

Categorías. Parte 1.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

16 de octubre de 2018

Definición

Una **categoría** \mathcal{C} consiste de

- ▶ una clase de **objetos**: $\text{ob } \mathcal{C}$;
- ▶ una clase de **morfismos** o **flechas**: $\text{mor } \mathcal{C}$;
- ▶ dos funciones de clase:
 - ▶ $\text{dom} : \text{mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{C}$ (dominio),
 - ▶ $\text{codom} : \text{mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{C}$ (codominio).
- ▶ Notación:
 - ▶ para $f \in \text{mor } \mathcal{C}$, escribimos

$$f : A \rightarrow B \iff \text{dom } f = A, \text{codom } f = B$$

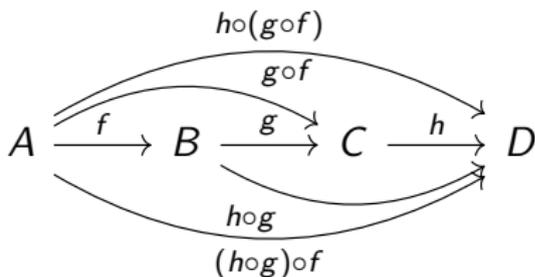
- ▶ $\text{Hom}(A, B) := \{f \in \text{mor } \mathcal{C} : \text{dom } f = A, \text{codom } f = B\}$.
- ▶ Y para cada $A, B, C \in \text{ob } \mathcal{C}$ una operación

$$\circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$$

llamada **composición** con las siguientes propiedades...

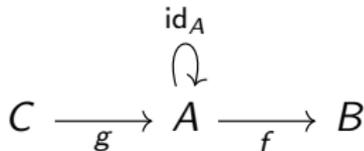
Definición (cont.)

- ▶ Denotamos $\circ(f, g) = g \circ f$.
- ▶ **Asociatividad:** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ siempre que tengan sentido las composiciones.



- ▶ Para cada $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ existe un **morfismo identidad** $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ tal que

- ▶ $\forall B, \forall f \in \text{Hom}(A, B), f \circ \text{id}_A = f,$
- ▶ $\forall C, \forall g \in \text{Hom}(C, A), \text{id}_A \circ g = g.$



Ejemplo: **Set**

- ▶ ob **Set** = conjuntos
- ▶ mor **Set** = funciones

Observación (sutil)

En teoría de categorías las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ se consideran distintas. En teoría de conjuntos estas dos funciones se consideran iguales.

Conjuntos vs. Clases

- ▶ ob \mathcal{C} , mor \mathcal{C} fueron definidos específicamente como “clases”.
No necesariamente son conjuntos. Los conjuntos son clases que son elementos de otras clases más grandes. Las clases propias no son elementos de ninguna clase.
- ▶ Por ejemplo ob **Set**, mor **Set** son clases propias (ejercicio).

Definición

Decimos que una categoría \mathcal{C} es una categoría

- ▶ **pequeña** si $\text{ob } \mathcal{C}$, $\text{mor } \mathcal{C}$ son conjuntos;
- ▶ **localmente pequeña** si $\text{Hom}(A, B)$ es un conjunto para todos $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$.
- ▶ Si \mathcal{C} no es una categoría pequeña se dice que es una categoría **grande**.

Observación

Pequeña \implies Localmente pequeña.

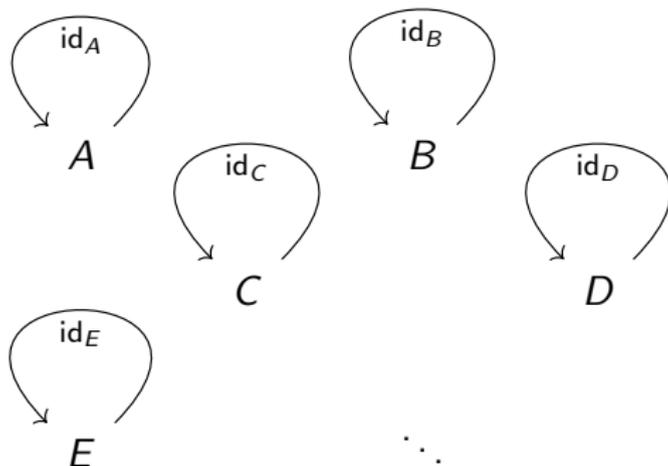
Ejemplo

Set es una categoría localmente pequeña.

