

Categorías. Parte 2.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

22 de octubre de 2018

Monomorfismos

Definición

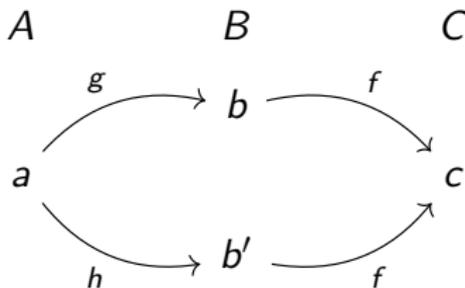
Decimos que $f \in \text{Hom}(B, C)$ es un **monomorfismo** si

$$\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, \forall g, h \in \text{Hom}(A, B), [f \circ g = f \circ h \implies g = h]$$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} B \xrightarrow{f} C$$

Ejemplo/Ejercicio

En **Set** los monomorfismos coinciden con las funciones inyectivas.



Epimorfismos

Definición

Decimos que $f \in \text{Hom}(A, B)$ es un **epimorfismo** si

$$\forall C \in \text{ob } \mathcal{C}, \forall g, h \in \text{Hom}(B, C), [g \circ f = h \circ f \implies g = h]$$

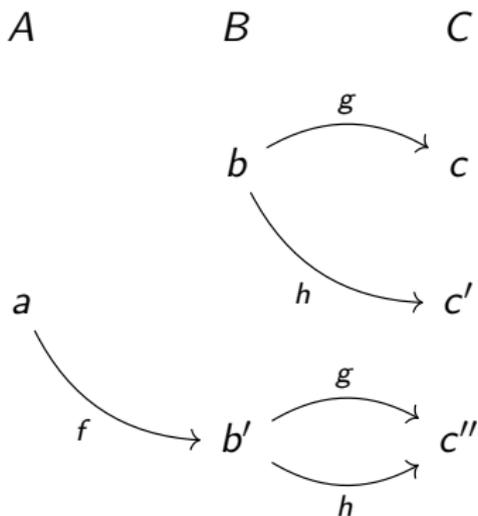
$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

Observación/Ejercicio

Las definiciones de monomorfismo y epimorfismo son definiciones duales. Es decir, f es un morfismo en la categoría \mathcal{C} si y sólo si f es un epimorfismo en la categoría \mathcal{C}^{op} .

Ejemplo/Ejercicio

En **Set** los epimorfismos coinciden con las funciones sobreyectivas.



Ejemplo

- ▶ $\mathcal{C} = \mathbf{Mon}$ (categoría de monoides)
- ▶ $A = (\mathbb{N}_0, +, 0)$
- ▶ $B = (\mathbb{Z}, +, 0)$
- ▶ $i : A \hookrightarrow B$
- ▶ i es monomorfismo, pues es inyectiva y \mathbf{Mon} es una categoría concreta (¿por qué?).
- ▶ i no es sobreyectiva pero SÍ es un epimorfismo. En efecto, sea $(M, *, e)$ un monoide y supongamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\mathbb{N}_0 \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} M$$

Ejemplo (cont.)

- ▶ Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$, entonces

$$g(n) = g(i(n)) = h(i(n)) = h(n)$$

- ▶ Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq 0$

$$\begin{aligned}g(n) &= g(n) * e = g(n) * h(0) \\ &= g(n) * h(-n + n) \\ &= g(n) * h(-n) * h(n) \\ &= g(n) * g(-n) * h(n) && [-n \geq 0] \\ &= g(n - n) * h(n) \\ &= g(0) * h(n) \\ &= e * h(n) = h(n)\end{aligned}$$

- ▶ Usamos que \mathbb{Z} es un grupo.

Ejercicio

En **Grp**:

- ▶ mono \iff inyectiva.
- ▶ epi \iff sobreyectiva.

