

# Categorías. Parte 5.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

6 de noviembre de 2018

# Más sobre transformaciones naturales

## Repaso de la clase anterior

- ▶ Transformación natural  $\eta : F \dashrightarrow G$

$$\begin{array}{ccc} A & & F(A) \xrightarrow{\eta_A} G(A) \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) \qquad \qquad \downarrow G(f) \\ B & & F(B) \xrightarrow{\eta_B} G(B) \end{array}$$

- ▶  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  CCC (categorías pequeñas)
  - ▶  $\text{ob } \mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \{F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}\}$  (funtores)
  - ▶  $\text{mor } \mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \{\eta : F \dashrightarrow G\}$  (transformaciones naturales)

## Ejemplo

- ▶ Sea  $\mathcal{C}$  una categoría sin flechas (discreta). Es decir,

$$\text{mor } \mathcal{C} = \{\text{id}_A : A \in \text{ob } \mathcal{C}\}$$

- ▶  $\mathcal{C}$  es esencialmente un conjunto.
- ▶ Si  $\mathcal{D}$  es otra categoría discreta, entonces

$$\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \simeq (\text{ob } \mathcal{D})^{\text{ob } \mathcal{C}}$$

pues al no haber flechas no triviales, cualquier funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  queda determinado por lo que vale en objetos:  
 $F : \text{ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{D}$ .

- ▶ Como cualquier conjunto puede pensarse como una categoría discreta, tenemos que la noción de funtor generaliza a la noción de función.

## Ejemplo: categoría $\mathbf{1}$

- ▶  $\text{ob } \mathbf{1} = \{\bullet\}$ ,  $\text{mor } \mathbf{1} = \{\text{id}_\bullet : \bullet \rightarrow \bullet\}$
- ▶ Si  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña:  $\mathcal{C}^{\mathbf{1}} = ???$
- ▶  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$  son objetos isomorfos en **Cat**, es decir, existe un par de funtores

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{1}}$$

$$G : \mathcal{C}^{\mathbf{1}} \rightarrow \mathcal{C}$$

tales que

$$F \circ G = \text{id}_{\mathcal{C}^{\mathbf{1}}}$$

$$G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$$

## Ejemplo (cont.)

►  $\text{ob } \mathcal{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{funtores } \alpha : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}\}$

$$\alpha : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C} \iff \alpha(\bullet) \in \mathcal{C}$$

►  $\text{mor } \mathcal{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{transformaciones naturales } \eta : \alpha \dashrightarrow \beta\}$

$$\eta : \alpha \dashrightarrow \beta \iff \eta_{\bullet} : \alpha(\bullet) \rightarrow \beta(\bullet)$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\bullet) & \xrightarrow{\eta_{\bullet}} & \beta(\bullet) \\ \text{id}_{\alpha(\bullet)} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\beta(\bullet)} \\ \alpha(\bullet) & \xrightarrow{\eta_{\bullet}} & \beta(\bullet) \end{array} \quad \eta_{\bullet} \text{ es cualquier morfismo}$$

## Ejemplo (cont.)

► Definimos  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^1$

► Para  $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ ,

$$F(A) = \alpha \quad \text{donde } \alpha(\bullet) = A$$

► Para  $f : A \rightarrow B$  en  $\text{mor } \mathcal{C}$

$$F(f) = \eta : \alpha \dashrightarrow \beta, \quad \text{donde } \eta_\bullet = f : \alpha(\bullet) \rightarrow \beta(\bullet)$$

► Definimos  $G : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}$

$$G(\alpha) = \alpha(\bullet)$$

$$G(\eta) = \eta_\bullet$$

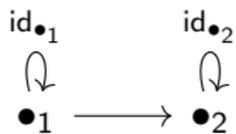
► Chequear  $F = G^{-1}$

## Resumen

$$\text{ob } \mathcal{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{funtores } \alpha : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}\} \simeq \text{ob } \mathcal{C}$$

$$\text{mor } \mathcal{C}^{\mathbf{1}} = \{\text{transf. nat. } \eta : \alpha \dashrightarrow \beta\} \simeq \text{mor } \mathcal{C}$$

## Ejemplo: categoría 2



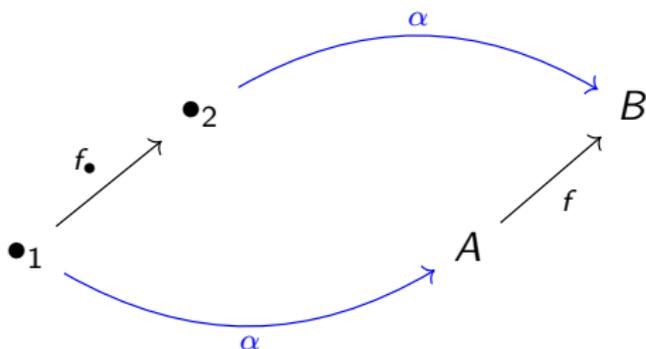
►  $\mathcal{C}^2 = ??? \simeq \mathcal{C}^{\rightarrow} = ???$

