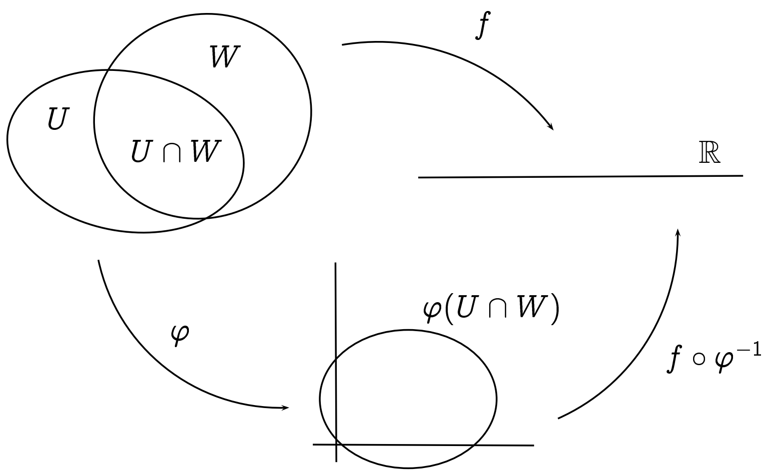
El fibrado tangente

15 de octubre de 2014

1. Funciones diferenciables entre variedades

Definición 1.1. Sean M, N variedades diferenciables y sea $W \subset M$ un abierto.

- Una función $f : W \to \mathbb{R}$ se dice *diferenciable* o C^∞ si para todo sistema de coordenadas (U, φ) de M, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \mathbb{R}$ es C^∞.
- Una función continua $f : M \to N$ se dice *diferenciable* o C^∞ si dado cualquier par de sistemas de coordenadas (U, φ) de M y (V, ψ) de N, la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ es C^∞.
- Una función $f : M \to N$ es *diferenciable en* $p \in M$ si existe un entorno abierto U de p tal que $f|_U : U \to N$ es diferenciable.
- Una función diferenciable $f : M \to N$ se dice un *difeomorfismo* si admite una inversa diferenciable.



Claramente una función es diferenciable si y sólo si es diferenciable en cada punto. Además, es fácil ver que la composición de funciones diferenciables es diferenciable. En efecto, sean $f : M_1 \to M_2$ y $g : M_2 \to M_3$ funciones diferenciables y sean (U_i, φ_i)

sistemas de coordenadas en M_i para $i = 1, 2, 3$. Entonces, en su dominio de definición, se tiene que

$$\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$$

es diferenciable (pues es composición de funciones diferenciables de varias variables).

Notación. Denotamos por $C^\infty(M, N)$ el conjunto de funciones de diferenciables de M en N. El conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ se denotará usualmente como $C^\infty(M)$ y se llama el *álgebra de funciones diferenciables* en M. Observar que $C^\infty(M)$ es, en efecto, un álgebra asociativa sobre los números reales (con las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones).

Ejemplo 1.2. La inclusión $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de la esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ es C^∞. En efecto, como los cambios de coordenadas en una variedad diferenciable son C^∞, basta chequear que la composición de i con cartas coordenadas es diferenciable sólo para una familia de sistemas de coordenadas que cubran la variedad. Consideramos en S^n los sistemas de coordenadas "casquetes" $\varphi_i^\pm$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$ la identidad. Luego, si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$, entonces

$$(i \circ (\varphi_i^\pm)^{-1})(u) = (u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - ||u||^2}, u_i, \ldots, u_n)$$

es diferenciable.

1.1. Particiones de la unidad

Recordemos que, por definición, todas las variedades diferenciables son N_2.

Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función definida en un espacio topológico M, el *soporte* de f se define como

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 1.3. Sea M una variedad diferenciable. Una familia $\{\varphi_i : i \in I\}$ de funciones $C^\infty(M)$ se dice una *partición de la unidad* en M si

1. la familia $\{\operatorname{sop} \varphi_i : i \in I\}$ es localmente finita (es decir, para cada $p \in M$ existe un entorno U de p tal que $U \cap \operatorname{sop} \varphi_i = \varnothing$ salvo una cantidad finita de is);
2. $\varphi_i(p) \geq 0$ para todo $p \in M$ y para todo $i \in I$;
3. $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Una partición de la unidad $\{\varphi_i : i \in I\}$ se dice *subordinada* al cubrimiento $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de M si para cada $i \in I$ existe $\alpha \in A$ tal que $\operatorname{sop} \varphi_i \subset U_\alpha$. Decimos que dicha partición de la unidad está subordinada al cubrimiento $\{U_i : i \in I\}$ *con la misma familia de índices* si $\operatorname{sop} \varphi_i \subset U_i$ para todo $i \in I$.