Más ejemplos

Ejemplo: categoría discreta

$$\forall A, B \in \text{ob } \mathcal{C}, \text{Hom}(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{\text{id}_A\}, & A = B \end{cases}$$



► Localmente pequeña.

Categoría 0

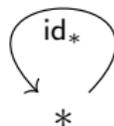
▶ $\text{mor } \mathbf{0} = \emptyset$

▶ $\text{mor } \mathbf{0} = \emptyset$

Categoría 1

▶ $\text{ob } \mathbf{1} = \{*\}$

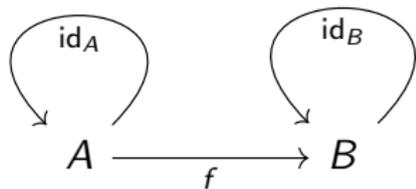
▶ $\text{mor } \mathbf{1} = \{\text{id}_*\}$



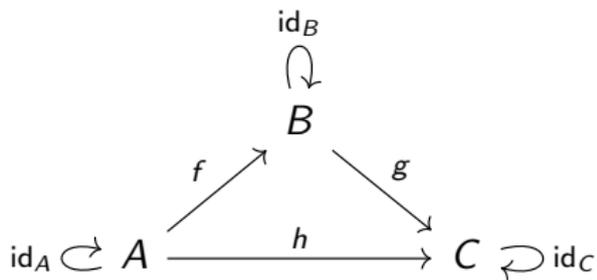
Categoría 2

▶ $\text{ob } \mathbf{2} = \{A, B\}$

▶ $\text{mor } \mathbf{2} = \{\text{id}_A, \text{id}_B, A \xrightarrow{f} B\}$



Categoría 3



$$g \circ f = h$$

Ejercicio

¿Cómo se definirían las categorías **4**, **5**, **6**, ...?

Ejemplo: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

- ▶ $\text{ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}\text{-espacios vectoriales}$
- ▶ $\text{mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} = \text{transformaciones lineales}$

Ejemplo: \mathbf{Grp}

- ▶ $\text{ob } \mathbf{Grp} = \text{grupos}$
- ▶ $\text{mor } \mathbf{Grp} = \text{morfismos de grupos}$

Ejemplo: \mathbf{Ab}

- ▶ $\text{ob } \mathbf{Ab} = \text{grupos abelianos}$
- ▶ $\text{mor } \mathbf{Ab} = \text{morfismos de grupos}$

Comentario

Si bien uno puede pensar a \mathbf{Ab} “dentro de” \mathbf{Grp} , estructuralmente estas dos categorías son muy diferentes.

Categorías concretas

Definición (simplificada)

Una categoría \mathcal{C} se dice **concreta** si los objetos de \mathcal{C} son conjuntos, los morfismos de \mathcal{C} son funciones entre dichos conjuntos y la composición es la composición usual de funciones.

Advertencia: esta no es la definición real de categoría concreta.

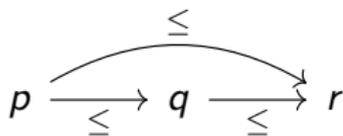
Ejemplo

Un poset (P, \leq) puede pensarse como una categoría como sigue

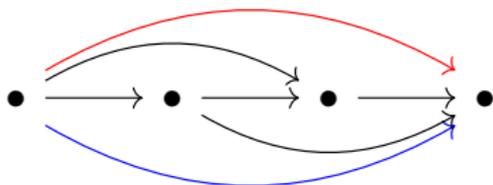
► $\text{ob}(P, \leq) = P$

► $\text{mor}(P, \leq) : \begin{cases} p \rightarrow q \iff p \leq q \\ \text{dom}(p \rightarrow q) = p \\ \text{codom}(p \rightarrow q) = q \end{cases}$

► Composición: $p \leq q, q \leq r \implies p \leq r$ (transitividad)



► Asociatividad:



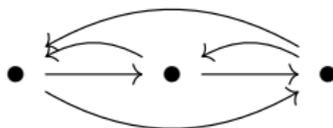
La flecha azul y la flecha roja son iguales porque hay a lo sumo una flecha entre dos elementos distintos.

Ejemplo (cont.)

- ▶ Identidad: $p \leq p$ corresponde a $\text{id}_p : p \rightarrow p$. Estas flechas, como siempre están presentes, casi nunca las dibujamos.
- ▶ No es una categoría concreta.
- ▶ Es una categoría pequeña, pues $\forall p, q, |\text{Hom}(p, q)| \leq 1$.

Ejercicio

Con un argumento similar, cualquier preorden puede ser visto como una categoría en donde hay a lo sumo una flecha entre dos objetos.



