Categorías. Parte 3.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

30 de octubre de 2018

Límites

Diagramas (definición informal)

Un **diagrama** en una categoría es una colección "consistente" de vértices (objetos) y flechas (morfismos). O sea, se supone que si $A \xrightarrow{f} B$ es parte del diagrama, entonces $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Dos diagramas se dice que tienen el mismo tipo si el "grafo" subyacente es el mismo.

Observación 1

En la definición de diagrama no pedimos que los diagramas sean conmutativos.

Observación 2

Usando funtores (veremos más adelante) es posible dar una definicón formal de diagrama.

Ejemplos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & B \\ A & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

mismo tipo

Conos

Un **cono** para un diagrama $\mathbb{D}$ consiste de

- un objeto X,
- un morfismo $f_D : X \to D$ para cada $D \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}$ tales que si $f : A \to B$ está en $\mathrm{mor}\,\mathbb{D}$ entonces el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

Límites

Un **límite** para un diagrama $\mathbb{D}$ es un cono $\{f_A : X \to A : A \in \operatorname{ob}\mathbb{D}\}$ con la siguiente propiedad universal: si $\{f'_A : X' \to A : A \in \operatorname{ob}\mathbb{D}\}$ es otro cono sobre $\mathbb{D}$, entonces existe un único morfismo $k : X' \to X$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f'_A"'] & & X \arrow[dl, "f_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $A \in \operatorname{ob}\mathbb{D}$.

Observación/Ejercicio

Un límite para $\mathbb{D}$ es un objeto terminal en $\mathbf{Cone}(\mathbb{D})$, la categoría de conos de $\mathbb{D}$. Consecuentemente, los límites sin únicos salvo isomorfismo. (Pensar también por qué $\mathbf{Cone}(\mathbb{D})$ es una categoría.)

Ejemplo

Si $\mathbb{D} = \varnothing$, un límite para $\mathbb{D}$ es un objeto terminal en $\mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "\exists!"] \\ X \end{tikzcd}$$

$\forall X', \exists! X' \to X$ (cualquier objeto X' es un cono sobre $\mathbb{D} = \varnothing$)

Ejemplo

Si $\mathbb{D}$ es el diagrama sin flechas

$$A \qquad\qquad B$$

un límite para $\mathbb{D}$ es... un producto entre A y B:

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right, "\pi'_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi'_B"] & \\
 & X \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Observación

Si $\mathbb{D}$ es un diagrama sin flechas, $\lim \mathbb{D}$ es un producto entre los objetos de $\mathbb{D}$. En particular, esto nos dice que no siempre existen los límites para un diagrama dado.

Ejemplo (importante)

Para el diagrama $\mathbb{D}$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

un cono es un cuadrado **conmutativo**

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, dashed, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

- $g \circ f' = h$
- $f \circ g' = h$
- Es decir: conociendo $\mathbb{D}$, f' y g' podemos deducir h.

El cono (X, f', g') es un límite para $\mathbb{D}$ si tiene la siguiente propiedad universal: para todo cono (X', f'', g'') existe un único $k : X' \to X$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

Ejemplo (cont.)

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, dashed, "\exists! k"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
& X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

El límite para este tipo de diagramas se llama **pull-back** de f y g.

Ejercicio

Encontrar el pull-back en **Set**.

Ejemplo/Ejercicio

¿Cuál es el límite de $A \rightrightarrows B$?

La noción dual de límite de un diagrama $\mathbb{D}$ es la de **colímite**.
Como ejercicio, definir

- co-cono,
- colímite,
- **coCone**($\mathbb{D}$). (Un colímite será un objeto inicial en la categoría de co-conos de $\mathbb{D}$.)

co-Ejemplos

- $\mathbb{D} = \varnothing$, $\operatorname{colím} \mathbb{D} =$ objeto inicial
- $\mathbb{D}: \quad A \qquad\qquad B$, $\operatorname{colím} \mathbb{D} =$ coproducto
- $\mathbb{D}:$ $$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$, $\operatorname{colím} \mathbb{D} =$ push-out

Teorema

Si existen todos los productos y los ecualizadores, entonces existen todos los límites.

coTeorema

Si existen todos los coproductos y los coecualizadores, entonces existen todos los colímites.

Exponenciales

Ejemplo

En **Set**,

$$B^A = \{f : A \to B\} \simeq \prod_{a \in A} B$$

es un conjunto.