Dado $R > 0$, denotamos por $C(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < R \text{ para todo } i\}$ el cubo abierto centrado en el origen con lados de longitud $2R$ paralelos a los ejes coordenados.

Lema 1.4. *Existe una función diferenciable no-negativa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que vale 1 en el cubo cerrado $\overline{C(1)}$ y cero en el complemento del cubo abierto $C(2)$.*

Demostración. Basta probarlo para $n = 1$, pues si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(t) = 1$ si $|t| \leq 1$, $f(t) = 0$ si $|t| \geq 2$ y $f(t) \geq 0$ para todo t, entonces

$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1) \cdots f(t_n)$$

tiene las propiedades deseadas. Veamos pues que existe una tal f. Se sabe que la función

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

es no-negativa, C^∞ y positiva si $t > 0$ (ejercicio). Luego, la función

$$h(t) = \frac{g(t)}{g(t) + g(1-t)}$$

es no-negativa, C^∞ y vale 1 si $t \geq 1$ y 0 si $t \leq 0$. Finalmente, la función buscada es

$$f(t) = h(t+2)h(2-t).$$

□

Lema 1.5. *Sean M una variedad diferenciable, V un abierto de M y $p \in V$. Entonces existe un entorno abierto W de p, $W \subset V$, y una función diferenciable no-negativa $f : M \to \mathbb{R}$ tales que $f|_{\overline{W}} = 1$ y $f|_{M-V} = 0$.*

Demostración. Sea (U, φ) un sistema de coordenadas alrededor de p tal que $U \subset V$, $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$. Sea $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y no-negativa tal que $\tilde{f}|_{\overline{C(1)}} = 1$ y $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n - C(2)} = 0$ (la cual existe por el lema anterior). Sea $W = \varphi^{-1}(C(1))$ y definamos

$$f(q) = \begin{cases} \tilde{f}(\varphi(q)), & q \in U \\ 0, & q \in M - U \end{cases}$$

Observemos que $f|_{\overline{W}} = 1$ y $f|_{M-V} = 0$. Para ver que f es diferenciable basta ver que f es diferenciable en cada $q \in M$. Si $q \in U$, entonces $f \circ \varphi^{-1} = \tilde{f}$ es C^∞ y si $q \notin U$, podemos tomar un sistema de coordenadas (U', φ') alrededor de q con $U' \subset M - \varphi^{-1}\left(\overline{C(2)}\right)$ y en este caso $(f \circ (\varphi')^{-1})|_{\varphi'(U')} = 0$ es también C^∞. □

Teorema 1.6 (Existencia de particiones de la unidad). *Sea M una variedad diferenciable y sea $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces existe una partición de la unidad numerable $\{\varphi_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$ y con $\operatorname{sop} \varphi_i$ compacto para todo i. Si no se requiere que los soportes sean compactos, entonces existe una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$, con la misma familia de índices, con a lo sumo una cantidad numerable de las φ_α no idénticamente nulas.*

Para probar el teorema usaremos el siguiente resultado, que sigue de la paracompacidad de las variedades diferenciables y ya fue probado en la unidad anterior.

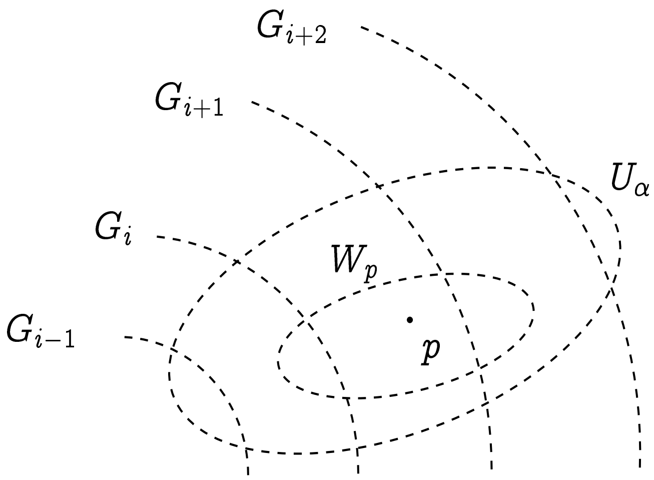
Lema 1.7. *Existe una familia de abiertos G_i de M, con $i = 1, 2, 3, \ldots$ tales que*

