Capítulo 3: Coloreo de grafos

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Asignatura: Tópicos Avanzados en Teoría de Grafos

HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?
- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.
Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?
- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \quad \omega(H)$.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?
- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?
- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.
- Si ϕ homomorfismo de G en H entonces para todo estable I de H, $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?
- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.
- Si ϕ homomorfismo de G en H entonces para todo estable I de H, $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G.
- Una función $\phi : V(G) \to V(H)$ es un homomorfismo si y solo si $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G para todo estable I de H.

Homomorfismos de grafos

Sean G y H dos grafos. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un homomorfismo de G en H si preserva adyacencias, i.e. si para toda arista uv de G, $\phi(u)\phi(v)$ es arista de H.

Notación: $G \to H$.

- $G \to K_2$, para todo G bipartito.
- Si $m \geq n$, ¿$C_m \to C_n$?
- Si $G' \subseteq G$, $G' \to G$.
- Si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.
- Si ϕ homomorfismo de G en H entonces para todo estable I de H, $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G.
- Una función $\phi : V(G) \to V(H)$ es un homomorfismo si y solo si $\phi^{-1}(I)$ es un estable de G para todo estable I de H.
- Si $G \to H$ y $H \to W$ entonces $G \to W$.

Homomorfismos de grafos

Proposición

G es k-coloreable si y solo si $G \to K_k$.

Homomorfismos de grafos

Proposición

G es k-coloreable si y solo si $G \to K_k$.

Corolario

$\chi(G) = min\{k : G \to K_k\}$.

Homomorfismos de grafos

Proposición

G es k-coloreable si y solo si $G \to K_k$.

Corolario

$\chi(G) = min\{k : G \to K_k\}$.

Proposición

Si $G \to H$ entonces $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1)$

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1) \to K(m-4,n-2) \ldots$

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1) \to K(m-4,n-2) \ldots \to$

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1) \to K(m-4,n-2) \ldots \to K(m-2n+2,1)$.

LEMA

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1) \to K(m-4,n-2) \ldots \to K(m-2n+2,1)$.

$K(m-2n+2,1) \approx K_{2m-2n+2}$.

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ y $m \geq 2n$ entonces

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1) \to K(m-4,n-2) \ldots \to K(m-2n+2,1)$.

$K(m-2n+2,1) \approx K_{2m-2n+2}$.

$K(m,n) \to K_{2m-2n+2}$.

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$K(m,n) \to K(m-2,n-1) \to K(m-4,n-2) \ldots \to K(m-2n+2,1)$.

$K(m-2n+2,1) \approx K_{2m-2n+2}$.

$K(m,n) \to K_{2m-2n+2}$.

$\chi(K(m,n)) \leq m-2n+2$.

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

Homomorfismos de grafos

Lema

Si $n \geq 2$ *y* $m \geq 2n$ *entonces*

$$K(m,n) \to K(m-2,n-1).$$

$$\phi(A) = \begin{cases} A \setminus \text{máx}(A) & \text{si } |\{m-1,m\} \cap A| \leq 1, \\ (A \setminus \{m-1,m\}) \cup \text{máx}(\overline{A}) & \text{si } \{m-1,m\} \subseteq A. \end{cases}$$

Producto de grafos

Producto cartesiano de G y H: $G\square H$

$$V(G\square H) = V(G) \times V(H)$$

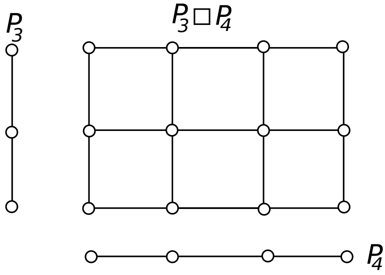
$$E(G\square H) = \{(v,u)(v',u') : \left[v = v', uu' \in E(H)\right] \vee \left[vv' \in E(G), u = u'\right]\}$$

PRODUCTO DE GRAFOS

Producto cartesiano de G y H: $G\square H$

$$V(G\square H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G\square H) = \{(v,u)(v',u') : \left[v = v', uu' \in E(H)\right] \vee \left[vv' \in E(G), u = u'\right]\}$$



Producto cartesiano de grafos

Teorema

$\chi(G\Box H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Producto cartesiano de grafos

Teorema

$\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Prueba:

$G \subseteq G \square H$, $H \subseteq G \square H$

$\chi(G \square H) \geq \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Producto cartesiano de grafos

Teorema

$\chi(G\Box H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Prueba:

$G \subseteq G\Box H$, $H \subseteq G\Box H$

$\chi(G\Box H) \geq \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Sup. $\chi(G) \geq \chi(H)$.

