

# Categorías. Parte 3.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

30 de octubre de 2018

# Límites

## Diagramas (definición informal)

Un **diagrama** en una categoría es una colección “consistente” de vértices (objetos) y flechas (morfismos). O sea, se supone que si

$A \xrightarrow{f} B$  es parte del diagrama, entonces  $f \in \text{Hom}(A, B)$ .

Dos diagramas se dice que tienen el mismo tipo si el “grafo” subyacente es el mismo.

### Observación 1

En la definición de diagrama no pedimos que los diagramas sean conmutativos.

### Observación 2

Usando funtores (veremos más adelante) es posible dar una definición formal de diagrama.

## Ejemplos

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow \\ A & \rightrightarrows & B \end{array}$$

$A$

$B$

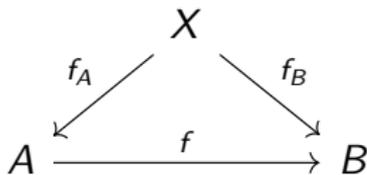
$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \Downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

mismo tipo

## Conos

Un **cono** para un diagrama  $\mathbb{D}$  consiste de

- ▶ un objeto  $X$ ,
- ▶ un morfismo  $f_D : X \rightarrow D$  para cada  $D \in \text{ob } \mathbb{D}$  tales que si  $f : A \rightarrow B$  está en  $\text{mor } \mathbb{D}$  entonces el siguiente triángulo conmuta:



## Límites

Un **límite** para un diagrama  $\mathbb{D}$  es un cono

$\{f_A : X \rightarrow A : A \in \text{ob } \mathbb{D}\}$  con la siguiente propiedad universal: si  $\{f'_A : X' \rightarrow A : A \in \text{ob } \mathbb{D}\}$  es otro cono sobre  $\mathbb{D}$ , entonces existe un único morfismo  $k : X' \rightarrow X$  tal que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{k} & X \\ & \searrow f'_A & \swarrow f_A \\ & & A \end{array}$$

conmuta para todo  $A \in \text{ob } \mathbb{D}$ .

### Observación/Ejercicio

Un límite para  $\mathbb{D}$  es un objeto terminal en  $\mathbf{Cone}(\mathbb{D})$ , la categoría de conos de  $\mathbb{D}$ . Consecuentemente, los límites son únicos salvo isomorfismo. (Pensar también por qué  $\mathbf{Cone}(\mathbb{D})$  es una categoría.)

## Ejemplo

Si  $\mathbb{D} = \emptyset$ , un límite para  $\mathbb{D}$  es un objeto terminal en  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{c} X' \\ \downarrow \exists! \\ X \end{array}$$

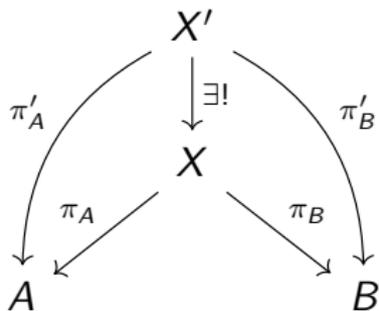
$\forall X', \exists! X' \rightarrow X$  (cualquier objeto  $X'$  es un cono sobre  $\mathbb{D} = \emptyset$ )

## Ejemplo

Si  $\mathbb{D}$  es el diagrama sin flechas

$A$                        $B$

un límite para  $\mathbb{D}$  es... un producto entre  $A$  y  $B$ :



## Observación

Si  $\mathbb{D}$  es un diagrama sin flechas,  $\lim \mathbb{D}$  es un producto entre los objetos de  $\mathbb{D}$ . En particular, esto nos dice que **no siempre existen los límites para un diagrama dado.**

## Ejemplo (importante)

Para el diagrama  $\mathbb{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

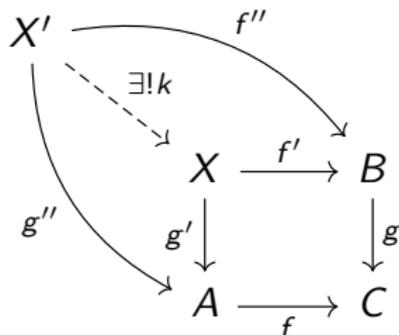
un cono es un cuadrado **conmutativo**

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & B \\ g' \downarrow & \searrow h & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

- ▶  $g \circ f' = h$
- ▶  $f \circ g' = h$
- ▶ Es decir: conociendo  $\mathbb{D}$ ,  $f'$  y  $g'$  podemos deducir  $h$ .