1. *$\overline{G_i}$ es compacto para todo i;*
2. *$\overline{G_i} \subset G_{i+1}$ para todo i;*
3. *$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.*

Demostración del Teorema 1.6. Sean G_i, $i \geq 1$, como en el lema anterior y definamos $G_0 = \varnothing$. Dado $i \geq 1$, sea $p \in \overline{G_{i+1}} - G_i$ y sea U_α tal que $p \in U_\alpha$. Sea $V = U_\alpha \cap (G_{i+2} - \overline{G_{i-1}})$. Por el Lema 1.5, existen W_p un entorno abierto de p, $W_p \subset V$, y $f_p : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y no-negativa tales que $f_p|_{\overline{W_p}} = 1$ y $f_p|_{M-V} = 0$. Luego $\operatorname{sop} f_p \subset \overline{G_{i+2}}$ es compacto. Como $\overline{G_{i+1}} - G_i$ es compacto y $\{W_p : p \in \overline{G_{i+1}} - G_i\}$ es un cubrimiento abierto de $\overline{G_{i+1}} - G_i$, existe un subcubrimiento finito $W_{p_1}, \ldots, W_{p_n}$. Sean $f_{p_1}, \ldots, f_{p_n}$ las correspondientes funciones diferenciables. Haciendo $i \to \infty$ obtenemos una familia numerable de funciones diferenciables $\{\psi_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ tales que ψ_i es no negativa para todo i, $\operatorname{sop} \psi_i$ es compacto y la familia $\{\operatorname{sop} \psi_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ es localmente finita, pues cada G_k tiene intersección no vacía con a lo sumo una cantidad finita de $\operatorname{sop} \psi_i$. Además,

$$\psi(q) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(q) \geq 1,$$

para todo $q \in M$. Notar que la serie anterior, es en realidad una suma finita en un entorno de cada $q \in M$ y por ende está bien definida y es una función diferenciable ψ en M.



Sea $\varphi_i = \psi_i/\psi$, entonces $\{\varphi_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Además $\operatorname{sop} \varphi_i = \operatorname{sop} \psi_i$ es compacto para cada i.

Si ahora definimos ψ_α idénticamente cero si ninguna φ_i tiene soporte contenido en U_α y en caso contrario como la suma de las φ_i con $\operatorname{sop}\varphi_i \subset U_\alpha$. Entonces, poniendo $\varphi_\alpha = \psi_\alpha/(\sum_{\beta\in A}\psi_\beta)$, se tiene que $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ con la misma familia de índices. Para ver que $\operatorname{sop}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ usamos que

$$\operatorname{sop}\varphi_\alpha = \overline{\bigcup_{\operatorname{sop}\varphi_i\subset U_\alpha}\{x \in M : \varphi_i(x) \neq 0\}} = \bigcup_{\operatorname{sop}\varphi_i\subset U_\alpha} \operatorname{sop}\varphi_i \subset U_\alpha,$$

en donde la segunda igualdad vale porque la familia $\{\operatorname{sop}\varphi_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ es localmente finita. $\square$

Corolario 1.8 (Existencia de funciones meseta). *Sea M una variedad diferenciable, U un abierto en M y A un cerrado en tal que $A \subset U$. Entonces existe una función C^∞, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ *para todo* $p \in M$;
2. $\varphi(p) = 1$ *para todo* $p \in A$;
3. $\operatorname{sop}\varphi \subset U$.

Demostración. Tomemos una partición de la unidad $\{\varphi, \psi\}$ subordinada al cubrimiento $\{U, M - A\}$ de M con $\operatorname{sop}\varphi \subset U$ y $\operatorname{sop}\psi \subset M - A$. Entonces φ tiene las propiedades deseadas. $\square$

2. Vectores tangentes

Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ puede pensarse como una transformación sobre las funciones diferenciables por medio de la derivada direccional. Más precisamente, si $f(t_1, \ldots, t_n)$ es una función diferenciable en p, a valores reales, la derivada direccional de f en p en la dirección de v es

$$v(f) = v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial t_1}\right|_p + \cdots + v_n \left.\frac{\partial f}{\partial t_n}\right|_p$$

Observemos que la derivada direccional tiene la siguientes propiedades

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g),$$

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

en donde f, g son funciones diferenciables y λ es un número real. Se dice entonces que v es una *derivación lineal* del álgebra de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n$ en el punto p. Esto motiva la definición de vectores tangentes a una variedad diferenciable en un punto dado.

