \iff \eta_{\mathbf{1}} : \alpha(\bullet) \to \beta(\bullet)$$

$$\begin{tikzcd} \alpha(\bullet) \arrow[r, "\eta_\bullet"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\alpha(\bullet)}"'] & \beta(\bullet) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\beta(\bullet)}"] \\ \alpha(\bullet) \arrow[r, "\eta_\bullet"] & \beta(\bullet) \end{tikzcd}$$

$\eta_\bullet$ es cualquier morfismo

Ejemplo (cont.)

- Definimos $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathbf{1}}$
  - Para $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$,

$$\boxed{F(A) = \alpha \qquad \text{donde } \alpha(\bullet) = A}$$

  - Para $f : A \to B$ en $\operatorname{mor}\mathscr{C}$

$$\boxed{F(f) = \eta : \alpha \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \beta, \qquad \text{donde } \eta_\bullet = f : \alpha(\bullet) \to \beta(\bullet)}$$

- Definimos $G : \mathscr{C}^{\mathbf{1}} \to \mathscr{C}$

$$\boxed{G(\alpha) = \alpha(\bullet)} \qquad \boxed{G(\eta) = \eta_\bullet}$$

- Chequear $F = G^{-1}$

Resumen

$$\mathsf{ob}\,\mathscr{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{funtores } \alpha : \mathbf{1} \longrightarrow \mathscr{C}\} \simeq \mathsf{ob}\,\mathscr{C}$$

$$\mathsf{mor}\,\mathscr{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{transf. nat. } \eta : \alpha \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \beta\} \simeq \mathsf{mor}\,\mathscr{C}$$

Ejemplo: categoría $\mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{\bullet_1}"] \arrow[r] & \bullet_2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{\bullet_2}"] \end{tikzcd}$$

- $\mathscr{C}^{\mathbf{2}} = ??? \simeq \mathscr{C}^{\to} = ???$
- $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}^{\to} = \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$
- $\mathrm{Hom}^{\to}(f, f') = \left\{ (a, b) : \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd} \text{ conmuta} \right\}$

Ejemplo (cont.)

- $\alpha : \mathbf{2} \to \mathscr{C} \iff \alpha \in \operatorname{mor} \mathscr{C} \iff \alpha \in \operatorname{ob} \mathscr{C}^{\to}$

$$\begin{tikzcd}
& \bullet_2 \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & & B \\
\bullet_1 \arrow[ur, "f_\bullet"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & & A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{f_\bullet \text{ está fija}}$

- Una transformación natural $\eta : \alpha \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \alpha'$ entre los funtores $\alpha, \alpha' : \mathbf{2} \to \mathscr{C}$
  - $\alpha \iff \alpha(f_\bullet) = f : A \to B$
  - $\alpha \iff \alpha'(f_\bullet) = f' : A' \to B'$

  queda determinada por
  - $\eta_{\bullet_1} : \alpha(\bullet_1) \to \alpha'(\bullet_1) \iff a : A \to A'$
  - $\eta_{\bullet_2} : \alpha(\bullet_2) \to \alpha'(\bullet_2) \iff b : B \to B'$

Ejemplo (cont.)

- Los siguientes tres diagramas deben conmutar

$$\begin{tikzcd} \alpha(\bullet_1) \arrow[r, "\eta_{\bullet_1}"] \arrow[d, "\alpha(\mathrm{id}_{\bullet_1})"'] & \alpha'(\bullet_1) \arrow[d, "\alpha'(\mathrm{id}_{\bullet_1})"] \\ \alpha(\bullet_1) \arrow[r, "\eta_{\bullet_1}"] & \alpha'(\bullet_1) \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A' \arrow[d, "\mathrm{id}_{A'}"] \\ A \arrow[r, "a"] & A' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \alpha(\bullet_2) \arrow[r, "\eta_{\bullet_2}"] \arrow[d, "\alpha(\mathrm{id}_{\bullet_2})"'] & \alpha'(\bullet_2) \arrow[d, "\alpha'(\mathrm{id}_{\bullet_2})"] \\ \alpha(\bullet_2) \arrow[r, "\eta_{\bullet_2}"] & \alpha'(\bullet_2) \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & B' \arrow[d, "\mathrm{id}_{B'}"] \\ B \arrow[r, "b"] & B' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \alpha(\bullet_1) \arrow[r, "\eta_{\bullet_1}"] \arrow[d, "\alpha(f_\bullet)"'] & \alpha'(\bullet_1) \arrow[d, "\alpha'(f_\bullet)"] \\ \alpha(\bullet_2) \arrow[r, "\eta_{\bullet_2}"] & \alpha'(\bullet_2) \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "b"] & B' \end{tikzcd}$$

Ejemplo (cont.)

- Luego, η está unívocamente determinada por un par $(a, b) \in \mathrm{Hom}^{\rightarrow}(f, f')$.
- Esto define un funtor $F : \mathscr{C}^2 \rightarrow \mathscr{C}^{\rightarrow}$

$$\boxed{F(\alpha) = f} \qquad \boxed{F(\eta) = (a, b)}$$

- Ejercicio: chequear que F es un isomorfismo en **Cat** encontrando explícitamente una inversa.