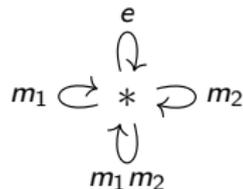
Ejemplo: **Poset** (categoría concreta)

- ▶ **ob Poset** = conjuntos parcialmente ordenados.
- ▶ **mor Poset** = funciones crecientes.

Ejemplo

Un monoide (M, \cdot, e) se puede presentar con una categoría \mathcal{M} con:

- ▶ $\text{ob } \mathcal{M} = \{*\}$
- ▶ $\text{mor } \mathcal{M} = \text{Hom}(*, *) = M$
 - ▶ $m_1 \circ m_2 := m_1 m_2$
 - ▶ $\text{id}_* = e$



Recíprocamente, cualquier categoría (pequeña) con un solo objeto representa un monoide.

Caso particular

Un grupo G puede ser visto como una categoría \mathcal{G} con

- ▶ $\text{ob } \mathcal{G} = \{*\}$
- ▶ $\text{mor } \mathcal{G} = G$

con la misma construcción que hicimos antes, pero donde ahora se satisface la siguiente propiedad adicional:

- ▶ $\forall g \in \text{mor } \mathcal{G}, \exists g^{-1} \in \text{mor } \mathcal{G}$, es decir,

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \text{id}_* .$$

- ▶ Son categorías pequeñas.
- ▶ ¿Son categorías concretas? Depende de cómo elijamos $*$.

Observación

- ▶ En los ejemplos anteriores de categorías que no son concretas hay algo un poco forzado: que los morfismos no representen funciones entre los objetos, no significa que no podamos encontrar otra categoría “equivalente” (digamos con el mismo multigrafo dirigido) que sí sea concreta.
- ▶ Existen ejemplos de categorías que no son concretas con esta definición más restrictiva pero no son tan fáciles de construir (hace falta saber topología algebraica, por ejemplo).

Ejemplo/Ejercicio

Si pensamos el grupo simétrico S_n como una categoría con un solo objeto, podemos realizarlo como una categoría concreta con un único objeto $*$ $= \{1, 2, \dots, n\}$ y $\text{Hom}(*, *)$ las permutaciones de $1, 2, \dots, n$. El **teorema de Cayley** dice que esto en realidad se puede hacer con cualquier grupo G .

Ejemplo (informal)

Un lenguaje de programación funcional puede ser modelado como una categoría.

Objetos: tipos

- ▶ *Int*
- ▶ *Real*
- ▶ *Bool*
- ▶ *Unit*

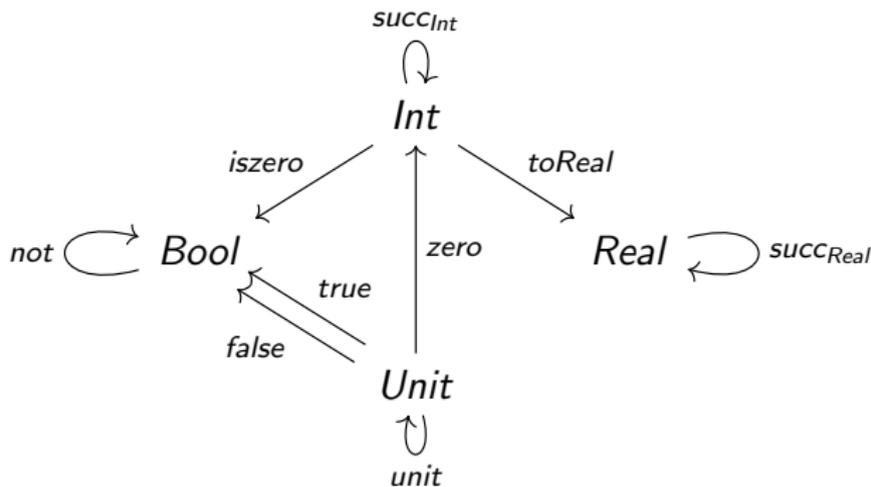
Morfismos

- ▶ $iszero : Int \rightarrow Bool$
- ▶ $not : Bool \rightarrow Bool$
- ▶ $succ_{Int} : Int \rightarrow Int$
- ▶ $succ_{Real} : Real \rightarrow Real$
- ▶ $toReal : Int \rightarrow Real$