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Un *vector tangente* v a M en p es una derivación lineal del álgebra $C^\infty(M)$ en p. Es decir, $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisface para todas $f, g \in C^\infty(M)$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$;
2. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se llama el *espacio tangente* a M en p y se denota por T_pM.

Observemos que T_pM es un espacio vectorial real, definiendo para $v, w \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f);$$
$$(\lambda v)(f) = \lambda v(f).$$

Chequear como ejercicio que $v+w$ y λv así definidos son derivaciones lineales de $C^\infty(M)$ en p.

Nota 2.2. Sea $v \in T_pM$.

1. Notemos que $v(1) = v(1 \cdot 1) = 2v(1)$, de donde $v(1) = 0$. Esto implica que para cualquier función constante c se tiene $v(c) = v(c1) = cv(1) = 0$.
2. Si $f \in C^\infty(M)$ vale 0 en un entorno U de p, entonces $v(f) = 0$. En efecto, sea $g \in C^\infty(M)$ tal que $g|_{\overline{W}} = 1$ en un entorno $W \subset U$ de p y $g|_{M-U} = 0$. Entonces $fg = 0$, de donde sigue que
$$0 = v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) = v(f).$$
3. Sigue del ítem anterior que si dos funciones f, g coinciden en un entorno de p, entonces $v(f) = v(g)$. En particular, esto implica que un vector tangente $v \in T_pM$ puede aplicarse a funciones que estén definidas sólo en un entorno de p.

Teorema 2.3. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$. Entonces T_pM es un espacio vectorial (real) de dimensión n.*

Daremos una demostración constructiva de este teorema, pero antes necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.4. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema de coordenadas alrededor de $p \in M$. Definimos
$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t_i}\right|_{\varphi(p)}$$
para $f \in C^\infty(M)$.

Es fácil ver que $(\partial/\partial x_i)|_p \in T_pM$ (hacerlo como ejercicio). Es frecuente la notación

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p.$$

Observemos que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x_j) = \left.\frac{\partial(x_j \circ \varphi^{-1})}{\partial t_i}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial t_j}{\partial t_i}\right|_{\varphi(p)} = \delta_{ij}.$$

La demostración del Teorema 2.3 consistirá en probar que $(\partial/\partial x_1)|_p, \ldots, (\partial/\partial x_n)|_p$ es una base de T_pM. Para ello necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 2.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo alrededor del origen y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^∞ con $f(0) = 0$. Entonces existen funciones $g_i : U \to \mathbb{R}$, de clase C^∞, tales que*

1. $f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i g_i(t_i, \ldots, t_n)$;

2. $g_i(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial t_i}\right|_0$.

Demostración. Sea $p = (t_1, \ldots, t_n) \in U$. Como U es convexo y contiene al origen, entonces tiene sentido definir $h_p(s) = f(sp)$ para todo $s \in [0, 1]$. Observemos que

$$f(p) = f(p) - f(0) = \int_0^1 h_p'(s)\, ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} t_i \left.\frac{\partial f}{\partial t_i}\right|_{sp} ds.$$

Luego podemos poner $g_i(p) = \int_0^1 (\partial f/\partial t_i)|_{sp}\, ds$. □

Demostración del Teorema 2.3. Sea $v \in T_pM$ y sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ un sistema de coordenadas alrededor de p tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U)$ es convexo. Sea $f \in C^\infty(M)$ tal que $f(p) = 0$ y apliquemos el Lema 2.5 a la función $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Luego, existen funciones diferenciables $g_i : \varphi(U) \to M$ tales que

$$(f \circ \varphi^{-1})(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i g_i(t_1, \ldots, t_n) \tag{1}$$

y

$$g_i(0) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial t_i}\right|_0 = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f).$$

Podemos reescribir (1) como $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (g_i \circ \varphi)$. Luego, como $x_i(p) = 0$, se tiene que

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i \cdot (g_i \circ \varphi)) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) g_i(\varphi(p)) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f).$$

Notemos que la condición $f(0) = 0$ no es restrictiva, pues si $f(p) \neq 0$ y llamamos $c = f(p)$, entonces $v(f) = v(f - c)$ y la ecuación anterior sigue valiendo. Luego

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

y por ende $(\partial/\partial x_1)|_p, \dots, (\partial/\partial x_n)|_p$ generan T_pM. Veamos que estos vectores tangentes son linealmente independientes. En efecto, si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p,$$

entonces aplicando el lado derecho de esta igualdad a la j-ésima función coordenada x_j y usando el comentario posterior a la Definición 2.4, tenemos que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right) (x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Nota 2.6.