$g : V(G) \mapsto \{0, \ldots, \chi(G) - 1\}$ coloreo de G.

$h : V(G) \mapsto \{0, \ldots, \chi(H) - 1\}$ coloreo de H.

Producto cartesiano de grafos

Teorema

$\chi(G\Box H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Prueba:

$G \subseteq G\Box H$, $H \subseteq G\Box H$

$\chi(G\Box H) \geq \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Sup. $\chi(G) \geq \chi(H)$.

$g : V(G) \mapsto \{0, \dots, \chi(G) - 1\}$ coloreo de G.

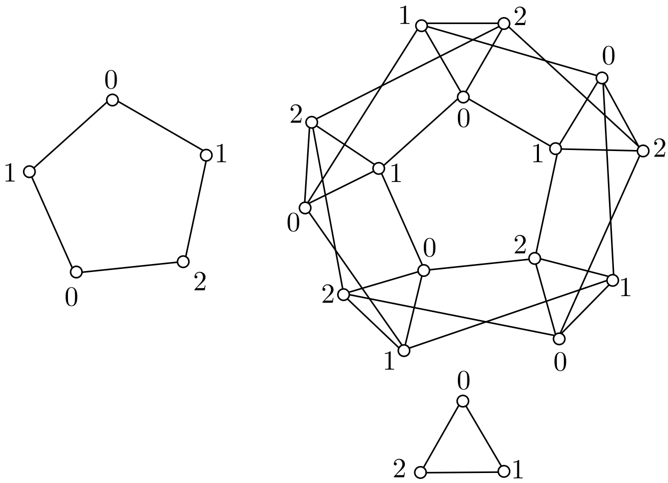
$h : V(G) \mapsto \{0, \dots, \chi(H) - 1\}$ coloreo de H.

$f : V(G\Box H) \mapsto \{0, \dots, \chi(G) - 1\}$

$f(v, u) = g(v) + h(u) \quad mod\ \chi(G)$.

$\Box$

Producto cartesiano de grafos



PRODUCTO DE GRAFOS

Producto fuerte de G y H: $G \boxtimes H$

$$V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$$

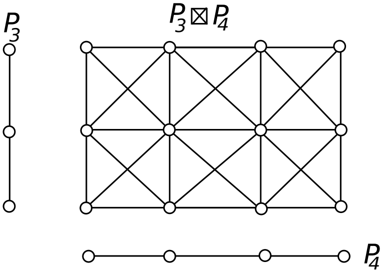
$$E(G \boxtimes H) = \{(v,u)(v',u') : [v = v', uu' \in E(H)] \vee [vv' \in E(G), u = u'] \vee [vv' \in E(G), uu' \in E(H)]\}.$$

Producto de grafos

Producto fuerte de G y H: $G \boxtimes H$

$$V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \boxtimes H) = \{(v,u)(v',u') : [v = v', uu' \in E(H)] \vee [vv' \in E(G), u = u']$$
$$\vee [vv' \in E(G), uu' \in E(H)]\}.$$



Producto de grafos

Producto lexicográfico de G y H: $G \circ H$

$$V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$$

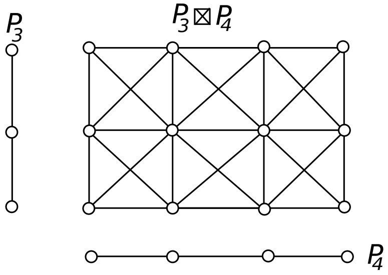
$$E(G \circ H) = \{(v,u)(v',u') : [vv' \in E(G)] \vee [v = v', uu' \in E(H)]\}.$$

