Categorías. Parte 4.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

1 de noviembre de 2018

Funtores

Idea: los funtores son los morfismos de categorías.

Definición

Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ dos categorías. Un **funtor** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ asigna:

- a cada objeto $A \in \operatorname{ob} \mathscr{C}$, un objeto $F(A) \in \operatorname{ob} \mathscr{D}$;
- a cada morfismo $f : A \to B$ en $\operatorname{mor} \mathscr{C}$, un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\operatorname{mor} \mathscr{D}$ tal que:
- para todo $A \in \operatorname{ob} \mathscr{C}$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;
- para todos $f, g \in \operatorname{mor} \mathscr{C}$ tales que tenga sentido la composición $g \circ f$, se tiene $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)"'] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C) \end{tikzcd}$$

Ejemplo

- Dado un conjunto S, construimos

$$\mathrm{List}(S) := \{L : \text{listas (finitas) de elementos de } S\}.$$

- $\mathrm{List} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ es un funtor: ¿cómo se define en morfismos?
- Si $f : S \to S'$ es una función, $\mathrm{List}(f) : \mathrm{List}(S) \to \mathrm{List}(S')$ es la función que en $L = [s_1, \ldots, s_n] \in \mathrm{List}(S)$ vale

$$\mathrm{List}(f)(L) = [f(s_1), \ldots, f(s_n)].$$

- Claramente se tienen:
  - $\mathrm{List}(\mathrm{id}_S) = \mathrm{id}_{\mathrm{List}(S)}$;
  - $\mathrm{List}(g \circ f) = \mathrm{List}(g) \circ \mathrm{List}(f)$.

Ejemplo bis

Para cada conjunto S, tenemos que $\mathrm{List}(S)$ es un monoide. Luego, lo que en realidad obtuvimos en el ejemplo anterior es un funtor $\mathrm{List} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$. Sólo hay que chequear que para cada función $f : S \to S'$, la función $\mathrm{List}(f) : \mathrm{List}(S) \to \mathrm{List}(S')$ es un morfismo de monoides (ejercicio):

- $\mathrm{List}(f)([\,]) = [\,]$;
- $\forall L_1, L_2 \in \mathrm{List}(S)$,

$$\mathrm{List}(f)(L_1 * L_2) = \mathrm{List}(f)(L_1) * \mathrm{List}(f)(L_2).$$

Ejemplo (funtor olvido)

Un ejemplo de **funtor olvido** es $\mathrm{fgt} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$:

- $\mathrm{fgt}(G) = G$ (como conjunto, se olvida que G es un grupo);
- $\mathrm{fgt}(f : G \to H) = f : G \to H$ (como función, se olvida que f es un morfismo de grupos).

En general, si $\mathscr{C}$ es una categoría concreta (los objetos son conjuntos y los morfismos funciones que preservan una estructura), siempre tenemos un funtor olvido

$$\mathrm{fgt} : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}.$$

Aunque también tiene sentido considerar funtores que se olvidan sólo una parte de la estructura. Por ejemplo:

- $\mathrm{fgt} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Grp}$
- $\mathrm{fgt} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Mon}$
- $\mathrm{fgt} : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$
- $\mathrm{fgt} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$
- $\mathrm{fgt} : \mathbf{Poset} \to \mathbf{PreOrd}$
- etc.

Ejemplo

Si $\mathscr{C}$ es una categoría con productos binarios y $B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ está fijo, podemos construir un **funtor producto:**

$$- \times B : \mathscr{C} \to \mathscr{C}.$$

- $(- \times B)(A) = A \times B$;
- para cada $f : A \to A'$,

$$(- \times B)(f) = f \times \mathrm{id}_B : A \times B \to A' \times B'$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] \arrow[dd, dashed, "f \times \mathrm{id}_B"] & \\
A \arrow[d, "f"'] & & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
A' & A' \times B \arrow[l, "\pi'_{A'}"] \arrow[r, "\pi'_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ejemplo/Ejercicio: composición de funtores

