Capítulo 3: Coloreo de grafos

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Asignatura: Tópicos Avanzados en Teoría de Grafos

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta.

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color$\longrightarrow$ Matching

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color$\longrightarrow$ Matching

$\Delta(G) \leq \chi'(G)$

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color$\longrightarrow$ Matching

$\Delta(G) \leq \chi'(G) = \chi(L(G))$

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color$\longrightarrow$ Matching

$\Delta(G) \leq \chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1$

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color$\longrightarrow$ Matching

$\Delta(G) \leq \chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1$.

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color $\longrightarrow$ Matching

$\Delta(G) \leq \chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1$.

$\alpha'(G)$: número de matching de G.
$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$.

Coloreo de aristas

Definición: Un k-coloreo de aristas de un grafo G es una función $f : E(G) \mapsto \{1,\ldots,k\}$ tal que dos aristas con un extremo en común reciben diferente etiqueta. El índice cromático de G, notado $\chi'(G)$, es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo de aristas.

Clases de color$\longrightarrow$ Matching

$\Delta(G) \leq \chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1$.

$\alpha'(G)$: número de matching de G.
$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$.

Teorema (Vizing, 1964; Gupta, 1966)

Si G es un grafo simple,

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Coloreo de aristas

$\chi'(G) = \Delta(G) \longrightarrow Clase 1.$

$\chi'(G) = \Delta(G) + 1 \longrightarrow Clase 2.$

Coloreo de aristas

$\chi'(G) = \Delta(G) \longrightarrow Clase1$.

$\chi'(G) = \Delta(G) + 1 \longrightarrow Clase2$.

1. $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Coloreo de aristas

$\chi'(G) = \Delta(G) \longrightarrow Clase1$.

$\chi'(G) = \Delta(G) + 1 \longrightarrow Clase2$.

1. $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$
2. $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Coloreo de aristas

$\chi'(G) = \Delta(G) \longrightarrow Clase 1$.

$\chi'(G) = \Delta(G) + 1 \longrightarrow Clase 2$.

1. $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$
2. $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Teorema

Sea G un grafo regular. G es de clase 1 sii G es 1-factorizable.

Coloreo de aristas

$\chi'(G) = \Delta(G) \longrightarrow Clase 1.$

$\chi'(G) = \Delta(G) + 1 \longrightarrow Clase 2.$

1. $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$
2. $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Teorema

Sea G un grafo regular. G es de clase 1 sii G es 1-factorizable.

Corolario

Todo grafo simple regular de orden impar es de clase 2.

Coloreo de aristas

Teorema (Konig, 1916)

Si G es bipartito,

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Coloreo de aristas

Teorema (Konig, 1916)

Si G es bipartito,

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Proposición

Si G es un grafo simple tal que $m > \Delta(G)\alpha'(G)$ entonces G es de clase 2.

Coloreo de aristas

Teorema (Konig, 1916)

Si G es bipartito,

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Proposición

Si G es un grafo simple tal que $m > \Delta(G)\alpha'(G)$ entonces G es de clase 2.

Un grafo simple G es overfull si $m > \Delta(G)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Coloreo de aristas

Teorema (Konig, 1916)

Si G es bipartito,

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Proposición

Si G es un grafo simple tal que $m > \Delta(G)\alpha'(G)$ entonces G es de clase 2.

Un grafo simple G es overfull si $m > \Delta(G)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Proposición

Los grafos overfull son de clase 2.

Coloreo de aristas

Teorema (Konig, 1916)

Si G es bipartito,

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Proposición

Si G es un grafo simple tal que $m > \Delta(G)\alpha'(G)$ entonces G es de clase 2.

Un grafo simple G es overfull si $m > \Delta(G)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Proposición

Los grafos overfull son de clase 2.

Si G es de clase 1 entonces $m \leq \Delta(G)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Coloreo de aristas

Dado un grafo G, un subgrafo H de orden impar con $n' = |V(H)|$ y $m' = |E(H)|$ es un subgrafo overfull si $m' > \Delta(G)\lfloor \frac{n'}{2} \rfloor = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Coloreo de aristas

Dado un grafo G, un subgrafo H de orden impar con $n' = |V(H)|$ y $m' = |E(H)|$ es un subgrafo overfull si $m' > \Delta(G)\lfloor\frac{n'}{2}\rfloor = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Ejercicio: Si H es un subgrafo overfull de G entonces $\Delta(H) = \Delta(G)$

Coloreo de aristas

Dado un grafo G, un subgrafo H de orden impar con $n' = |V(H)|$ y $m' = |E(H)|$ es un subgrafo overfull si $m' > \Delta(G)\lfloor \frac{n'}{2} \rfloor = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Ejercicio: Si H es un subgrafo overfull de G entonces $\Delta(H) = \Delta(G)$

Teorema

Si G tiene un subgrafo overfull entonces G es de clase 2.

Coloreo de aristas

Dado un grafo G, un subgrafo H de orden impar con $n' = |V(H)|$ y $m' = |E(H)|$ es un subgrafo overfull si $m' > \Delta(G)\lfloor \frac{n'}{2} \rfloor = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Ejercicio: Si H es un subgrafo overfull de G entonces $\Delta(H) = \Delta(G)$

Teorema

Si G tiene un subgrafo overfull entonces G es de clase 2.

La recíproca no es cierta. Estudiar el grafo de Petersen.

