CAPÍTULO 3: COLOREO DE GRAFOS

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Asignatura: Tópicos Avanzados en Teoría de Grafos

Introducción

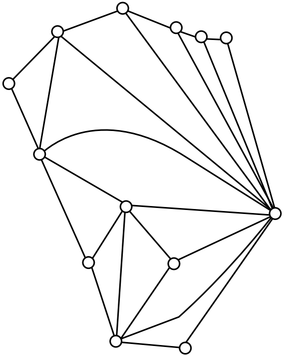
Introducción

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
4 colores son suficientes para colorear cualquier mapa de modo tal que regiones limítrofes (i.e. regiones con un segmento en común, no solo un punto) posean distinto color.

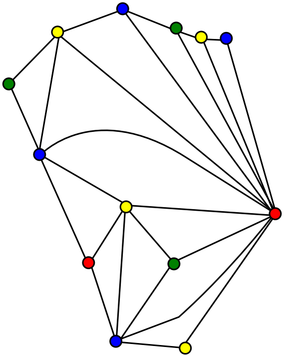
Introducción

Introducción

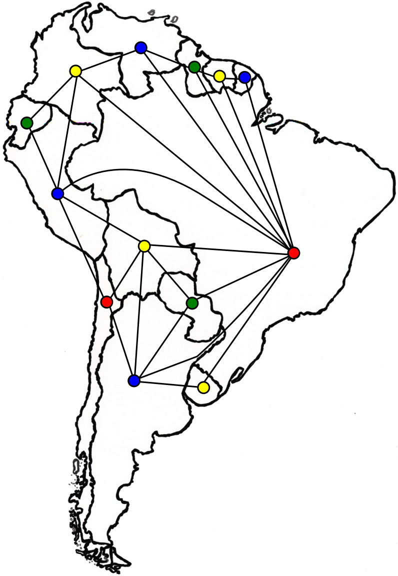
INTRODUCCIÓN



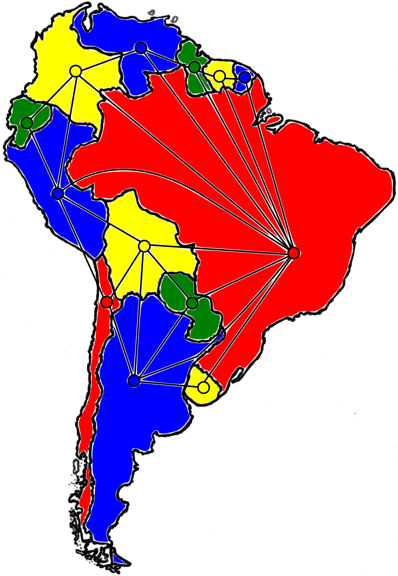
Introducción



INTRODUCCIÓN



Introducción



INTRODUCCIÓN

Introducción

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
4 colores son suficientes para colorear cualquier mapa de modo tal que regiones limítrofes (i.e. regiones con un segmento en común, no solo un punto) posean distinto color.

Introducción

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
4 colores son suficientes para colorear cualquier mapa de modo tal que regiones limítrofes (i.e. regiones con un segmento en común, no solo un punto) posean distinto color.

Equivalentemente,

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

Introducción

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.

INTRODUCCIÓN

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.

- Primera publicación Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259-261, 1879.

Introducción

Teorema de los 4 colores

Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.

- Primera publicación Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259-261, 1879.

- 1879: Alfred Bray Kempe publica una prueba de la Conjetura (American Journal of Mathematics).

INTRODUCCIÓN

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.
- Primera publicación Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259-261, 1879.
- 1879: Alfred Bray Kempe publica una prueba de la Conjetura (American Journal of Mathematics).
- 1890: Percy John Heawood muestra que la prueba era incorrecta. Con la misma idea se prueba que los grafos planares son 5-coloreables.

INTRODUCCIÓN

Teorema de los 4 colores

Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.
- Primera publicación Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259-261, 1879.
- 1879: Alfred Bray Kempe publica una prueba de la Conjetura (American Journal of Mathematics).
- 1890: Percy John Heawood muestra que la prueba era incorrecta. Con la misma idea se prueba que los grafos planares son 5-coloreables.
- 1977: demostración computacional de Kenneth Appel y Wolfgang Haken (University of Illinois).

