Tópicos Avanzados en Teoría de Grafos - 2016
Trabajo práctico: Coloreo de Grafos. Parte 1.

Dado un grafo G, notaremos con n su orden, m el número de aristas de G, $d(v)$ el grado del vértice v, $\overline{G}$ el grafo complemento de G, $\omega(G)$ el tamaño de la clique máxima de G, $\alpha(G)$ el tamaño del máximo estable en G, $\chi(G)$ el número cromático de G, $\delta(G)$ el grado mínimo de G, $\Delta(G)$ el grado máximo de G.

1. Demostrar las siguientes desigualdades:
   a) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.
   b) $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.
   c) $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.
   d) $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$.
   e) $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.
   f) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.
   g) $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$.
   h) Si G es color crítico, $\chi(G) \leq 1 + \delta(G)$.
2. Probar que $\text{máx}\{\delta(G') : G' \subseteq G\} \leq \Delta(G)$. Esto prueba que la cota superior del ejercicio 1 g es mejor que la cota superior $1 + \Delta(G)$. Caracterizar los grafos para los cuales $\text{máx}\{\delta(G') : G' \subseteq G\} = \Delta(G)$.
3. Analizar la veracidad de los siguientes enunciados:
   a) Si $\chi(G) = k$ entonces G tiene un k-coloreo para el cual al menos una de sus clases de color tiene $\alpha(G)$ vértices.
   b) Si G es conexo entonces $\chi(G) \leq 1 + p(G)$, donde $p(G)$ es el promedio de sus grados, i.e. $p(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v)$.
   c) Si G es k-crítico con $k \geq 3$, entonces G no tiene un conjunto de corte que induzca un subgrafo completo.
   d) Si G es un grafo k-crítico y perfecto entonces $k = n$.
   e) Sea G un grafo regular. Probar que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = n + 1$ si y solo si G o $\overline{G}$ es isomorfo a un grafo completo o a un ciclo impar.
4. Caracterizar los grafos k-críticos G, con $k \geq 3$, tales que $G - v$ es $(k - 1)$-crítico para todo $v \in V(G)$.
5. Probar el Teorema de Nordhaus-Gaddum (1956): Si G es un grafo de orden n entonces,

a) $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1$,

b) $n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

6. Probar que si G es perfecto entonces $\omega(G)\omega(\overline{G}) \geq n$. ¿Existen grafos tales que $\omega(G)\omega(\overline{G}) \leq n-1$?.

7. Demostrar que G es 3-crítico si y solo si G es isomorfo a C_{2k+1} para algún $k \geq 1$.

8. Probar que el teorema de Brooks es equivalente al siguiente resultado: *Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.*

9. Determinar el error en el siguiente razonamiento que demostraría el teorema de Brooks:

   Usamos inducción sobre n. El resultado es válido para $n = 1$. Para el paso inductivo, supongamos que G no es completo ni ciclo impar. Como el tamaño mínimo de un conjunto separador es a lo sumo $\delta(G)$, entonces G tiene un conjunto separador S de tamaño a lo sumo $\Delta(G)$. Sean $G_1, \ldots, G_m$ las componentes conexas de $G - S$. Sea $H_i = G_i + S$. Por hipótesis de inducción, cada H_i es $\Delta(G)$-coloreable. Luego, permutando los colores de estos coloreos de forma tal que coincidan en S, obtenemos un $\Delta(G)$-coloreo de G.

10. Para cada $n \geq 2$ hallar un grafo bipartito B_n y un orden de sus vértices tal que el algoritmo greedy use n colores.

11. Para cada $k \geq 3$, hallar un árbol T_k con $\Delta(T_k) = k$ y un orden de sus vértice tal que el algoritmo greedy use $k+1$ colores

12. Consideremos el siguiente algoritmo de coloreo: Dado un grafo G, hallar un conjunto estable máximo I_1 y asignarle color 1. Luego, hallar un conjunto estable máximo I_2 de $G - I_1$ y asignarle color 2. Así sucesivamente.

    Hallar ejemplos para los cuales, dependiendo de la elección de los conjuntos estables, el algoritmo pueda ser arbitrariamente malo.