Isomorfismos

Definición

Decimos que un morfismo $f : A \rightarrow B$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

id_A

$$B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$$

id_B

Ejemplo

$$f \text{ iso} \implies \begin{cases} f & \text{mono} \\ f & \text{epi} \end{cases}$$

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} B$$

$$\blacktriangleright f \circ g = f \circ h \implies \underbrace{f^{-1} \circ f \circ g}_{=g} = \underbrace{f^{-1} \circ f \circ h}_{=h}$$

\blacktriangleright Luego f mono. Probar como ejercicio que f es epi (dualidad).

Ejemplo

$\mathcal{C} = \mathbf{Mon}$, $i : \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

- ▶ i es mono.
- ▶ i es epi.
- ▶ ¿ i es iso?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} & \xrightarrow[f?]{f} & \mathbb{N}_0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_{\mathbb{N}_0} & & \end{array}$$

- ▶ $f(n) = n$ para todo $n \geq 0$
- ▶ Además, si $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(-n + n) \\ &= f(-n) + f(n) \\ &= f(-n) + n \end{aligned}$$

- ▶ Luego $f(-n) = -n$. Absurdo.

Objetos iniciales y terminales

Definición

Un objeto $0 \in \text{ob } \mathcal{C}$ se dice **inicial** si

$$\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, \exists ! 0 \rightarrow A.$$

Definición (dual)

Un objeto $1 \in \text{ob } \mathcal{C}$ se dice **terminal** si

$$\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, \exists ! A \rightarrow 1.$$

Ejemplo

En **Set**:

- ▶ \emptyset es el único objeto inicial (¿por qué?).
- ▶ $\{x\}$ son los objetos terminales.

Ejemplo

Los objetos iniciales/terminales son únicos salvo isomorfismos. Más aún, entre dos objetos iniciales/terminales existe un único isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccc} & & \exists!(=id_0) & & \\ & & \curvearrowright & & \\ 0' & \xleftarrow{f} & 0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\exists!f} \\ \xleftarrow{\exists!f'} \end{array} & 0' & \xrightarrow{f'} & 0 \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & \exists!(=id_{0'}) & & \end{array}$$

- ▶ $f' \circ f = id_0$,
- ▶ $f \circ f' = id_{0'}$,
- ▶ Luego, $f' = f^{-1}$.

Ejemplo

Pensemos en un poset (P, \leq) como una categoría. ¿Cuáles son los objetos iniciales/terminales?

- ▶ Objeto inicial: mínimo
- ▶ Objeto terminal: máximo

Notar que no siempre existen.

Ejemplo

- ▶ En **Grp**, el grupo trivial $\{e\}$ es inicial y terminal a la vez.
- ▶ Ídem en **Vect** $_{\mathbb{K}}$ con el espacio nulo $\{0\}$.

Observación

Los objetos que son iniciales y terminales a la vez son muy importantes y suelen llamarse objetos nulos. Volveremos sobre esto más adelante.

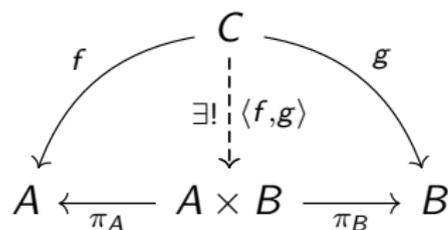
Productos

Ejemplo

En **Set**, sabemos que

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

pero ¿cómo podemos caracterizar $A \times B$ usando sin hacer mención a sus elementos?

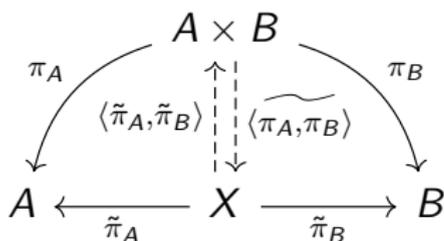
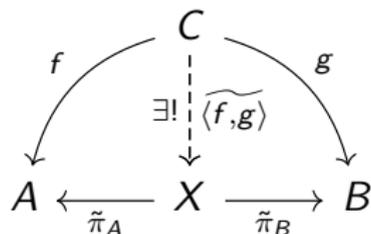


- ▶ Tenemos dos proyecciones
 - ▶ $\pi_A(a, b) = a$
 - ▶ $\pi_B(a, b) = b$
- ▶ Para cada conjunto C y cada par de funciones $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$, existe una única función $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$ tal que conmuta el diagrama
- ▶ $\langle f, g \rangle(c) = (f(c), g(c))$

Observación

La terna $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ es "única" con la propiedad antes mencionada.