►  $\text{ob } \mathcal{C}^{\rightarrow} = \text{mor } \mathcal{C}$

►  $\text{Hom}^{\rightarrow}(f, f') = \left\{ (a, b) : \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \text{ conmuta} \right\}$

## Ejemplo (cont.)

$$\blacktriangleright \alpha : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{C} \iff \alpha \in \text{mor } \mathcal{C} \iff \alpha \in \text{ob } \mathcal{C}^{\rightarrow}$$



$f_{\bullet}$  está fija

$\blacktriangleright$  Una transformación natural  $\eta : \alpha \dashrightarrow \alpha'$  entre los funtores  $\alpha, \alpha' : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{C}$

$$\blacktriangleright \alpha \iff \alpha(f_{\bullet}) = f : A \rightarrow B$$

$$\blacktriangleright \alpha \iff \alpha'(f_{\bullet}) = f' : A' \rightarrow B'$$

queda determinada por

$$\blacktriangleright \eta_{\bullet_1} : \alpha(\bullet_1) \rightarrow \alpha'(\bullet_1) \iff a : A \rightarrow A'$$

$$\blacktriangleright \eta_{\bullet_2} : \alpha(\bullet_2) \rightarrow \alpha'(\bullet_2) \iff b : B \rightarrow B'$$

## Ejemplo (cont.)

- Los siguientes tres diagramas deben conmutar

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\bullet_1) & \xrightarrow{\eta_{\bullet_1}} & \alpha'(\bullet_1) \\ \alpha(\text{id}_{\bullet_1}) \downarrow & & \downarrow \alpha'(\text{id}_{\bullet_1}) \\ \alpha(\bullet_1) & \xrightarrow{\eta_{\bullet_1}} & \alpha'(\bullet_1) \end{array} \iff \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A' \\ \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_{A'} \\ A & \xrightarrow{a} & A' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\bullet_2) & \xrightarrow{\eta_{\bullet_2}} & \alpha'(\bullet_2) \\ \alpha(\text{id}_{\bullet_2}) \downarrow & & \downarrow \alpha'(\text{id}_{\bullet_2}) \\ \alpha(\bullet_2) & \xrightarrow{\eta_{\bullet_2}} & \alpha'(\bullet_2) \end{array} \iff \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{b} & B' \\ \text{id}_B \downarrow & & \downarrow \text{id}_{B'} \\ B & \xrightarrow{b} & B' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\bullet_1) & \xrightarrow{\eta_{\bullet_1}} & \alpha'(\bullet_1) \\ \alpha(f_\bullet) \downarrow & & \downarrow \alpha'(f_\bullet) \\ \alpha(\bullet_2) & \xrightarrow{\eta_{\bullet_2}} & \alpha'(\bullet_2) \end{array} \iff \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{b} & B' \end{array}$$

## Ejemplo (cont.)

- ▶ Luego,  $\eta$  está unívocamente determinada por un par  $(a, b) \in \text{Hom}^{\rightarrow}(f, f')$ .
- ▶ Esto define un funtor  $F : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}^{\rightarrow}$

$$\boxed{F(\alpha) = f} \qquad \boxed{F(\eta) = (a, b)}$$

- ▶ Ejercicio: chequear que  $F$  es un isomorfismo en **Cat** encontrando explícitamente una inversa.

## Ejemplo: doble dual

- ▶ En álgebra lineal se suele decir (coloquialmente) que dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$  son “naturalmente isomorfos” si uno puede probar que existe un isomorfismo (de espacios vectoriales)  $\varphi : V \rightarrow W$  que puede ser definido sin usar bases.
- ▶ Por ejemplo, para espacios vectoriales reales de dimensión finita uno tiene un isomorfismo entre  $V$  y su dual

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ lineal}\}.$$

- ▶ Dada una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$ .
- ▶ Construimos la base dual  $e_1^*, \dots, e_n^*$ :  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$
- ▶  $e_j \rightarrow e_j^*$  induce un isomorfismo de espacios vectoriales (que no es natural porque depende de la base que elijamos inicialmente).