El cono  $(X, f', g')$  es un límite para  $\mathbb{D}$  si tiene la siguiente propiedad universal: para todo cono  $(X', f'', g'')$  existe un único  $k : X' \rightarrow X$  tal que conmuta el siguiente diagrama:

## Ejemplo (cont.)



El límite para este tipo de diagramas se llama **pull-back** de  $f$  y  $g$ .

## Ejercicio

Encontrar el pull-back en **Set**.

## Ejemplo/Ejercicio

¿Cuál es el límite de  $A \rightrightarrows B$  ?

La noción dual de límite de un diagrama  $\mathbb{D}$  es la de **colímite**.

Como ejercicio, definir

- ▶ co-cono,
- ▶ colímite,
- ▶ **coCone**( $\mathbb{D}$ ). (Un colímite será un objeto inicial en la categoría de co-conos de  $\mathbb{D}$ .)

### co-Ejemplos

- ▶  $\mathbb{D} = \emptyset$ ,  $\text{colím } \mathbb{D} = \text{objeto inicial}$
- ▶  $\mathbb{D} : A \quad B$ ,  $\text{colím } \mathbb{D} = \text{coproducto}$

- ▶  $\mathbb{D} :$   
$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}, \text{colím } \mathbb{D} = \text{push-out}$$

## Teorema

*Si existen todos los productos y los ecualizadores, entonces existen todos los límites.*

## coTeorema

*Si existen todos los coproductos y los coecualizadores, entonces existen todos los colímites.*

# Exponenciales

## Ejemplo

En **Set**,

$$B^A = \{f : A \rightarrow B\} \simeq \prod_{a \in A} B$$

es un conjunto.

**Pregunta:** ¿cómo definimos  $B^A$  sin recurrir a sus elementos?

$$\begin{array}{ccc} B & & B^A \times A \xrightarrow{\varepsilon} B \\ \exists! \tilde{g} \uparrow & & \uparrow \tilde{g} \times \text{id}_A \\ C & & C \times A \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow g \end{array}$$

## Ejemplo (cont.)

- ▶ En este caso es importante que  $B^A = \prod_{a \in A} B$  sea un producto.
- ▶  $\varepsilon : B^A \times A \rightarrow B$  es la evaluación

$$\varepsilon(f, a) = f(a) = \pi_a(f).$$

- ▶ Para construir  $\tilde{g} : C \rightarrow B^A$  a partir de  $g : C \times A \rightarrow B$  procedemos como sigue:
- ▶ Para cada  $a \in A$ , tenemos  $g_a : C \rightarrow B$  definida por  $g_a(c) = g(c, a)$ .
- ▶ La propiedad universal del producto dice que existe una única  $\tilde{g} : C \rightarrow B^A$  que “conmuta” con todas las proyecciones  $\pi_a$ :

$$\varepsilon(\tilde{g}(c), a) = \tilde{g}(c)(a) = g(c, a).$$

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos binarios y sean  $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$ . Un objeto  $B^A$  es un **exponencial** si existe un morfismo  $\varepsilon : B^A \times A \rightarrow B$  tal que para todo morfismo  $g : C \times A \rightarrow B$  existe un único morfismo  $\tilde{g} : C \rightarrow B^A$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} B^A \times A & \xrightarrow{\varepsilon} & B \\ \tilde{g} \times \text{id}_A \uparrow & \nearrow g & \\ C \times A & & \end{array} \quad \varepsilon \circ (\tilde{g} \times \text{id}_A) = g$$

**Notación:**  $\tilde{g} = \text{curry}(g)$ .

## Definición

Una **categoría cartesiana cerrada (CCC)** es una categoría  $\mathcal{C}$  con objeto terminal, productos binarios y exponenciales (es decir, para todos  $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$ , existe  $B^A$ ).