PRODUCTO DE GRAFOS

Producto lexicográfico de G y H: $G \circ H$

$$V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \circ H) = \{(v,u)(v',u') : [vv' \in E(G)] \vee [v = v', uu' \in E(H)]\}.$$

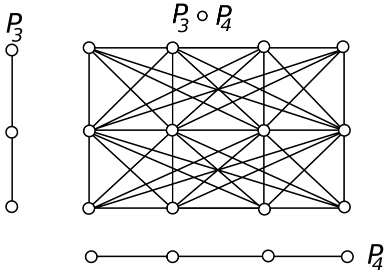


PRODUCTO DE GRAFOS

Producto lexicográfico de G y H: $G \circ H$

$$V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \circ H) = \{(v,u)(v',u') : [vv' \in E(G)] \vee [v = v', uu' \in E(H)]\}.$$



Coloreo: Producto de grafos

Teorema

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(G)\chi(H)$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(G)\chi(H)$.

Prueba:

$G \boxtimes H \subseteq G \circ H$.

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H)$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(G)\chi(H)$.

Prueba:

$G \boxtimes H \subseteq G \circ H$.

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H)$.

g y h coloreos mínimos de G y H, resp.

$f(v,u) = (g(v), f(u))$ es un coloreo de $G \circ H$ con $\chi(G)\chi(H)$ colores.

$\square$

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(G)\chi(H)$.

Prueba:
$G \boxtimes H \subseteq G \circ H$.
$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H)$.

g y h coloreos mínimos de G y H, resp.

$f(v,u) = (g(v), f(u))$ es un coloreo de $G \circ H$ con $\chi(G)\chi(H)$ colores.

$\square$

$K_{mn} \approx K_m \boxtimes K_n$.

$\chi(K_m \boxtimes K_n) = \chi(K_m \circ K_n) = \chi(K_m)\chi(K_n) = mn$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(G)\chi(H)$.

Prueba:

$G \boxtimes H \subseteq G \circ H$.

$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H)$.

g y h coloreos mínimos de G y H, resp.

$f(v,u) = (g(v), f(u))$ es un coloreo de $G \circ H$ con $\chi(G)\chi(H)$ colores.

$\square$

$K_{mn} \approx K_m \boxtimes K_n$.

$\chi(K_m \boxtimes K_n) = \chi(K_m \circ K_n) = \chi(K_m)\chi(K_n) = mn$.

$\chi(C_5 \boxtimes C_5) = 5$, $\chi(C_5 \circ C_5) = 8$, $\chi(C_5)\chi(C_5) = 9$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$*, entonces* $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ *para todo grafo* G*.*

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$, entonces $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ para todo grafo G.

Prueba:

$H \to K_n$ entonces $G \circ H \to G \circ K_n$ (ejercicio).

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$, entonces $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ para todo grafo G.

Prueba:

$H \to K_n$ entonces $G \circ H \to G \circ K_n$ (ejercicio).

$\chi(G \circ H) \leq \chi(G \circ K_n)$

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$*, entonces* $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ *para todo grafo* G*.*

Prueba:

$H \to K_n$ entonces $G \circ H \to G \circ K_n$ (ejercicio).

$\chi(G \circ H) \leq \chi(G \circ K_n)$

Coloreo de $G \circ K_n$ con $\chi(G \circ H)$ colores.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$*, entonces* $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ *para todo grafo* G*.*

Prueba:
$H \to K_n$ entonces $G \circ H \to G \circ K_n$ (ejercicio).

$\chi(G \circ H) \leq \chi(G \circ K_n)$

Coloreo de $G \circ K_n$ con $\chi(G \circ H)$ colores. En cada H-fibrado, tomar n vértices con diferentes colores y colocar aristas entre ellos.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$, entonces $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ para todo grafo G.

Prueba:
$H \to K_n$ entonces $G \circ H \to G \circ K_n$ (ejercicio).