## Ejemplo (cont.)

- ▶ Sin embargo,  $V$  es naturalmente isomorfo a  $V^{**}$ .
- ▶ En efecto, podemos definir un isomorfismo  $\varepsilon : V \rightarrow V^{**}$  como  $\varepsilon(v) = \varepsilon_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varepsilon_v(\alpha) = \alpha(v)$$

- ▶ Usando categorías esto se interpreta diciendo que hay un isomorfismo natural  $\varepsilon : \text{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{fin}}} \xrightarrow{\cdot} \text{dual} \circ \text{dual}$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\eta_V} & V^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow (f^t)^t \\ W & \xrightarrow{\eta_W} & W^{**} \end{array}$$

- ▶  $\eta_V$  corresponde a la evaluación  $\varepsilon$  definida más arriba, pero ahora varían los espacios vectoriales  $V$ .

## Observación

$V$  nunca puede ser naturalmente isomorfo a  $V^*$ :

- ▶  $\text{id} : \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Vect}$  covariante
- ▶  $\text{dual} : \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Vect}$  contravariante

Aunque parezca extraño, este hecho es una demostración de que cualquier isomorfismo que podamos definir entre  $V$  y  $V^*$  **depende de la elección de una base.**

# Adjunciones

**Idea:** una adjunción relaciona dos funtores

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

que realizan trabajos “inversos” o “complementarios”.

Hay otras nociones similares que estudiamos anteriormente.

## Categorías isomorfas

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

$$F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$$

(isomorfismo en **Cat**)

$$G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$$

## Categorías equivalentes

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cdot} G \circ F \\ \text{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\cdot} F \circ G \end{array} \right\}$$

isomorfismos naturales

## Para tener en cuenta

- ▶ A diferencia de los conceptos anteriores, la noción de adjunción es una relación **entre funtores**, no entre categorías
- ▶ Es un concepto más débil.

Antes de dar una definición formal tratemos de entender qué es una adjunción dando un ejemplo.

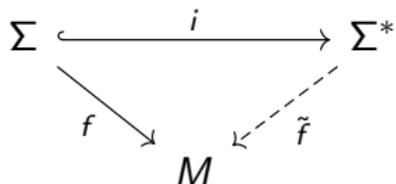
## Ejemplo

- ▶  $\Sigma$  un conjunto (alfabeto)
- ▶  $\Sigma^*$  monoide libre generado por  $\Sigma$ 
  - ▶ producto = concatenación
  - ▶ neutro = " " (palabra vacía)
- ▶  $\Sigma^* \simeq \text{List}(\Sigma)$

Este monoide tiene la siguiente propiedad universal:

## Ejemplo (cont.)

- ▶  $i : \Sigma \hookrightarrow \Sigma^*$  (palabras de longitud 1).
- ▶ Para todo monoide  $M$  y para toda función  $f : \Sigma \rightarrow M$ , existe un único morfismo de monoides  $\tilde{f} : \Sigma^* \rightarrow M$  tal que  $f = \tilde{f} \circ i$ .



$$\tilde{f}(a_1 a_2 \cdots a_n) = f(a_1) f(a_2) \cdots f(a_n)$$

- ▶ **ATENCIÓN:** este no es un diagrama en una categoría
  - ▶  $i, f$  son flechas en **Set**
  - ▶  $\tilde{f}$  es una flecha en **Mon**
- ▶ ¿Cómo podemos describir esta situación en un lenguaje más categórico?

## Ejemplo (cont.)

- ▶  $\text{free} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ , el funtor “libre” que asigna a cada conjunto  $\Sigma$  el monoide libre  $\Sigma^*$  (y a cada morfismo  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  en  $\mathbf{Set}$ , el morfismo  $\tilde{f} : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  en  $\mathbf{Mon}$ . Ejercicio: usar la propiedad universal para explicar cómo se define este morfismo  $\tilde{f}$ )
- ▶  $\text{fgt} : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$  el funtor “olvido”

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{i} & \text{fgt}(\text{free}(\Sigma)) \\ & \searrow f & \swarrow \text{fgt}(\tilde{f}) \\ & & \text{fgt}(M) \end{array}$$

## Definición

Una **adjunción** entre dos funtores  $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$  es una transformación natural  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  tal que para todo  $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ , para todo  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$  y para todo  $f : X \rightarrow G(Y)$  existe un único morfismo  $\tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ & \searrow f & \swarrow G(\tilde{f}) \\ & G(Y) & \end{array}$$

## Nomenclatura (la explicaremos más adelante)

- ▶  $F$  se dice que es un **adjunto a izquierda** de  $G$ .
- ▶  $G$  se dice que es un **adjunto a derecha** de  $F$ .
- ▶  $\eta$  es la **unidad de adjunción**.