Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Posgrado y Ed. Continua

TATG - 2016

Práctica sobre Matchings y factores

1. Contar los matchings perfectos del grafo P de Petersen, asumiendo como válido el siguiente resultado: si M es un mathing perfecto de P, entonces $P - M = C_5 + C_5$, donde C_5 denota un ciclo de 5 vértices. **Sugerencia**: Probar primero que cada arista de P es parte de 4 ciclos C_5 y luego contar los ciclos C_5.

2. Sean M_1 y M_2 dos matchings de un grafo G. Probar que las componentes conexas de la diferencia simétrica entre M_1 y M_2, $M_1 \Delta M_2$, son caminos o ciclos pares en G.

3. Probar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

4. Sea G un X,Y-bigrafo, es decir, un grafo bipartito con bipartición X,Y. Sea $S \subseteq X$, saturado por un matching M_1, y $T \subseteq Y$, saturado por un matching M_2. Probar que existe un matching en G que satura a $T \cup S$.

5. Probar que para todo grafo G, existe un matching de tamaño al menos $\frac{|V(G)|}{1+\Delta(G)}$, siendo $\Delta(G)$ el grado máximo de un vértice de G. **Sugerencia**: utilizar inducción sobre el conjunto de aristas de G.

6. Sea G un grafo. Probar:

   a) $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente en G si y sólo si $V(G) \setminus S$ es un cubrimiento por vértices de G;

   b) $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$.

7. *a*) Probar que para cualquier grafo G, $\beta(G) \leq 2\alpha'(G)$.

   b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, construir un grafo simple G con $\alpha'(G) = k$ y $\beta(G) = 2k$. **Sugerencia**: pensar en grafos no conexos.

8. Dada una instancia ($K_{n,n}$ grafo bipartito con pesos $w_{i,j}$) del problema de Matching de máximo peso, probar que en cada iteración del algoritmo Húngaro, el par (u, v) que se construye es un cubrimiento válido.

9. *a*) Dibujar un grafo 3-regular que admita un 1-factor y tenga un vértice de corte.

   b) Probar que todo grafo que se puede descomponer en 1-factores no tiene vértice de corte.

10. Probar que un árbol T tiene un matching perfecto si y sólo si $o(T - v) = 1$, para todo $v \in V(G)$.

11. Probar que en el algoritmo de Galey-Shapley de las propuestas, ningún hombre puede ser rechazado por todas las mujeres. **Sugerencia**: pensar qué ocurre después de que cierto hombre h es rechazado por todas, salvo una mujer.

12. Probar que el matching que el algoritmo de Galey-Shapley de las propuestas produce es estable.

13. Construir una instancia del problema de los compañeros (Roommates problem) que no admita matchings estables.