Pregunta: ¿cómo definimos B^A sin recurrir a sus elementos?

$$\begin{tikzcd}
B & & B^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \\
C \arrow[u, "\exists ! \tilde{g}"] & & C \times A \arrow[u, "\tilde{g} \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo (cont.)

- En este caso es importante que $B^A = \prod_{a \in A} B$ sea un producto.
- $\varepsilon : B^A \times A \to B$ es la evaluación

$$\varepsilon(f, a) = f(a) = \pi_a(f).$$

- Para construir $\tilde{g} : C \to B^A$ a partir de $g : C \times A \to B$ procedemos como sigue:
- Para cada $a \in A$, tenemos $g_a : C \to B$ definida por $g_a(c) = g(c, a)$.
- La propiedad universal del producto dice que existe una única $\tilde{g} : C \to B^A$ que "conmuta" con todas las proyecciones π_a:

$$\varepsilon(\tilde{g}(c), a) = \tilde{g}(c)(a) = g(c, a).$$

Definición

Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos binarios y sean $A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$. Un objeto B^A es un **exponencial** si existe un morfismo $\varepsilon : B^A \times A \to B$ tal que para todo morfismo $g : C \times A \to B$ existe un único morfismo $\tilde{g} : C \to B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \\ C \times A \arrow[u, "\tilde{g}\times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \varepsilon \circ (\tilde{g} \times \mathrm{id}_A) = g$$

Notación: $\tilde{g} = \operatorname{curry}(g)$.

Definición

Una **categoría cartesiana cerrada (CCC)** es una categoría $\mathscr{C}$ con objeto terminal, productos binarios y exponenciales (es decir, para todos $A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, existe B^A).

Ejemplo

Set es CCC: $B^A = \mathrm{Hom}(A, B)$.

Ejercicio*

Grp no es CCC, ¿es **Ab** CCC?

Ejercicio

En una CCC:

- B^A es único salvo isomorfismo;
- $1^A \simeq 1$;
- $B^1 \simeq B$.

Ejemplo

Un álgebra de Boole es una CCC:

- $(B, \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c) = (B, \leq)$ es una categoría (poset);
- objeto terminal: $1 = \text{máx}\, B$;
- productos: $a \times b = ??? = a \wedge b = \text{ínf}\{a, b\}$;

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& a \wedge b \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& c \arrow[u, dashed] \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

- exponenciales: $b^a = a^c \vee b$ (implicación lógica "$a \implies b$").

Ejemplo (cont.)

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[r, "\varepsilon"] & b \\
c \times a \arrow[u, "\tilde{g}\times \mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

La unicidad de las flechas está garantizada porque estamos trabajando en un postet (a lo sumo una flecha entre dos objetos), pero tenemos que verificar su existencia.

- ε: $b^a \times a \leq b \iff (a^c \vee b) \wedge a \leq b$ ✓
- g: $c \wedge a \leq b$ (dato).
- id_a: $a \leq a$ ✓
- $\tilde{g}$: $c \leq b^a = a^c \vee b$. En efecto,

$$\begin{aligned}
c \vee b^a &= c \vee a^c \vee b = [c \wedge (a \vee a^c)] \vee a^c \vee b \\
&= (c \wedge a) \vee (c \wedge a^c) \vee a^c \vee b \\
&= [(c \wedge a^c) \vee a^c] \vee [(c \wedge a) \vee b] \\
&= a^c \vee b = b^a \quad ✓
\end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

$$\begin{tikzcd} b^a \times a \arrow[r, "\varepsilon"] & b \\ c \times a \arrow[u, "\tilde{g} \times \mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

La unicidad de las flechas está garantizada porque estamos trabajando en un postet (a lo sumo una flecha entre dos objetos), pero tenemos que verificar su existencia.

- ε: $b^a \times a \leq b \iff (a^c \vee b) \wedge a \leq b$ ✓
- g: $c \wedge a \leq b$ (dato).
- id_a: $a \leq a$ ✓
- $\tilde{g}$: $c \leq b^a = a^c \vee b$. En efecto,

$$\begin{aligned} c \vee b^a &= c \vee a^c \vee b = [c \wedge (a \vee a^c)] \vee a^c \vee b \\ &= (c \wedge a) \vee (c \wedge a^c) \vee a^c \vee b \\ &= [(c \wedge a^c) \vee a^c] \vee [(c \wedge a) \vee b] \\ &= a^c \vee b = b^a \quad \checkmark \end{aligned}$$