1. Sigue de la demostración del teorema que si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es un sistema de coordenadas en p y $v \in T_pM$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

2. Supongamos que $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ son sistemas de coordenadas en p, entonces

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

en donde

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_p = \left.\frac{\partial (x_i \circ \psi^{-1})}{\partial t_j}\right|_{\psi(p)} = \left.\frac{\partial (t_i \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial t_j}\right|_{\psi(p)}$$

son los coeficientes de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1}$ en $\psi(p)$. Observar que hemos denotado por $t_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la j-ésima función coordenada de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Vectores tangentes como velocidades de curvas

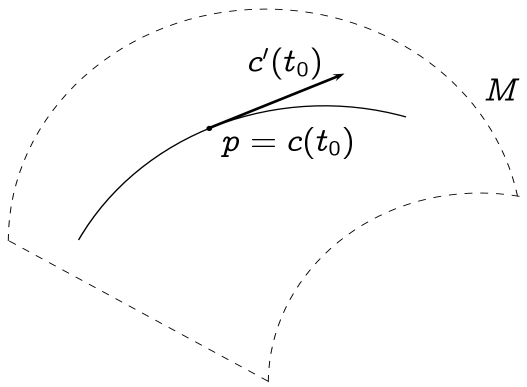
Sea M una variedad diferenciable. Una *curva* (diferenciable) en M es una función C^∞, $c : I \to M$ en donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Sea $t_0 \in I$. Dada $f \in C^\infty(M)$, la asignación

$$f \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} f(c(t)) \tag{2}$$

es un vector tangente en $T_{c(t_0)}M$ el cual se denota por $c'(t_0)$. En efecto, es claro que la asignación (2) es lineal en f. Además, si $g \in C^\infty$, entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}(fg)(c(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} f(c(t))g(c(t)) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} f(c(t))\right) g(c(t_0)) + f(c(t_0))\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} g(c(t)),$$

con lo cual $c'(t_0)$ es una derivación lineal en $c(t_0)$. El vector tangente $c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ se llama la *velocidad* de la curva $c(t)$ en $t = t_0$.



Proposición 2.7. *Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Entonces todo vector tangente $v \in T_pM$ se obtiene como la velocidad de una curva en M que pasa por p.*

Demostración. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ un sistema de coordenadas en p con $\varphi(p) = 0$ y sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = a_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + \cdots + a_n \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p .$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(ta_1, \dots, ta_n) \in \varphi(U)$ para $-\varepsilon < t < \varepsilon$ y sea $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ definida por $c(t) = \varphi^{-1}(ta_1, \dots, ta_n)$. Observemos que $c(0) = p$. Se afirma que $v = c'(0)$. En efecto, si $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(c(t)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(\varphi^{-1}(ta_1, \dots, ta_n)) = \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial t_i}\right|_0 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)(f) = v(f),\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

3. Diferencial de una función

Definición 3.1. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función C^∞. La *diferencial* de f en $p \in M$ es la transformación lineal $df : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida por

$$df(v)(g) = v(g \circ f)$$

para todo $v \in T_pM$ y para toda $g \in C^\infty(N)$.

Es sencillo chequear que $df(v)$ es un vector tangente a N en $f(p)$ para todo $v \in T_pM$. En realidad, df es una transformación lineal distinta para cada $p \in M$. Cuando sea necesario especificar el punto base usaremos las notaciones $df|_p$ o df_p para la diferencial de f en p.

