Grupos. Parte 1.

Silvio Reggiani

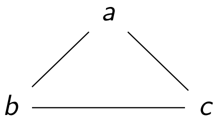
Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

27 de septiembre de 2018

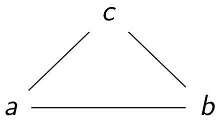
Grupos

- Se utilizan para estudiar/representar simetrías de un objeto (cualquier objeto).
- Forman el ejemplo más sencillo de una estructura algebraica abstracta (pueden definirse a partir de una operación en un conjunto).
- Su aparición (Galois $\sim$1830) revolucionó el álgebra y dio lugar al álgebra moderna.
- Están presentes en todas las ramas de la matemática (porque todos los objetos que se estudian en matemática tienen simetrías).

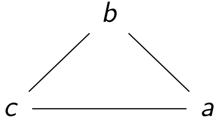
Ejemplo: simetrías de un triángulo equilátero



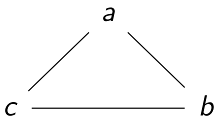
R_0



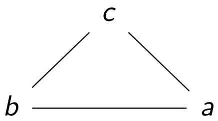
R_1



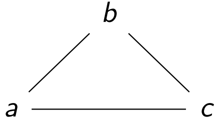
R_2



T_a



T_b



T_c

Ejemplo: simetrías de un triángulo equilátero

- 3 rotaciones: $R_0 = \mathrm{id}$, R_1, $R_2 = R_1 \circ R_1$.
- 3 reflexiones: T_a, T_b, T_c.
- Grupo de simetrías del triángulo:

$$D_3 := \{R_0, R_1, R_2, T_a, T_b, T_c\}.$$

Observación

- Los elementos de D_3 se pueden componer y todo elemento tiene inverso.
- R_1 y T_a generan D_3:
  - $R_2 = R_1 \circ R_1$,
  - $R_0 = R_1 \circ R_1 \circ R_1$,
  - $T_b = R_2 \circ T_a = R_1 \circ R_1 \circ T_a$,
  - $T_c = R_1 \circ T_a$.

Ejemplo: simetrías de un triángulo equilátero

Observación/Ejercicio

- $D_3 \simeq S_3$: toda isometría del triángulo se corresponde con una permutación de sus vértices.
- Recordar el grupo de permutaciones de 3 elementos:

$$\begin{aligned} S_3 &= \{f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} : f \text{ es biyectiva}\} \\ &= \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\} \end{aligned}$$

- Más precisamente, $\exists \varphi : D_3 \to S_3$ "isomorfismo de grupos" (preserva la composición):

$$\begin{aligned} \varphi(R_0) &= (1,2,3) & \qquad \varphi(T_a) &= (1,3,2) \\ \varphi(R_1) &= (3,1,3) & \qquad \varphi(T_b) &= (3,2,1) \\ \varphi(R_2) &= (2,3,1) & \qquad \varphi(T_c) &= (2,1,3) \end{aligned}$$

- Ejercicio: $\forall g_1, g_2 \in D_3, [\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)]$.

Ejemplo: simetrías de un cuadrado

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] d \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$
R_0

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] c \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ d \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$
R_1

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\ c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$
R_2

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[r] \arrow[d] & d \arrow[d] \\ b \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$
R_3

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ a \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$
T_1

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] c \arrow[r] \arrow[d] & d \arrow[d] \\ b \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$
T_2

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] d \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\ c \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$
T_3

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ d \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$
T_4

- $D_4 = \{R_0, R_1, R_2, R_3, T_1, T_2, T_3, T_4\}$.
- R_1, T_1 generan D_4 (ejercicio).

Ejemplo: simetrías de un cuadrado

Observación

- Toda simetría del cuadrado induce una permutación de los vértices, pero no toda permutación de 4 elementos se corresponde con una simetría del cuadrado.
- Más precisamente, $\varphi : D_4 \to S_4$ definido por

$$\begin{aligned}
\varphi(R_0) &= (1,2,3,4) & \qquad \varphi(T_1) &= (1,4,3,2)\\
\varphi(R_1) &= (4,1,2,3) & \qquad \varphi(T_2) &= (2,1,4,3)\\
\varphi(R_2) &= (3,4,1,2) & \qquad \varphi(T_3) &= (3,2,1,4)\\
\varphi(R_3) &= (2,3,4,1) & \qquad \varphi(T_4) &= (4,3,2,1)
\end{aligned}$$

es un morfismo de grupos (preserva la composición) pero no es un isomorfismo pues

$$|S_4| = 4! = 24 > 8 = |D_4|.$$

Definiciones y propiedades básicas

Definición

Un **grupo** es un conjunto G dotado de una operación asociativa $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ tal que

1. Existe un elemento neutro:

$$\exists e \in G, \forall g \in G, (eg = ge = g).$$

2. Existen los inversos:

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, (gg^{-1} = g^{-1}g = e).$$

Nociones más débiles

- **Semigrupo:** no se piden ni 1 ni 2, solo una operación asociativa.
- **Monoide:** se pide 1 pero no 2.

Grupos abelianos

Definición

Decimos que un semigrupo/monoide/grupo G es **abeliano** o **conmutativo** si

$$\forall g, h \in G, (gh = hg).$$

Notación aditiva

Para grupos abelianos en general se prefiere la notación aditiva por sobre la multiplicativa:

$$\begin{aligned} gh &\longleftrightarrow g + h \\ e &\longleftrightarrow 0 \\ g^{-1} &\longleftrightarrow -g \end{aligned}$$