Teorema de los 4 colores

Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

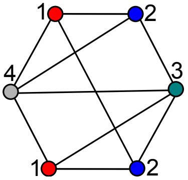
  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.
- Primera publicación Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259-261, 1879.
- 1879: Alfred Bray Kempe publica una prueba de la Conjetura (American Journal of Mathematics).
- 1890: Percy John Heawood muestra que la prueba era incorrecta. Con la misma idea se prueba que los grafos planares son 5-coloreables.
- 1977: demostración computacional de Kenneth Appel y Wolfgang Haken (University of Illinois).
- 1997: N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, *The four color theorem*, J. Combin. Theory Ser. B. 70 (1997), 2-44.

COLOREO DE GRAFOS

Definición: Un k-*coloreo* de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que

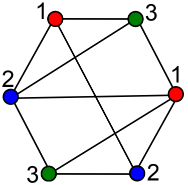
$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G).$$



Coloreo de grafos

Definición: Un k-*coloreo* de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que

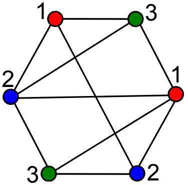
$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G).$$



COLOREO DE GRAFOS

Definición: Un k-*coloreo* de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que

$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G).$$

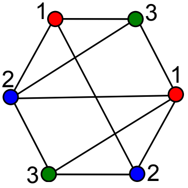


$$\chi(G) = \text{mín}\{k : G \text{ admite un } k\text{-coloreo}\}$$

Coloreo de grafos

Definición: Un k-*coloreo* de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto \{1,\ldots,k\}$ tal que

$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G).$$



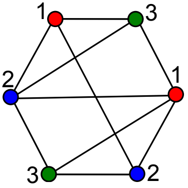
$$\chi(G) = 3$$

$$\chi(G) = \text{mín}\{k : G \text{ admite un } k\text{-coloreo}\}$$

COLOREO DE GRAFOS

Definición: Un k-*coloreo* de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que

$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G).$$



$$\chi(G) = 3$$

$$\chi(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-coloreo}\}$$

Un grafo G se dice *color-crítico* o $\chi(G)$-*crítico* si para todo $v \in V(G)$, $\chi(G - v) < \chi(G)$.

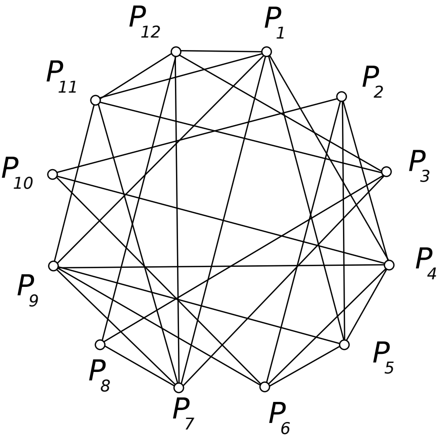
Aplicaciones

En un aeropuerto existen 4 instalaciones que son destinadas al mantenimiento de los aeroplanos (i.e. a lo sumo 4 aeroplanos pueden ser atendidos al mismo tiempo). Estas instalaciones se encuentran operables de $7:00$ a $19:00$ hrs. Realizar el mantenimiento requiere de tres horas por cada aeroplano. En un día particular 12 aerolanos necesitan mantenimiento en los periodos indicados:

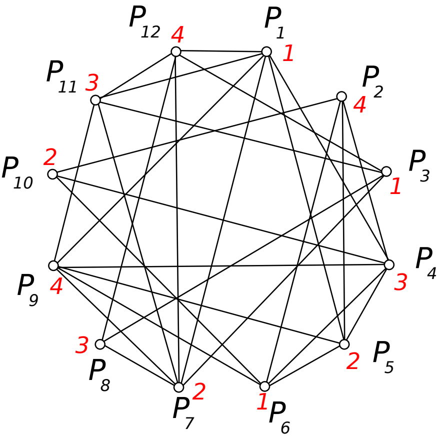
$P_1 : 11:00 - 14:00$; $P_2 : 15:00\ 18:00$; $P_3 : 8:00 - 11:00$; $P_4 : 13:30 - 16:30$; $P_5 : 13:00 - 16:00$; $P_6 : 14:00 - 17:00$; $P_7 : 9:30 - 12:30$; $P_8 : 7:00 - 10:00$; $P_9 : 12:00 - 15:00$; $P_{10} : 16:00 - 19:00$; $P_{11} : 10:00 - 13:00$; $P_{12} : 9:00 - 12:00$.

¿Pueden realizarse todas las tareas de mantenimiento?

Aplicaciones



APLICACIONES



Cotas del número cromático

$n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, $\delta(G)$: grado mínimo de G,

$\alpha(G)$: número de estabilidad de G, $\omega(G)$: número de clique de G,

Cotas del número cromático

$n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, $\delta(G)$: grado mínimo de G,

$\alpha(G)$: número de estabilidad de G, $\omega(G)$: número de clique de G,

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.
- $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.
- $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.