El *pullback* de f en p es la transformación lineal $\delta f : (T_{f(p)}N)^* \to (T_pM)^*$ transpuesta de la diferencial de f en p. Más precisamente,

$$\delta f(\omega)(v) = \omega(df(v))$$

para toda $\omega \in (T_{f(p)}N)^*$ y para todo $v \in T_pM$.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[rr, "df"] \arrow[dr, dashed, "\delta f(\omega)"'] & & T_{f(p)}N \arrow[dl, "\omega"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

En el caso particular de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$, si $v \in T_pM$ y $f(p) = t_0$, entonces

$$df(v) = v(f) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \in T_{t_0}\mathbb{R}.$$

En este caso es común identificar df con el elemento de $(T_pM)^*$ definido por

$$df(v) = v(f),$$

es decir, identificamos df con $\delta f(\omega)$, en donde ω es la base de $(T_{t_0}\mathbb{R})^*$ dual de $(d/dt)|_{t_0}$.

Nota 3.2.

1. Sea $f : M \to N$ una función C^∞ y sean $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$, $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ sistemas de coordenadas en $p \in M$ y $f(p) \in N$ respectivamente. Sigue de la Nota 2.6 que

$$df\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{f(p)}.$$

   La matriz con coeficientes $\partial(y_i \circ f)/\partial x_j$ suele llamarse la *matriz jacobiana* de f con respecto a los sistemas de coordenadas (U, φ) y (V, ψ). Notar que si $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ y los sistemas de coordenadas son los canónicos, entonces esta matriz conicide con el jacobiano usual de f.

2. Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema de coordenadas en M y $p \in U$, entonces $\{dx_i|_p : i = 1, \ldots, n\}$ es la base de $(T_pM)^*$ dual de $\{\partial/\partial x_i|_p : i = 1, \ldots, n\}$. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función C^∞, identificando $T_{f(p)}\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$, se tiene

$$df|_p = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p dx_i|_p.$$

3. Si $c : I \to M$ es una curva en M y $t_0 \in I$, enconces

$$c'(t_0) = dc|_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right).$$

Proposición 3.3 (Regla de la cadena). *Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones C^∞ y $p \in M$, entonces*

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p.$$

Demostración. Debemos verificar que $d(g \circ f)|_p(v) = dg|_{f(p)}(df|_p(v))$ para todo $v \in T_pM$. Para ver que estos dos vectores tangentes son iguales, veamos que valen lo mismo aplicados a cualquier $h \in C^\infty(P)$. En efecto,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)|_p(v)(h) &= v(h \circ (g \circ f)) = v((h \circ g) \circ f) \\ &= df_p(v)(h \circ g) = dg|_{f(p)}(df_p(v))(h), \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Proposición 3.4. *Si $f : M \to N$ y $g : N \to \mathbb{R}$ son funciones C^∞, entonces*

$$\delta f(dg|_{f(p)}) = d(g \circ f)|_p.$$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 3.5. *Sea $f : M \to N$ una función C^∞, en donde M es conexa. Supongamos que $df|_p \equiv 0$ para todo $p \in M$. Entonces f es constante.*

Demostración. Sea $q \in f(M)$, tenemos que $f^{-1}(\{q\})$ es cerrado. Sólo falta probar que $f^{-1}(\{q\})$ es abierto. Sea $p \in f^{-1}(\{q\})$. Tomemos sistemas de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ alrededor de p y $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ alrededor de $q = f(p)$ tales que $f(U) \subset V$. Luego, para todo $p' \in U$ tenemos

$$0 = df|_{p'}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{p'}\right) = \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\right|_{p'} \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{f(p')}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

de donde sigue que

$$0 = \left.\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\right|_{p'} = \left.\frac{\partial(t_i \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial t_j}\right|_{\varphi(p')}$$

para todos $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Como p' es arbitrario tenemos que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es constante en $\varphi(U)$ o, lo que es lo mismo, f es constante en U (pues φ y ψ son biyectivas). Así, $U \subset f^{-1}(\{q\})$ como queríamos probar. □

4. Estructura de variedad del fibrado tangente y del fibrado cotangente

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional con estructura diferenciable $\mathcal{F}$. Definimos el *fibrado tangente* de M como

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Se tiene definida una proyección canónica

$$\pi : TM \to M, \qquad \pi(v) = p \text{ si } v \in T_pM.$$

Es frecuente denotar los elementos de TM como pares (p, v) con $v \in T_pM$, aunque esto no significa que TM sea un producto cartesiano.

Dado $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n)) \in \mathcal{F}$ definimos $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\tilde{\varphi}(v) = (x_1(\pi(v)), \ldots, x_n(\pi(v)), dx_1|_{\pi(v)}(v), \ldots, dx_n|_{\pi(v)}(v)).$$

Dicho de otra manera, si $v \in T_pM$ está dado por

$$v = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p,$$

entonces

$$\tilde{\varphi}(v) = (\varphi(p), a_1, \ldots, a_n) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), a_1, \ldots, a_n).$$

Observar que $\tilde{\varphi}$ es biyectiva.

