Tópicos Avanzados en Teoría de Grafos - 2016
Trabajo práctico: Coloreo de Grafos. Parte 2.

Dado un grafo G, notaremos con n su orden, m el número de aristas de G, $d(v)$ el grado del vértice v, $\overline{G}$ el grafo complemento de G, $L(G)$ el grafo de línea de G, $\omega(G)$ el tamaño de la clique máxima de G, $\alpha(G)$ el tamaño del máximo estable en G, $\chi(G)$ el número cromático de G, $\delta(G)$ el grado mínimo de G, $\Delta(G)$ el grado máximo de G.

1. Probar que la función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si y solo si $\phi^{-1}(I)$ es un conjunto estable en G para todo estable I de H.

2. Sean C_m y C_n dos ciclos impares con $m > n$. Probar que $C_m \to C_n$ pero no existe homomorfismo de C_n en C_m.

3. Sea G un grafo y $P = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ una partición de $V(G)$. El grafo cociente G/P es el grafo con conjunto de vértices P y tal que, para $i \neq j$, V_i y V_j son adyacentes si y solo si existen $u \in V_i$ y $v \in V_j$ con $uv \in E(G)$. La función $\pi_P : V(G) \mapsto V(G/P)$ definida por $\pi_P(u) = V_i$ si $u \in V_i$ se denomina mapeo natural para P.

   Analizar para qué tipo de particiones P resulta π_P un homomorfismo de G en G/P.

4. Sea H tal que $\chi(H) = k$. Probar que para todo grafo G, $G \circ H \to G \circ K_k$.

5. Sea $r, k \in \mathbb{N}$ con $r \leq k$ y F la familia de subconjuntos de cardinal exactamente r de $[k] = \{1, \ldots, k\}$. Dado un grafo G una función $f : V(G) \mapsto F$ es un r-upla coloreo de G si $f(u)$ y $f(v)$ son disjuntos cuando $uv \in E(G)$. El número r-upla cromático de G, $\chi_r(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un r-upla coloreo. Probar que:

   a) $\chi_r(K_n) = rn$ y $\chi_2(C_5) = 5$ y $\chi_3(C_5) = 8$.
   b) $r\omega(G) \leq \chi_r(G) \leq r\chi(G)$.
   c) $\chi_r(G) = \chi(G \circ K_r)$.
   d) $\chi_r(G)$ es el mínimo k para el cual existe un homomorfismo de G en el grafo de Kneser $K(k, r)$.

6. Hallar el número cromático de $C_5 \square C_5$, $C_5 \boxtimes C_5$ y $C_5 \circ C_5$.

7. Probar que un grafo G es k-coloreable si y solo si $\alpha(G \square K_k) \geq |V(G)|$.

8. Analizar la veracidad de los siguientes enunciados:

   a) Para dos grafos cualesquiera G y H se verifica que $\overline{G \circ H}$ es isomorfo a $\overline{G} \circ \overline{H}$.
   b) Para todo $k, n \geq 2$, $\chi(C_{2n+1} \boxtimes C_{2k+1}) = 5$.

9. Sea G un grafo simple.

a) Probar que el número de aristas de $L(G)$ es $\sum\limits_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2}$, donde $\binom{1}{2} = \binom{0}{2} = 0$.

b) Demostrar que G es isomorfo a su grafo de línea si y solo si G es 2-regular.

10. Explicitar un coloreo por aristas que pruebe que los grafos bipartitos completos son de clase 1.

11. Demostrar que si H es un subgrafo overfull de G entonces $\Delta(H) = \Delta(G)$.

12. Probar que si G tiene un subgrafo overfull entonces G es de clase 2. Luego, demostrar que la implicación recíproca no es cierta (Sug.: grafo de Petersen).

13. Sea $\chi_l(G)$ el número cromático por lista de G. Probar que $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Ejercicios extras:

1. Demostrar que si G tiene al menos una arista entonces $\chi(G \boxtimes K_2) \geq \chi(G) + 2$.

2. Sea G un grafo r-regular de orden $n = 2k$, con V_1, V_2 una partición de $V(G)$ con $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$ impares. Suponer que $G[V_1]$ es un subgrafo overfull de G. Probar que $G[V_2]$ es subgrafo overfull de G. Además, si k es impar entonces $r < k$ y si k es par $r < k - 1$.

3. Probar que la conjetura overfull implica la conjetura de 1-factorización. Sug.: Usar el resultado anterior.

Conjetura overfull: Sea G un grafo de orden n tal que $\Delta(G) > \frac{n}{3}$. Luego, G es de clase 2 si y solo si G contiene un subgrafo overfull.

Conjetura de 1-factorización: Si G es r-regular de orden n par tal que $n \leq 2r$ entonces G es 1-factorizable.