Constantes

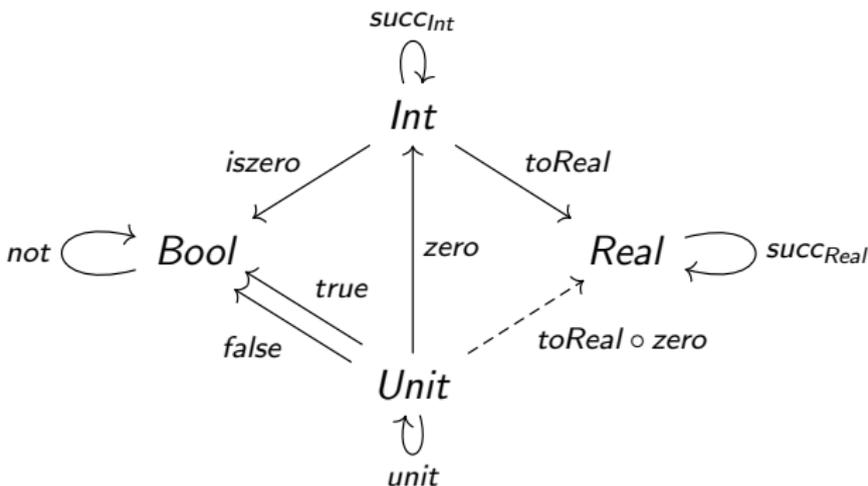
- ▶ $zero : Int$
- ▶ $true : Bool$
- ▶ $false : Bool$
- ▶ $unit : Unit$

Ejemplo (cont.)



- ▶ Faltan agregar las identidades.
- ▶ Faltan agregar las composiciones. Por ejemplo,
 - ▶ $+2 = \text{succ}_{Int} \circ \text{succ}_{Int}$,
 - ▶ $\text{zero} : \text{Real} = \text{toReal} \circ \text{zero}$.

Ejemplo (cont.)

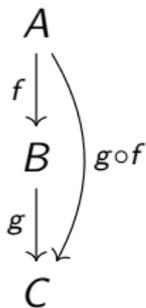


- ▶ Faltan agregar las identidades.
- ▶ Faltan agregar las composiciones. Por ejemplo,
 - ▶ $+2 = \text{SUCC}_{Int} \circ \text{SUCC}_{Int}$,
 - ▶ $\text{zero} : Real = \text{toReal} \circ \text{zero}$.

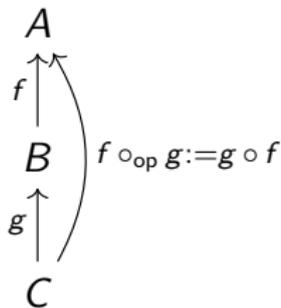
Ejemplo: categoría dual

Si \mathcal{C} es una categoría, \mathcal{C}^{op} se define con los mismos objetos que \mathcal{C} pero las flechas con sentido inverso.

En \mathcal{C} ,



En \mathcal{C}^{op} ,

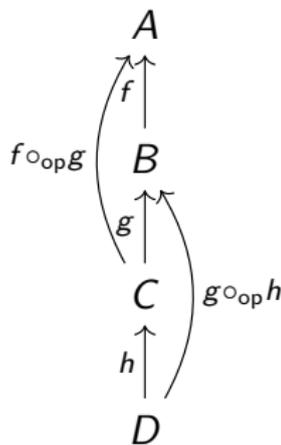
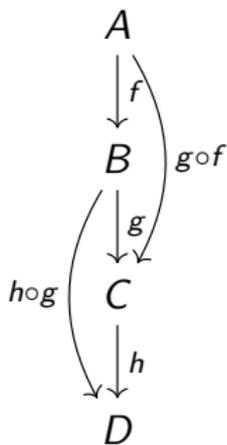


- ▶ $\text{ob } \mathcal{C}^{\text{op}} = \text{ob } \mathcal{C}$.
- ▶ $\text{Hom}^{\text{op}}(A, B) = \text{Hom}(B, A)$.

Ejemplo (cont.)

- ▶ Chequear como ejercicio que \mathcal{C}^{op} es una categoría.
- ▶ Veamos por ejemplo la asociatividad.

$$\begin{aligned}(f \circ_{\text{op}} g) \circ_{\text{op}} h &= h \circ (f \circ_{\text{op}} g) \\ &= h \circ (g \circ f) \\ &= (h \circ g) \circ f \\ &= (g \circ_{\text{op}} h) \circ f \\ &= f \circ_{\text{op}} (g \circ_{\text{op}} h)\end{aligned}$$



Principio de dualidad

Un teorema que vale en una categoría \mathcal{C} da lugar a un teorema en la categoría \mathcal{C}^{op} (invirtiendo el sentido de las flechas en el enunciado). Luego, si uno demuestra un teorema para todas las categorías (o al menos para una familia autodual), automáticamente obtiene un “coteorema” válido para todas las categorías (de esa familia).