$\chi(G \circ H) \leq \chi(G \circ K_n)$

Coloreo de $G \circ K_n$ con $\chi(G \circ H)$ colores. En cada H-fibrado, tomar n vértices con diferentes colores y colocar aristas entre ellos.Eliminar los vértices restantes.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema

Si $\chi(H) = n$, entonces $\chi(G \circ H) = \chi(G \circ K_n)$ para todo grafo G.

Prueba:
$H \to K_n$ entonces $G \circ H \to G \circ K_n$ (ejercicio).

$\chi(G \circ H) \leq \chi(G \circ K_n)$

Coloreo de $G \circ K_n$ con $\chi(G \circ H)$ colores. En cada H-fibrado, tomar n vértices con diferentes colores y colocar aristas entre ellos.Eliminar los vértices restantes. Resulta un coloreo de $G \circ K_n$ con $\chi(G \circ H)$ colores.
$\square$

Coloreo: Producto de grafos

Un K_n subdividido es un grafo obtenido reemplazando las aristas de K_n por caminos simples disjuntos.

Coloreo: Producto de grafos

Un K_n subdividido es un grafo obtenido reemplazando las aristas de K_n por caminos simples disjuntos.

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Coloreo: Producto de grafos

Un K_n subdividido es un grafo obtenido reemplazando las aristas de K_n por caminos simples disjuntos.

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Para $n = 2, 3, 4$ vale.

Coloreo: Producto de grafos

Un K_n subdividido es un grafo obtenido reemplazando las aristas de K_n por caminos simples disjuntos.

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Para $n = 2, 3, 4$ vale.
¿$n \geq 5$?

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Klavzar, 1993)

Si G es color crítico, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(H)(\chi(G) - 1) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{\alpha(G)} \right\rceil .$$

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Klavzar, 1993)

Si G es color crítico, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(H)(\chi(G) - 1) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Prueba:

$C_0, C_1, \ldots, C_{\chi(H)-1}$ clases de color de un coloreo óptimo de H.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Klavzar, 1993)

Si G es color crítico, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(H)(\chi(G)-1) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Prueba:

$C_0, C_1, \ldots, C_{\chi(H)-1}$ clases de color de un coloreo óptimo de H.

$S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha(G)-1}\}$ independiente máximo de G.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Klavzar, 1993)

Si G es color crítico, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(H)(\chi(G)-1) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{\alpha(G)} \right\rceil .$$

Prueba:

$C_0, C_1, \ldots, C_{\chi(H)-1}$ clases de color de un coloreo óptimo de H.

$S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha(G)-1}\}$ independiente máximo de G.

Para cada $i = 0, \ldots, \alpha(G)-1$, $f_i : V(G) \setminus \{a_i\} \mapsto \{1, \ldots, \chi(G)-1\}$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Klavzar, 1993)

Si G es color crítico, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(H)(\chi(G)-1) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Prueba:

$C_0, C_1, \ldots, C_{\chi(H)-1}$ clases de color de un coloreo óptimo de H.

$S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha(G)-1}\}$ independiente máximo de G.

Para cada $i = 0, \ldots, \alpha(G)-1$, $f_i : V(G) \setminus \{a_i\} \mapsto \{1, \ldots, \chi(G)-1\}$.

Para cada $j = 0, \ldots, \chi(H)-1$, $j = c_j\alpha(G) + r_j$, $0 \leq r_j < \alpha(G)$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Klavzar, 1993)

Si G es color crítico, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \boxtimes H) \leq \chi(G \circ H) \leq \chi(H)(\chi(G)-1) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Prueba:

$C_0, C_1, \ldots, C_{\chi(H)-1}$ clases de color de un coloreo óptimo de H.

$S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha(G)-1}\}$ independiente máximo de G.

Para cada $i = 0, \ldots, \alpha(G)-1$, $f_i : V(G) \setminus \{a_i\} \mapsto \{1, \ldots, \chi(G)-1\}$.