Lema 4.1. *Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ entonces $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ es C^∞.*

Demostración. Sean $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ y sea $(t_1, \ldots, t_n, a_1, \ldots, a_n) \in \psi(U) \times \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})(t_1, \ldots, t_n, a_1, \ldots, a_n) &= \tilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{\psi^{-1}(t_1, \ldots, t_n)} \right) \\
&= \tilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\bigg|_{\psi^{-1}(t_1, \ldots, t_n)} \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{\psi^{-1}(t_1, \ldots, t_n)} \right) \\
&= \tilde{\varphi}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial(t_j \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{\psi^{-1}(t_1, \ldots, t_n)} \right) \\
&= \Bigg((\varphi \circ \psi^{-1}(t_1, \ldots, t_n), \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial(t_1 \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial t_i}, \ldots, \\
&\qquad \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial(t_n \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial t_i} \Bigg)
\end{aligned}$$

depende diferenciablemente de $(t_1, \ldots, t_n, a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Lema 4.2. *La familia*

$$\mathcal{B} = \{\tilde{\varphi}^{-1}(W) : W \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \text{ es abierto}, (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

es base para una topología en TM, la cual hace del fibrado tangente una variedad topológica de dimensión $2n$. Con esta topología $\pi : TM \to M$ es continua.

Para probar este lema utilizamos el siguiente resultado.

Lema 4.3. *Existe una base numerable de la topología de M formada por abiertos coordenados.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Demostración del Lema 4.2. Claramente $TM = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$. Sean $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{F}$ y sean W_1, W_2 abiertos en $\varphi_1(U_1) \times \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2(U_2) \times \mathbb{R}^m$ respectivamente. Supongamos que $v \in \tilde{\varphi}_1^{-1}(W_1) \cap \tilde{\varphi}_2^{-1}(W_2)$. Debemos probar que existen $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ y W abierto en $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ tales que

$$v \in \tilde{\varphi}^{-1}(W) \subset \tilde{\varphi}_1^{-1}(W_1) \cap \tilde{\varphi}_2^{-1}(W_2). \tag{3}$$

Denotemos $\varphi_1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ y $\varphi_2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$ y sea $p = \pi(v)$. Escribimos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i^1 \frac{\partial}{x_i^1}\bigg|_p = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i^2}\bigg|_p.$$

Supongamos que $\varphi_1(p) = (p_1^1, \ldots, p_n^1)$ y $\varphi_2(p) = (p_1^2, \ldots, p_n^2)$. Entonces, para $k = 1, 2$, existen abiertos A_k en U_k y B_k en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$(p_1^k, \ldots, p_n^k) \in A_k, \qquad (a_1^k, \ldots, a_n^k) \in B_k, \qquad A_k \times B_k \subset W_k.$$

Por otro lado, es un hecho general que cualquier espacio vectorial real $\mathbb{V}$ de dimensión n, admite una única topología tal que cualquier isomorfismo lineal de $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}$ es un homeomorfismo (ejercicio). Con esto en mente, consideramos a T_pM con dicha topología y sean $\ell_k : \mathbb{R}^n \to T_pM$, $k = 1, 2$, los isomorfismos definidos por

$$\ell_1(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^1}\bigg|_p, \qquad \ell_2(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^2}\bigg|_p.$$

Tenemos entonces que $\ell_1(B_1)$ y $\ell_2(B_2)$ son abiertos en T_pM y $v \in \ell_1(B_1) \cap \ell_2(B_2)$. Sea (U, φ) el sistema de coordenadas en M con $U = U_1 \cap U_2$ y $\varphi = \varphi_1|_U$ y sea

$$W = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(A_1) \cap \varphi_2^{-1}(A_2)) \times \ell_1^{-1}(\ell_1(B_1) \cap \ell_2(B_2)).$$

Se tiene entonces que $\tilde{\varphi}^{-1}(W)$ satisface (3).

