Retículos. Parte 1.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

18 de septiembre de 2018

Retículos (lattices)

Hay dos definiciones equivalentes de **retículo** (también llamado **reticulado** o **lattice**). Esto tiene que ver con que hay en principio dos enfoques distintos para estudiar estos objetos.

Definición 1 (teoría del orden)

Un poset $(L, \leq)$ se dice un **retículo** si

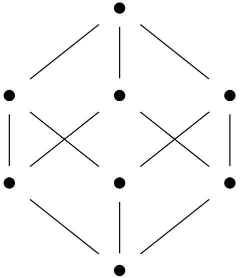
$$\forall a, b \in L, \text{ existen } \sup\{a, b\} \text{ y } \inf\{a, b\}.$$

Atención

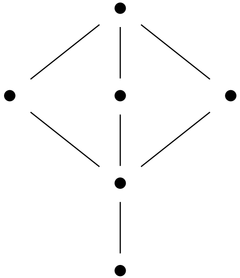
No necesariamente existen $\max\{a, b\}$ y $\min\{a, b\}$. De hecho, los casos más interesantes para estudiar son cuando no existen los máximos ni los mínimos.

Ejemplo

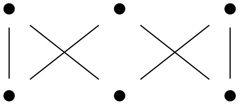
¿Son retículos los siguientes posets?



✓ ¿quién es?



✓



✗

Observación importante

Tomar supremo/ínfimo define dos operaciones (asociativas) en L

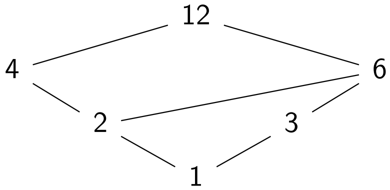
$$a \vee b := \sup\{a, b\}$$
$$a \wedge b := \inf\{a, b\}$$

- Esto convierte a un retículo en un objeto algebraico.
- La pregunta natural que surge es: ¿qué propiedades algebraicas caracterizan completamente a estas operaciones?

Ejemplo $D_n = \{x \in \mathbb{N} : x \mid n\}$

- $(D_n, \mid)$ es un retículo.
- $D_n \ni x \vee y = \mathrm{mcm}(x, y)$.
- $D_n \ni x \wedge y = \mathrm{mcd}(x, y)$.
- Ejercicio.

Subejemplo: D_{12}



Propiedades de las operaciones

Sean $(L, \leq)$ un retículo y $x, y, z, w \in L$. Entonces:

(a) $x \leq x \vee y$

(b) $x \wedge y \leq x$

(c) $x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x$

(d) Asociatividad:
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

(e) Conmutatividad: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$

(f) Idempotencia: $x \vee x = x = x \wedge x$

(g) Absorción: $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$

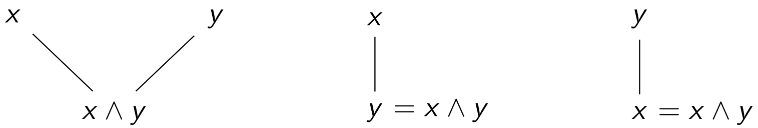
(h) Compatibilidad:

$$\left.\begin{matrix} x \leq z \\ y \leq w \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x \vee y \leq z \vee w \\ x \wedge y \leq z \wedge w \end{cases}$$

Demostración.

(a)-(f) Hacerlas como ejercicio.

(g) $x \wedge y \overset{(b)}{\leq} x \implies x \vee (x \wedge y) \overset{(c)}{=} x$ (el otro como ejercicio).



(h)

- $x \leq z \leq z \vee w$
- $y \leq w \leq z \vee w$
- Luego $z \vee w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y por ende $x \vee y \leq z \vee w$
- Hacer el otro caso como ejercicio $\square$