Dados dos funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ podemos definir un funtor

$$G \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$$

por

- $(G \circ F)(A) = G(F(A))$,
- $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{\qquad f \qquad} A' & \qquad\qquad & \mathscr{C} \\ \\ F(A) \xrightarrow{\quad F(f) \quad} F(A') & & \mathscr{D} \\ \\ G(F(A)) \xrightarrow{G(F(A))} G(F(A')) & & \mathscr{E} \end{array}$$

Ejemplo: **Cat**

- **Cat** es la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y cuyos morfismos son los funtores.
- **Cat** es una categoría grande: $\mathbf{Cat} \notin \operatorname{ob} \mathbf{Cat}$ ¿por qué?

Ejemplo/Ejercicio

Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña (es decir, $\mathrm{Hom}(A, B)$ es un conjunto para todos A, B.)

- Fijando $A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ podemos definir un funtor

$$\mathrm{Hom}(A, -) : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$$

- $\mathrm{Hom}(A, -)(B) = \mathrm{Hom}(A, B)$
- $\mathrm{Hom}(A, -)(f) = \mathrm{Hom}(A, f) = ???$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(A,f)} & \mathrm{Hom}(A, B') \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & B' \\ & A \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, dashed, "f \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

Chequear que si $B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{f'} B''$, entonces

$$\mathrm{Hom}(A, f' \circ f) = \mathrm{Hom}(A, f') \circ \mathrm{Hom}(A, f)$$

Ejemplo*

- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{fin}}$ categoría de espacios vectoriales de dimensión finita.
- $\text{dual} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{fin}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{fin}}$.
- $\text{dual}(V) = V^*$.
- $\text{dual}(T) = T^t$.

$$V \xrightarrow{T} W \qquad\qquad W^* \xrightarrow{T^t} V^*$$

- No es funtor con la definición que dimos pues cambia el sentido de las flechas. Sin embargo, sí respeta las composiciones:

$$\begin{aligned}\text{dual}(T_1 \circ T_2) &= (T_1 \circ T_2)^t = T_2^t \circ T_1^t \\ &= \text{dual}(T_2) \circ \text{dual}(T_1).\end{aligned}$$

- Estos funtores se llaman **contravariantes**, en contraposición a los funtores **covariantes**, que definimos al principio.

Funtores contravariantes

- $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$
- $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

$\Longleftrightarrow$

- $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$
- funtor covariante (definición usual)

Es decir, los funtores contravariantes pueden pensarse como funtores covariantes pasando a la categoría opuesta.

Ejemplo

Sea $\mathscr{C}$ categoría localmente pequeña:

- $\mathrm{Hom}(-, B) : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ funtor contravariante
- $\mathrm{Hom}(-, -) : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ es un **bifuntor** (contravariante en la primera variable y covariante en la segunda).

Transformaciones naturales

Motivación: $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$

Recordemos que $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ es la categoría cuyos objetos son las funciones y cuyos morfismos son los "cuadrados conmutativos"

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' \end{array}$$

$$f \xrightarrow{(a,b)} f'$$

O sea, un morfismo en $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ es una "flecha entre flechas".

Idea informal

Las transformaciones naturales son los "morfismos" entre funtores.

Definición

Sean $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores (entre las mismas categorías). Una **transformación natural** $\eta : F \overset{\cdot}{\longrightarrow} G$ asigna a cada $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ un morfismo $\eta_A : F(A) \to G(A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}$.

$$\begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\eta_B]{} & G(B) \end{array}$$

También se suele decir que el morfismo η_A es **natural** en A. Se dice que η_A es un **isomorfismo natural** si η_A es un isomorfismo para todo A.