Es decir, si $(X, \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B)$ tiene la siguiente propiedad universal, entonces X es biyectivo con $A \times B$, **vía una biyección que conmuta con las proyecciones.**



- ▶ $\tilde{\pi}_A(\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle(a, b)) = \pi_A(a, b) = a$
- ▶ $\tilde{\pi}_B(\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle(a, b)) = \pi_B(a, b) = b$
- ▶ Por unicidad

$$\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle \circ \langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle = \text{id}_{A \times B}$$

- ▶ Ídem $\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle \circ \langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle = \text{id}_X$

Definición

El **producto** de dos objetos A, B en una categoría \mathcal{C} es una terna $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ donde

- ▶ $\pi_A \in \text{Hom}(A \times B, A)$
- ▶ $\pi_B \in \text{Hom}(A \times B, B)$

y que tiene la siguiente propiedad universal:

- ▶ para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$, existe un único morfismo $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow f & & \searrow g & \\ & A & & B & \\ & \longleftarrow \pi_A & A \times B & \longrightarrow \pi_B & \\ & & & & \end{array}$$

$\exists! \langle f, g \rangle$

Ejercicio

$(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ es único salvo isomorfismo.

Ejemplo

Supongamos que existen los productos $A \times B$, $C \times D$ y que tenemos dados dos morfismos $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow D$. Entonces se puede definir un morfismo

$$f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$$

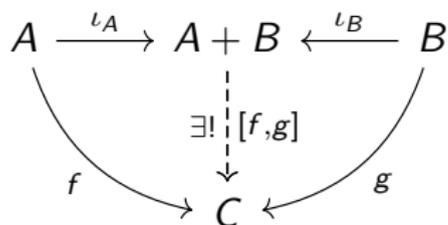
The diagram is a commutative square with vertices A , $A \times B$, B , C , $C \times D$, and D . The top row consists of $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$. The bottom row consists of $C \xleftarrow{\pi_C} C \times D \xrightarrow{\pi_D} D$. On the left, a vertical arrow f points from A to C . On the right, a vertical arrow g points from B to D . A diagonal arrow from $A \times B$ to C is labeled $f \circ \pi_A$. A diagonal arrow from $A \times B$ to D is labeled $g \circ \pi_B$. A dashed vertical arrow from $A \times B$ to $C \times D$ is labeled $\exists!$.

$$f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B \rangle$$

Coproductos

Definición

Un **coproducto** de A, B es una terna $(A + B, \iota_A, \iota_B)$ con la siguiente propiedad universal.



Para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ existe un único morfismo

$$[f, g] : A + B \rightarrow C$$

tal que el diagrama conmuta.

Proposición

$(A + B, \iota_A, \iota_B)$, si existe, es único salvo isomorfismo.

Demostración.

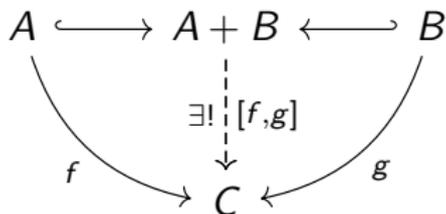
Por dualidad (coproductos en \mathcal{C} son productos en \mathcal{C}^{op}).



Ejemplo

En **Set** hay coproductos.