Coloreo de aristas

Dado un grafo G, un subgrafo H de orden impar con $n' = |V(H)|$ y $m' = |E(H)|$ es un subgrafo overfull si $m' > \Delta(G)\lfloor \frac{n'}{2} \rfloor = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Ejercicio: Si H es un subgrafo overfull de G entonces $\Delta(H) = \Delta(G)$

Teorema

Si G tiene un subgrafo overfull entonces G es de clase 2.

La recíproca no es cierta. Estudiar el grafo de Petersen.

Conjetura(Chetwynd-Hilton, 1986): Sea G un grafo simple con $m > \frac{n}{3}$. G es de clase 2 sii G tiene un subgrafo overfull.

Coloreo por listas

$v \in V(G) \longrightarrow L(v)$.

$\mathscr{L} = \{L(v) : \ v \in V(G)\}$.

Coloreo por listas

$v \in V(G) \longrightarrow L(v)$.

$\mathscr{L} = \{L(v) : \ v \in V(G)\}$.

Un $\mathscr{L}$-coloreo por lista f de G es un coloreo de G tal que $f(v) \in L(v)$.

Coloreo por listas

$v \in V(G) \longrightarrow L(v)$.

$\mathscr{L} = \{L(v) : \ v \in V(G)\}$.

Un $\mathscr{L}$-coloreo por lista f de G es un coloreo de G tal que $f(v) \in L(v)$.

En tal caso se dice que G es $\mathscr{L}$-elegible.

Coloreo por listas

$v \in V(G) \longrightarrow L(v)$.

$\mathscr{L} = \{L(v) : \; v \in V(G)\}$.

Un $\mathscr{L}$-coloreo por lista f de G es un coloreo de G tal que $f(v) \in L(v)$.

En tal caso se dice que G es $\mathscr{L}$-elegible.

Un grafo G se dice k-elegible si es $\mathscr{L}$-elegible para todo conjunto de listas $\mathscr{L}$ con $|L(v)| \geq k$ para todo $v \in V(G)$.

Coloreo por listas

$v \in V(G) \longrightarrow L(v)$.

$\mathscr{L} = \{L(v) : \ v \in V(G)\}$.

Un $\mathscr{L}$-coloreo por lista f de G es un coloreo de G tal que $f(v) \in L(v)$.

En tal caso se dice que G es $\mathscr{L}$-elegible.

Un grafo G se dice k-elegible si es $\mathscr{L}$-elegible para todo conjunto de listas $\mathscr{L}$ con $|L(v)| \geq k$ para todo $v \in V(G)$.

El mínimo k para el cual G es k-elegible se denomina número cromático por lista y se nota $\chi_l(G)$.

Coloreo por listas

$v \in V(G) \longrightarrow L(v)$.

$\mathscr{L} = \{L(v) : \; v \in V(G)\}$.

Un $\mathscr{L}$-coloreo por lista f de G es un coloreo de G tal que $f(v) \in L(v)$.

En tal caso se dice que G es $\mathscr{L}$-elegible.

Un grafo G se dice k-elegible si es $\mathscr{L}$-elegible para todo conjunto de listas $\mathscr{L}$ con $|L(v)| \geq k$ para todo $v \in V(G)$.

El mínimo k para el cual G es k-elegible se denomina número cromático por lista y se nota $\chi_l(G)$.

Ejercicio: $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta + 1$.

Coloreo por listas

Teorema

Todo árbol es 2-elegible. Más aún, para todo árbol T, vértice u de T, $\mathscr{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$ una lista de colores de tamaño dos, con $a \in L(u)$, existe un $\mathscr{L}$-coloreo por lista tal que u recibe el color a.

Coloreo por listas

Teorema

Todo árbol es 2-elegible. Más aún, para todo árbol T, vértice u de T, $\mathscr{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$ una lista de colores de tamaño dos, con $a \in L(u)$, existe un $\mathscr{L}$-coloreo por lista tal que u recibe el color a.

Teorema

Todo ciclo par es 2-elegible.

Coloreo por listas

Teorema

Todo árbol es 2-elegible. Más aún, para todo árbol T, vértice u de T, $\mathscr{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$ una lista de colores de tamaño dos, con $a \in L(u)$, existe un $\mathscr{L}$-coloreo por lista tal que u recibe el color a.

Teorema

Todo ciclo par es 2-elegible.

¿Todo grafo bipartito es 2-elegible?

Coloreo por listas

Teorema

Todo árbol es 2-elegible. Más aún, para todo árbol T, vértice u de T, $\mathscr{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$ una lista de colores de tamaño dos, con $a \in L(u)$, existe un $\mathscr{L}$-coloreo por lista tal que u recibe el color a.

Teorema

Todo ciclo par es 2-elegible.

¿Todo grafo bipartito es 2-elegible? No.

Coloreo por listas

Teorema

Todo árbol es 2-elegible. Más aún, para todo árbol T, vértice u de T, $\mathscr{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$ una lista de colores de tamaño dos, con $a \in L(u)$, existe un $\mathscr{L}$-coloreo por lista tal que u recibe el color a.

Teorema

Todo ciclo par es 2-elegible.

¿Todo grafo bipartito es 2-elegible? No.

Lema

Sean r y k dos enteros positivos tales que $r \geq \binom{2k-1}{k}$. Luego, $K_{r,r}$ no es k-elegible.

Coloreo por listas de grafos planares

Conjetura: [Vizing, 1976; Erdos et al., 1979]
Todo grafo planar es 5-elegible.

Coloreo por listas de grafos planares

Conjetura: [Vizing, 1976; Erdos et al., 1979]
Todo grafo planar es 5-elegible.

Teorema (Carsten Thomassen, 1994)

Todo grafo planar es 5-elegible.