Ejemplo

$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es naturalmente isomorfo a sí mismo.

$$\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F, \qquad \eta_A = \mathrm{id}_{F(A)}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\mathrm{id}_{F(A)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_{F(B)}"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Ejemplo no trivial

- Recordemos el funtor $\mathrm{List} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.
- $\mathrm{rev} : \mathrm{List} \to \mathrm{List}$ (invertir el orden de los elementos de una lista) es una transformación natural.
- $\mathrm{rev}_S : \mathrm{List}(S) \to \mathrm{List}(S)$ invierte las listas armadas con elementos de S, por ejemplo, $\mathrm{rev}_{\mathbb{N}}([1,2,3]) = [3,2,1]$.
- Si $f : S \to S'$, entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{List}(S) \arrow[r, "\mathrm{rev}_S"] \arrow[d, "\mathrm{List}(f)"'] & \mathrm{List}(S) \arrow[d, "\mathrm{List}(f)"] \\
\mathrm{List}(S') \arrow[r, "\mathrm{rev}_{S'}"'] & \mathrm{List}(S')
\end{tikzcd}$$

- Además $\mathrm{rev}_S \circ \mathrm{rev}_S = \mathrm{id}_{\mathrm{List}(S)}$, de donde sigue que η es un isomorfismo natural.

Pregunta

¿Se puede hacer lo mismo con

$$\mathrm{List} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}?$$

Ejemplo en **Set**

- Fijamos $A \in \operatorname{ob}\mathbf{Set}$ (un conjunto)
- Definimos un funtor $F_A : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$
  - $F_A(B) = B^A \times A$
  - $F_A(f) = (f \circ -) \times \mathrm{id}_A$

  Más precisamente:
  - $f : B \to C$
  - $f \circ - : B^A \to C^A$

  Recordar:
  - $B^A = \{\beta : A \to B\}$
  - $C^A = \{\gamma : A \to C\}$

  Luego:
  - $\gamma = f \circ \beta \in C^A$
- $\varepsilon : F_A \to \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}$ es una transformación natural.
  - $\varepsilon =$ evaluación en elementos de A
  - $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}} =$ funtor identidad de la categoría **Set**

Ejemplo (cont.)

$$\begin{tikzcd}
F_A(B) = B^A \times A \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, dashed, "F_A(f) = (f \circ -) \times \mathrm{id}_A"'] & B = \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}(B) \arrow[d, "f = \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}(f)"] \\
F_A(C) = C^A \times A \arrow[r, "\varepsilon_C"'] & C = \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}(C)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{f \circ \varepsilon_B = \varepsilon_C \circ (f \circ -) \times \mathrm{id}_A}$$

- $(f \circ \varepsilon_B)(\beta, a) = f(\varepsilon_B(\beta, a)) = f(\beta(a))$
- $$\begin{aligned}(\varepsilon_C \circ (f \circ -) \times \mathrm{id}_A)(\beta, a) &= \varepsilon_C((f \circ -) \times \mathrm{id}_A(\beta, a)) \\ &= \varepsilon_C(f \circ \beta, a) \\ &= (f \circ \beta)(a) = f(\beta(a))\end{aligned}$$

Ejemplo/Definición

Las transformaciones naturales se pueden componer:

- $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores
- $\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$, $\tau : G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} H$ transformaciones naturales
- Entonces $\tau \circ \eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} H$ es una transformación natural

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & & F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"] \arrow[rr, bend left, "(\tau\circ\eta)_A := \tau_A \circ \eta_A"] & G(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ B & & F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] \arrow[rr, bend right, "(\tau\circ\eta)_B := \tau_B \circ \eta_B"'] & G(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

- Como conmutan los cuadrados interiores, conmuta el rectángulo exterior (esto es un ejercicio de la práctica).

Consecuencia importante

Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña, entonces $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ es una categoría con:

- $\operatorname{ob} \mathscr{D}^{\mathscr{C}} = \{\text{funtores } F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}\}$
- $\operatorname{mor} \mathscr{D}^{\mathscr{C}} = \{\text{transformaciones naturales}\}$
- Completar los detalles como ejercicio, pero ya vimos todos los ingredientes:
  - acabamos de definir la composición y
  - para definir la transformación natural identidad id_F, recordar lo que hicimos cuando vimos que todo funtor es naturalmente isomorfo a sí mismo.

Corolario

Cat *es una CCC.*

Demostración.

Ejercicio. $\square$