Para cada $j = 0, \ldots, \chi(H)-1$, $j = c_j\alpha(G) + r_j$, $0 \leq r_j < \alpha(G)$.

$$f(a,x) = \begin{cases} c_j\chi(G) & \text{si } x \in C_j \text{ y } a = a_{r_j}, \\ j\chi(G) + f_{r_j}(a) & \text{si } x \in C_j \text{ y } a \neq a_{r_j}. \end{cases}$$

$\square$

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:

Sup $G = C_{2k+1}$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:
Sup $G = C_{2k+1}$.

$C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G \circ H)}$ clases de color de un coloreo óptimo de $G \circ H$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:
Sup $G = C_{2k+1}$.

$C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G\circ H)}$ clases de color de un coloreo óptimo de $G \circ H$.

Para cada $a \in V(G)$, n_a es el número de estas clases de color que tienen intersección no vacía con el H-fibrado $\{a\} \times V(H)$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:
Sup $G = C_{2k+1}$.

$C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G\circ H)}$ clases de color de un coloreo óptimo de $G \circ H$.

Para cada $a \in V(G)$, n_a es el número de estas clases de color que tienen intersección no vacía con el H-fibrado $\{a\} \times V(H)$. Los H-fibrados son isomorfos a H.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:
Sup $G = C_{2k+1}$.

$C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G \circ H)}$ clases de color de un coloreo óptimo de $G \circ H$.

Para cada $a \in V(G)$, n_a es el número de estas clases de color que tienen intersección no vacía con el H-fibrado $\{a\} \times V(H)$. Los H-fibrados son isomorfos a H.

$$n_a \geq \chi(H).$$

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:
Sup $G = C_{2k+1}$.

$C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G \circ H)}$ clases de color de un coloreo óptimo de $G \circ H$.

Para cada $a \in V(G)$, n_a es el número de estas clases de color que tienen intersección no vacía con el H-fibrado $\{a\} \times V(H)$. Los H-fibrados son isomorfos a H.

$$n_a \geq \chi(H).$$

Veamos $\sum_{a \in V(G)} n_a$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil ,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:

$proy_G(C_i)$ es un conjunto independiente en $G = C_{2k+1}$,

COLOREO: PRODUCTO DE GRAFOS

TEOREMA (STAHL, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:

$proy_G(C_i)$ es un conjunto independiente en $G = C_{2k+1}$, $k \geq |proy_G(C_i)|$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:

$proy_G(C_i)$ es un conjunto independiente en $G = C_{2k+1}$, $k \geq |proy_G(C_i)|$.

Luego C_i es contado a lo sumo k veces en $\sum_{a \in V(G)} n_a$.

Coloreo: Producto de grafos

Teorema (Stahl, 1976)

Sea G un grafo no bipartito, para todo grafo H se verifica

$$\chi(G \circ H) \geq 2\chi(H) + \left\lceil \frac{\chi(H)}{k} \right\rceil,$$

donde $2k+1$ es la longitud del ciclo impar más corto en G.

Prueba:

$proy_G(C_i)$ es un conjunto independiente en $G = C_{2k+1}$, $k \geq |proy_G(C_i)|$.

Luego C_i es contado a lo sumo k veces en $\sum_{a\in V(G)} n_a$.

$$k\chi(G \circ H) \geq \sum_{a\in V(G)} n_a \geq (2k+1)\chi(H).$$

□

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.
Para $n = 2, 3, 4$ vale.

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.
Para $n = 2, 3, 4$ vale. El caso general es falso (Catlin, 1979).

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.
Para $n = 2, 3, 4$ vale. El caso general es falso (Catlin, 1979).
El contraejemplo requiere el siguiente corolario inmediato de los dos teoremas previos:

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.
Para $n = 2, 3, 4$ vale. El caso general es falso (Catlin, 1979).
El contraejemplo requiere el siguiente corolario inmediato de los dos teoremas previos:

Corolario

Para todo $k, n \geq 1$,

$$\chi(C_{2k+1} \circ K_n) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil .$$

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.
Para $n = 2,3,4$ vale. El caso general es falso (Catlin, 1979).
El contraejemplo requiere el siguiente corolario inmediato de los dos teoremas previos:

Corolario

Para todo $k,n \geq 1$,

$$\chi(C_{2k+1} \circ K_n) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Por corolario, $\chi(C_{2n+1} \circ K_{n+1}) = 2n + 4$.