Ejemplo

Si G es un grupo, entonces G^{op} es un grupo.

- | | |
|------------------------------------|--|
| ▶ $G \iff \mathcal{G}$ | ▶ Categoría opuesta \mathcal{G}^{op} |
| ▶ $\text{ob } \mathcal{G} = \{*\}$ | ▶ $\text{ob } \mathcal{G}^{\text{op}} = \{*\}$ |
| ▶ $\text{Hom}(*, *) = G$ | ▶ $\text{Hom}^{\text{op}}(*, *) = G$ |
| ▶ $g_1 \circ g_2 = g_1 g_2$ | ▶ $g_1 \circ_{\text{op}} g_2 = g_2 g_1$ |
| ▶ toda flecha tiene inversa | ▶ toda flecha tiene inversa ✓ |

Más ejemplos...

Ejemplo: categoría producto

- ▶ Dato: dos categorías \mathcal{C}, \mathcal{D} .
- ▶ $\text{ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \{(A, B) : A \in \text{ob } \mathcal{C}, B \in \text{ob } \mathcal{D}\}$.
- ▶ $\text{Hom}((A, B), (A', B')) = \text{Hom}(A, A') \times \text{Hom}(B, B')$.

$$\begin{array}{ccc} (A, B) & & A \quad B \\ \downarrow (f, g) & \iff & \downarrow f \quad \downarrow g \\ (A', B') & & A' \quad B' \end{array}$$

- ▶ $(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')$.
- ▶ $\text{id}_{(A, B)} := (\text{id}_A, \text{id}_B)$.
- ▶ Ejercicio: $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

Ejemplo*: $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$

- ▶ Categoría de flechas de **Set**.
- ▶ $\text{ob } \mathbf{Set}^{\rightarrow} = \text{mor } \mathbf{Set}$.
- ▶ $\text{mor } \mathbf{Set}^{\rightarrow} = ???$

$$f \xrightarrow[(a,b)]{?} f'$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \quad b \circ f = f' \circ a$$

$$\text{Hom}(f, f') := \{(a, b) : a \in \text{Hom}(\text{dom } f, \text{dom } f'), \\ b \in \text{Hom}(\text{codom } f, \text{codom } f'), \\ b \circ f = f' \circ a\}.$$

Ejemplo* (cont.)

- Composición:

$$f \xrightarrow{(a,b)} f' \xrightarrow{(a',b')} f''$$

$(a', b') \circ (a, b) := (a' \circ a, b' \circ b)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ a' \downarrow & & \downarrow b' \\ A'' & \xrightarrow{f''} & B'' \end{array}$$

- Para ver la buena definición usamos el siguiente resultado general (ejercicio):

$$\left. \begin{array}{l} f' \circ a = b \circ f \\ f'' \circ a' = b' \circ f'' \end{array} \right\} \implies f'' \circ (a' \circ a) = (b' \circ b) \circ f$$

Ejemplo* (cont.)

► Asociatividad:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ a' \downarrow & & \downarrow b' \\ A'' & \xrightarrow{f''} & B'' \\ a'' \downarrow & & \downarrow b'' \\ A''' & \xrightarrow{f'''} & B''' \end{array}$$

$$\underbrace{[(a'', b'') \circ (a', b')] \circ (a, b)}_{= ((a'' \circ a') \circ a, (b'' \circ b') \circ b)} = \underbrace{(a'', b'') \circ [(a', b') \circ (a, b)]}_{= (a'' \circ (a' \circ a), b'' \circ (b' \circ b))}$$

Ejemplo*

- Identidad: $\text{id}_f := (\text{id}_A, \text{id}_B)$

$$f \xrightarrow{(\text{id}_A, \text{id}_B)} f$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Diagramas conmutativos

Distintos caminos entre dos vértices dan el mismo resultado.

Ejercicio

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Si conmutan los cuadrados, conmuta el rectángulo (en cualquier categoría).

Ejemplo

El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Int} & \xrightarrow{\mathit{succ}_{\mathit{Int}}} & \mathit{Int} \\ \mathit{toReal} \downarrow & & \downarrow \mathit{toReal} \\ \mathit{Real} & \xrightarrow{\mathit{succ}_{\mathit{Real}}} & \mathit{Real} \end{array}$$