Veamos que esta topología en TM es Hausdorff. Sean $v, v' \in TM$, $v \neq v'$. Si $\pi(v) \neq \pi(v')$ entonces existen sistemas de coordenadas (U, φ) en $\pi(v)$ y (V, ψ) en $\pi(v')$ tales que $U \cap V = \varnothing$, pues M es Hausdorff. Luego $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$ y $\tilde{\psi}^{-1}(\psi(V) \times \mathbb{R}^n)$ son entornos de v y v' respectivamente, tales que $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U)\times\mathbb{R}^n)\cap\tilde{\psi}^{-1}(\psi(V)\times\mathbb{R}^n)=\varnothing$. Por otro lado, si $\pi(v)=\pi(v')=p$, sea $(U,\varphi=(x_1,\ldots,x_n))$ un sistema de coordenadas en p. Supongamos que

$$v=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p,\qquad v'=\sum_{i=1}^n a_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p$$

y sean A, A' entornos abiertos en $\mathbb{R}^n$ de $(a_1,\ldots,a_n)$ y $(a_1',\ldots,a_n')$ respectivamente tales que $A\cap A'=\varnothing$. Entonces $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U)\times A)$ y $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U)\times A')$ son entornos de v y v' respectivamente tales que $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U)\times A)\cap\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U)\times A')=\varnothing$. Observemos que, con esta topología, cada $v\in TM$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$, luego TM es un espacio localmente euclídeo de dimensión $2n$. Sólo falta probar que TM es N_2. Por el Lema 4.3 sabemos que existe una familia numerable (U_i,φ_i), $i\in\mathbb{N}$, de sistemas de coordenadas en M tales que $\{U_i : i\in\mathbb{N}\}$ es base de la topología de M. Tomemos una base numerable de la topología de $\mathbb{R}^n$, digamos $\{W_j : j\in\mathbb{N}\}$. Es fácil ver que

$$\{\tilde{\varphi}_i^{-1}(\varphi_i(U_i)\times W_j) : i,j\in\mathbb{N}\}$$

es una base numerable para la topología de TM. □

Teorema 4.4. *TM admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ tal que la proyección $\pi: TM\to M$ es C^∞.*

Demostración. Sigue de los resultados anteriores considerando el atlas maximal $\tilde{\mathcal{F}}$ que contiene a la familia $\{(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi}) : (U,\varphi)\in\mathcal{F}\}$. □

Ejemplo 4.5. El fibrado tangente $T\mathbb{R}^n$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$. Sea $(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$. No es difícil verificar que la aplicación $F: T\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2n}$ definida por

$$F\left(\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial t_i}\bigg|_{(t_1,\ldots,t_n)}\right)=(t_1,\ldots,t_n,a_1,\ldots,a_n)$$

es un difeomorfismo. Más aún, si M es una variedad diferenciable de dimensión n que se puede cubrir con una sola carta, entonces existe un difeomorfismo $F: TM\to M\times\mathbb{R}^n$ con la propiedad que

$$F(v)=(\pi(v),f(v))$$

y para cada $p\in M$, $v,w\in T_pM$, $\lambda\in\mathbb{R}$, vale

$$f(v+\lambda w)=f(v)+\lambda f(w).$$

Si esto sucede se dice que la variedad M es *paralelizable*. Es un problema interesante (y difícil) en geometría, decidir cuándo una variedad diferenciable M es paralelizable. Por ejemplo, se sabe que la esfera S^n es paralelizable si y sólo si $n=0,1,3,7$.

El *fibrado cotangente* de M se define como

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} (T_pM)^*.$$

En este caso también tenemos una proyección canónica

$$\pi^* : T^*M \to M, \qquad \pi^*(\omega) = p \text{ si } \omega \in (T_pM)^*.$$

Dado $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n)) \in \mathcal{F}$ definimos $\tilde{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ como

$$\tilde{\varphi}^*(\omega) = \left(x_1(\pi^*(\omega)), \ldots, x_n(\pi^*(\omega)), \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\pi^*(\omega)} \right), \ldots, \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_{\pi^*(\omega)} \right) \right),$$

es decir, si $\omega \in (T_pM)^*$ y escribimos, con las identificaciones usuales,

$$\omega = a_1 dx_1|_p + \ldots + a_n dx_n|_p,$$

entonces

$$\tilde{\varphi}^*(\omega) = (\varphi(p), a_1, \ldots, a_n) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), a_1, \ldots, a_n).$$

Teorema 4.6. *T^*M admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ tal que la proyección $\pi^* : T^*M \to M$ es C^∞.*

Demostración. Ejercico. Es similar a lo hecho para el fibrado tangente. □