Conjetura de Hajós

Conjetura de Hajós (1950): Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Esta conjetura estuvo abierta por casi 30 años hasta que fue resuelta por Catlin en 1979.
Para $n = 2, 3, 4$ vale. El caso general es falso (Catlin, 1979).
El contraejemplo requiere el siguiente corolario inmediato de los dos teoremas previos:

Corolario

Para todo $k, n \geq 1$*,*

$$\chi(C_{2k+1} \circ K_n) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Por corolario, $\chi(C_{2n+1} \circ K_{n+1}) = 2n + 4$. Probaremos que, para $n \geq 2$, $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ contiene un K_{2n+3} subdividido pero no un K_{2n+4} subdividido.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Para un K_{2n+3} subdividido consideramos dos K_{n+1}-fibrados adyacentes y un vértice adyacente a uno de ellos.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Para un K_{2n+3} subdividido consideramos dos K_{n+1}-fibrados adyacentes y un vértice adyacente a uno de ellos.

Si G es un contraejemplo de la conjetura, $G \oplus K_1$ también lo es, pues $\chi(G \oplus K_1) = \chi(G) + 1$.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Para un K_{2n+3} subdividido consideramos dos K_{n+1}-fibrados adyacentes y un vértice adyacente a uno de ellos.

Si G es un contraejemplo de la conjetura, $G \oplus K_1$ también lo es, pues $\chi(G \oplus K_1) = \chi(G) + 1$.

Primer contraejemplo $\chi(C_5 \circ K_3) = 8$.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Para un K_{2n+3} subdividido consideramos dos K_{n+1}-fibrados adyacentes y un vértice adyacente a uno de ellos.

Si G es un contraejemplo de la conjetura, $G \oplus K_1$ también lo es, pues $\chi(G \oplus K_1) = \chi(G) + 1$.

Primer contraejemplo $\chi(C_5 \circ K_3) = 8$. Luego, no vale la conjetura para $n \geq 8$.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Para un K_{2n+3} subdividido consideramos dos K_{n+1}-fibrados adyacentes y un vértice adyacente a uno de ellos.

Si G es un contraejemplo de la conjetura, $G \oplus K_1$ también lo es, pues $\chi(G \oplus K_1) = \chi(G) + 1$.

Primer contraejemplo $\chi(C_5 \circ K_3) = 8$. Luego, no vale la conjetura para $n \geq 8$.

Contraejemplo para $n = 7$, removiendo dos vértices adyacentes de $C_5 \circ K_3$.

Conjetura de Hajós

Si $\chi(G) = n$ entonces G contiene un K_n subdividido.

Sea $X \subseteq V(C_{2n+1} \circ K_{n+1})$ con $|X| = 2n+4$. Como $n \geq 2$ existen dos vértices u y v de X que están en dos K_{n+1}-fibrados no adyacentes.

Luego, existen dos K_{n+1}-fibrados que separan u y v.

Como u y v pueden ser separados por un conjunto de cardinal $2n+2$, X no puede ser el conjunto de vértices originales de un K_{2n+4} subdividido.

Entonces $C_{2n+1} \circ K_{n+1}$ no contiene un K_{2n+4} subdividido.

Para un K_{2n+3} subdividido consideramos dos K_{n+1}-fibrados adyacentes y un vértice adyacente a uno de ellos.

Si G es un contraejemplo de la conjetura, $G \oplus K_1$ también lo es, pues $\chi(G \oplus K_1) = \chi(G) + 1$.

Primer contraejemplo $\chi(C_5 \circ K_3) = 8$. Luego, no vale la conjetura para $n \geq 8$.

Contraejemplo para $n = 7$, removiendo dos vértices adyacentes de $C_5 \circ K_3$.

El problema está aún abierto para $n = 5, 6$.