Ejemplo: doble dual

- En álgebra lineal se suele decir (coloquialmente) que dos espacios vectoriales V y W son "naturalmente isomorfos" si uno puede probar que existe un isomorfismo (de espacios vectoriales) $\varphi : V \to W$ que puede ser definido sin usar bases.
- Por ejemplo, para espacios vectoriales reales de dimensión finita uno tiene un isomorfismo entre V y su dual

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ lineal}\}.$$

- Dada una base $e_1, \ldots, e_n$ de V.
- Construimos la base dual $e_1^*, \ldots, e_n^*$: $\boxed{e_i^*(e_j) = \delta_{ij}}$
- $e_i \to e_i^*$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales (que no es natural porque depende de la base que elijamos inicialmente).

Ejemplo (cont.)

- Sin embargo, V es naturalmente isomorfo a V^{**}.
- En efecto, podemos definir un isomorfismo $\varepsilon : V \to V^{**}$ como $\varepsilon(v) = \varepsilon_v : V^* \to \mathbb{R}$

$$\varepsilon_v(\alpha) = \alpha(v)$$

- Usando categorías esto se interpreta diciendo que hay un isomorfismo natural $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin}}} \overset{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{dual} \circ \mathrm{dual}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "(f^t)^t"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

- η_V corresponde a la evaluación ε definida más arriba, pero ahora varían los espacios vectoriales V.

Observación

V nunca puede ser naturalmente isomorfo a V^*:

- id : $\mathbf{Vect} \to \mathbf{Vect}$ covariante
- dual : $\mathbf{Vect} \to \mathbf{Vect}$ contravariante

Aunque parezca extraño, este hecho es una demostración de que cualquier isomorfismo que podamos definir entre V y V^* depende de la elección de una base.

Adjunciones

Idea: una adjunción relaciona dos funtores

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

que realizan trabajos "inversos" o "complementarios".

Hay otras nociones similares que estudiamos anteriormente.

Categorías isomorfas

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \qquad \begin{aligned} F \circ G &= \mathrm{id}_{\mathscr{D}} \\ G \circ F &= \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \end{aligned} \qquad \text{(isomorfismo en } \mathbf{Cat}\text{)}$$

Categorías equivalentes

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \qquad \left.\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathscr{C}} &\stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G \circ F \\ \mathrm{id}_{\mathscr{D}} &\stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F \circ G \end{aligned}\right\} \text{ isomorfismos naturales}$$

Para tener en cuenta

- A diferencia de los conceptos anteriores, la noción de adjunción es una relación entre funtores, no entre categorías
- Es un concepto más débil.

Antes de dar una definición formal tratemos de entender qué es una adjunción dando un ejemplo.

Ejemplo

- Σ un conjunto (alfabeto)
- Σ^* monoide libre generado por Σ
  - producto = concatenación
  - neutro = “ ” (palabra vacía)
- $\Sigma^* \simeq \mathrm{List}(\Sigma)$

Este monoide tiene la siguiente propiedad universal:

Ejemplo (cont.)

- $i : \Sigma \hookrightarrow \Sigma^*$ (palabras de longitud 1).
- Para todo monoide M y para toda función $f : \Sigma \to M$, existe un único morfismo de monoides $\tilde{f} : \Sigma^* \to M$ tal que $f = \tilde{f} \circ i$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \Sigma^* \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& M &
\end{tikzcd}
\qquad
\tilde{f}(a_1 a_2 \cdots a_n) = f(a_1) f(a_2) \cdots f(a_n)$$

- ATENCIÓN: este no es un diagrama en una categoría
  - i, f son flechas en **Set**
  - $\tilde{f}$ es una flecha en **Mon**
- ¿Cómo podemos describir esta situación en un lenguaje más categórico?

Ejemplo (cont.)

- free : **Set** $\to$ **Mon**, el funtor "libre" que asigna a cada conjunto Σ el monoide libre Σ^* (y a cada morfismo $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ en **Set**, el morfismo $\tilde{f} : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ en **Mon**. Ejercicio: usar la propiedad universal para explicar cómo se define este morfismo $\tilde{f}$)
- fgt : **Mon** $\to$ **Set** el funtor "olvido"

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{fgt}(\mathrm{free}(\Sigma)) \arrow[dl, dashed, "\mathrm{fgt}(\tilde{f})"] \\
& \mathrm{fgt}(M) &
\end{tikzcd}$$

Definición

Una **adjunción** entre dos funtores $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ es una transformación natural $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G \circ F$a tal que para todo $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, para todo $Y \in \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$ y para todo $f : X \to G(Y)$ existe un único morfismo $\tilde{f} : F(X) \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & & G(F(X)) \arrow[dl, dashed, "G(\tilde{f})"] \\ & G(Y) & \end{tikzcd}$$

Nomenclatura (la explicaremos más adelante)

- F se dice que es un **adjunto a izquierda** de G.
- G se dice que es un **adjunto a derecha** de F.
- η es la **unidad de adjunción.**