## Ejemplo

**Set** es CCC:  $B^A = \text{Hom}(A, B)$ .

## Ejercicio\*

**Grp** no es CCC, ¿es **Ab** CCC?

## Ejercicio

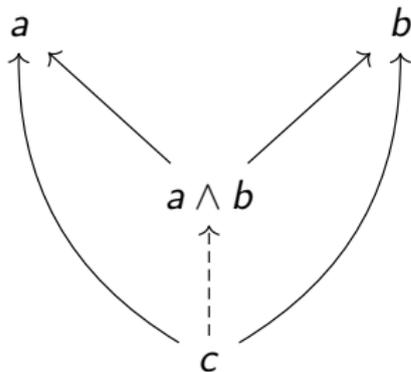
En una CCC:

- ▶  $B^A$  es único salvo isomorfismo;
- ▶  $1^A \simeq 1$ ;
- ▶  $B^1 \simeq B$ .

## Ejemplo

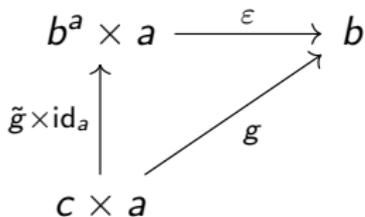
Un álgebra de Boole es una CCC:

- ▶  $(B, \vee, \wedge, 0, 1, ( )^c) = (B, \leq)$  es una categoría (poset);
- ▶ objeto terminal:  $1 = \text{máx } B$ ;
- ▶ productos:  $a \times b = ??? = a \wedge b = \text{ínf}\{a, b\}$ ;



- ▶ exponenciales:  $b^a = a^c \vee b$  (implicación lógica " $a \implies b$ ").

## Ejemplo (cont.)

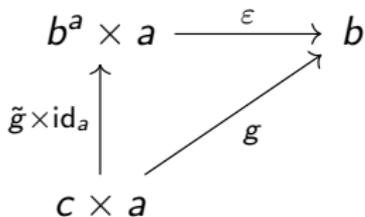


La **unicidad** de las flechas está garantizada porque estamos trabajando en un postet (a lo sumo una flecha entre dos objetos), pero tenemos que verificar su **existencia**.

- ▶  $\varepsilon: b^a \times a \leq b \iff (a^c \vee b) \wedge a \leq b \checkmark$
- ▶  $g: c \wedge a \leq b$  (dato).
- ▶  $\text{id}_a: a \leq a \checkmark$
- ▶  $\tilde{g}: c \leq b^a = a^c \vee b$ . En efecto,

$$\begin{aligned}c \vee b^a &= c \vee a^c \vee b = [c \wedge (a \vee a^c)] \vee a^c \vee b \\&= (c \wedge a) \vee (c \wedge a^c) \vee a^c \vee b \\&= [(c \wedge a^c) \vee a^c] \vee [(c \wedge a) \vee b] \\&= a^c \vee b = b^a \quad \checkmark\end{aligned}$$

## Ejemplo (cont.)



La **unicidad** de las flechas está garantizada porque estamos trabajando en un postet (a lo sumo una flecha entre dos objetos), pero tenemos que verificar su **existencia**.

- ▶  $\varepsilon: b^a \times a \leq b \iff (a^c \vee b) \wedge a \leq b \checkmark$
- ▶  $g: c \wedge a \leq b$  (dato).
- ▶  $\text{id}_a: a \leq a \checkmark$
- ▶  $\tilde{g}: c \leq b^a = a^c \vee b$ . En efecto,

$$\begin{aligned}c \vee b^a &= c \vee a^c \vee b = [c \wedge (a \vee a^c)] \vee a^c \vee b \\&= (c \wedge a) \vee (c \wedge a^c) \vee a^c \vee b \\&= [(c \wedge a^c) \vee a^c] \vee [(c \wedge a) \vee b] \\&= a^c \vee b = b^a \quad \checkmark\end{aligned}$$