- ▶ $A + B = ? = A \sqcup B$ (unión disjunta).



$$[f, g](x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

Observación

La unión disjunta de dos conjuntos A y B se puede construir como

$$A \sqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

Por ejemplo

$$\{x, y, z\} \sqcup \{y, z, u\} = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (y, 1), (z, 1), (u, 1)\}.$$

(co)Productos arbitrarios

Definición

Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de objetos indexada por un conjunto I , un **producto** de $(A_i)_{i \in I}$ es un objeto $\prod_{i \in I} A_i$ junto con una familia de morfismos $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$, $j \in I$ que tienen la siguiente propiedad universal: para todo objeto C y para toda familia de morfismos $f_i : C \rightarrow A_i$, existe un único morfismo

$$\langle f_i \rangle_{i \in I} : C \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$$

tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \exists! \langle f_i \rangle \downarrow & \searrow f_i & \\ \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\pi_i} & A_i \end{array}$$

Ejercicio

Definir el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ (aquí hay que considerar “inclusiones” $\iota_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$, en lugar de “proyecciones”).

Ejemplo: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow f \text{ lineal} & \downarrow \langle f, g \rangle & \searrow g \text{ lineal} & \\ V & \xleftarrow{\pi_V} & V \times W & \xrightarrow{\pi_W} & W \end{array}$$

$$\langle f, g \rangle(u) = (f(u), g(u)) \text{ (lineal)}$$

$$\begin{array}{ccccc} V & \hookrightarrow & V \times W & \longleftarrow & W \\ & \searrow f & \downarrow [f, g] & \swarrow g & \\ & & U & & \end{array}$$

$$[f, g](v, w) = f(v) + g(w) \text{ (lineal)}$$

$$\boxed{V \times W = V \oplus W}$$

Obs: $V \hookrightarrow V \times W$ se define por $v \mapsto (v, 0)$ (ídem la otra).

Observación/Ejercicio

- ▶ Para una familia infinita de índices, $\prod_{i \in I} V_i$ es un producto en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ pero **NO es un coproducto**. Si intentáramos repetir el razonamiento anterior tendríamos que utilizar sumas infinitas, lo cual no tiene sentido. **Igualmente, se debería dar una demostración formal para ver que falla la propiedad universal.**
- ▶ ¿Quién sería $\bigoplus_{i \in I} V_i$?

Ejercicio

¿Hay coproductos en \mathbf{Ab} ?

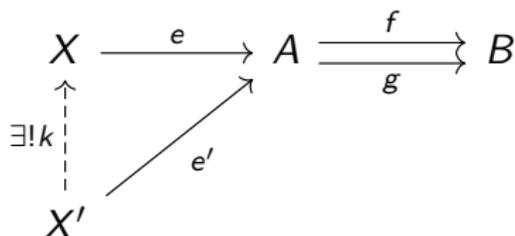
Ejercicio*

¿Hay coproductos en \mathbf{Grp} ?

Ecualesadores

Definición

El **ecuador** de dos morfismos $f, g : A \rightarrow B$ es un morfismo $e : X \rightarrow A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ y tal que para todo morfismo $e' : X' \rightarrow A$ tal que $f \circ e' = g \circ e'$, existe un único $k : X' \rightarrow X$ tal que $e \circ k = e'$



Ejemplo/Ejercicio

En **Set**:

$$X \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

► $X = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$

► $f(e(a)) = g(e(a))$

Verificar que se cumple la propiedad universal.

Ejercicio

► ecualizador \implies mono

► ecualizador + epi \implies iso

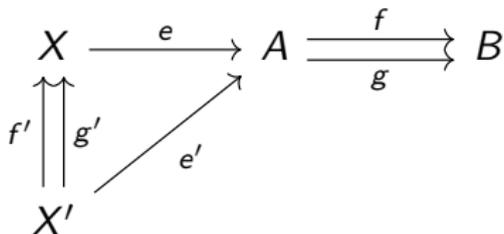
Idea: considerar

$$X' \begin{array}{c} \xrightarrow{f'} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} X \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

$$e \circ f' = e \circ g' \stackrel{?}{\implies} f' = g'$$

Ejercicio (cont.)

Pero pensarlo así



con

$$e' = f \circ e \circ f' = f \circ e \circ g' = g \circ e \circ g' = g \circ e \circ f'$$

Ejercicio*

Definir coequalizador e identificarlo en **Set**.