Cotas del número cromático

$n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, $\delta(G)$: grado mínimo de G,

$\alpha(G)$: número de estabilidad de G, $\omega(G)$: número de clique de G,

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.
- $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.
- $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.
- $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.
- $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.
- $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(G') : \ G' \subseteq G\}$.

Cotas del número cromático

Teorema

Para todo grafo k-crítico, con $k \geq 2$, es $(k-1)$-arista conexo.

Cotas del número cromático

Teorema

Para todo grafo k-crítico, con $k \geq 2$, es $(k-1)$-arista conexo.

Corolario

Si G es color crítico, $\chi(G) \leq 1 + \delta(G)$.

Cotas del número cromático

Teorema

Para todo grafo k-crítico, con $k \geq 2$, es $(k-1)$-arista conexo.

Corolario

Si G es color crítico, $\chi(G) \leq 1 + \delta(G)$.

Teorema (B. Reed, 1998)

Para todo grafo G de orden n se verifica,

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G)}{2} \right\rfloor.$$

Cotas de $\chi(G)$

Teorema (Nordhaus-Gaddum, 1956)

Si G es un grafo de orden n entonces,

1. $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$,
2. $n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

COTAS DE $\chi(G)$

TEOREMA (NORDHAUS-GADDUM, 1956)

Si G es un grafo de orden n entonces,

1. $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1$,
2. $n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

TEOREMA

Sea n un entero positivo. Para todo par de números enteros a, b tales que

$$2\sqrt{n} \leq a+b \leq n+1 \wedge n \leq a.b \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,$$

existe un grafo G de orden n tal que

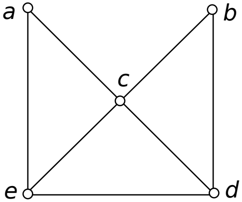
$$\chi(G) = a \wedge \chi(\overline{G}) = b.$$

Cotas: Algoritmo Greedy

Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el *algoritmo greedy* colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.

Cotas: Algoritmo Greedy

Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el *algoritmo greedy* colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.

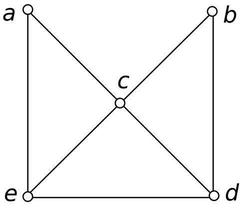


Orden: a, b, c, d, e:

$a, b \to 1$, $c \to 2$, $d \to 3$, $e \to 4$.

Cotas: Algoritmo Greedy

Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el *algoritmo greedy* colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.



Orden: a, b, c, d, e:
$a, b \to 1$, $c \to 2$, $d \to 3$, $e \to 4$.

Orden: a, d, b, c, e:
$a, d \to 1$, $b, e \to 2$, $c \to 3$.

Cotas: Algoritmo Greedy

Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el *algoritmo greedy* colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.

- $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Cotas: Algoritmo Greedy

Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el *algoritmo greedy* colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.

- $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.
- Si G tiene la secuencia de grados $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ entonces $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \text{mín}\{d_i, i-1\}$.

Cotas de $\chi(G)$: Teorema de Brooks

Para todo $k \geq 1$,

- $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$,

Cotas de $\chi(G)$: Teorema de Brooks

Para todo $k \geq 1$,

- $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$,
- $\chi(K_k) = k = \Delta(K_k) + 1$.

Cotas de $\chi(G)$: Teorema de Brooks

Para todo $k \geq 1$,

- $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$,
- $\chi(K_k) = k = \Delta(K_k) + 1$.

Teorema (Brooks, 1841)

Si G es un grafo conexo que no es un ciclo impar o un grafo completo, entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Cotas de $\chi(G)$: Teorema de Brooks

Para todo $k \geq 1$,

- $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$,
- $\chi(K_k) = k = \Delta(K_k) + 1$.

Teorema (Brooks, 1841)

Si G es un grafo conexo que no es un ciclo impar o un grafo completo, entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Prueba:
[Lovász, 1975] $\square$

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.

Cotas de $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$.

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.

- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.

- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$.

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n+1-\alpha(G)$.

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$.
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n+1-\alpha(G)$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$ [Brigham y Dutton, 1985].

Cotas de $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$.
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n+1-\alpha(G)$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$ [Brigham y Dutton, 1985].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq 1+\Delta(G)$.

COTAS DE $\chi(G)$.

- Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\omega(G) < \Delta(G)$ y $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) < \Delta(G)$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$.
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n+1-\alpha(G)$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$ [Brigham y Dutton, 1985].
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq 1+\Delta(G)$.

  Conjetura[B. Reed, 1998]: $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+1+\Delta(G)}{2}$.