UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL ROSARIO

Análisis Matemático II

Práctica de Cátedra

Pablo Sabatinelli
Mariana Pérez
Lorena Muñoz

Directora de Cátedra
Mónica Caserio
2020

Índice

1. Funciones de varias variables

Recordatorio

Entorno Un entorno de centro A y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos P que distan del punto A en menos de r.

Punto interior Un punto x_0 se llama un punto interior de un conjunto S si podemos encontrar un entorno de centro x_0 contenido en el conjunto S.

Punto frontera Un punto x_0 se llama punto frontera de un conjunto S si cualquier entorno de centro x_0 contiene puntos en S y puntos fuera de S. Al conjunto de puntos frontera de un conjunto se lo denomina frontera del conjunto.

Conjunto abierto Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Conjunto cerrado Un conjunto es cerrado si contiene a su frontera.

Conjunto acotado Un conjunto de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) es acotado si es posible contenerlo en un disco (esfera) de radio arbitrario.

Conjunto arco-conexo Un conjunto es arco-conexo (le diremos conexo en el curso) si dados dos puntos cualesquiera del conjunto, es posible unirlos mediante una poligonal íntegramente contenida en el conjunto.

Conjunto simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$ Un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si el interior de cualquier curva cerrada contenida en el conjunto, también pertenece al conjunto.

Conjunto simplemente conexo en $\mathbb{R}^3$ Un conjunto conexo de $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo si cualquier curva cerrada contenida en el conjunto es frontera de una superficie contenida en el conjunto.

1. Indique el dominio de definición para cada uno de los siguientes campos escalares y grafíquelo. Además indique si el dominio es un conjunto abierto, cerrado, ni abierto ni cerrado, acotado, no acotado, conexo, no conexo o simplemente conexo.

   a) $f(x,y) = \sqrt{x+2y-4}$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{2x^2+2y^2-8}$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$.

   d) $f(x,y) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

   e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2-y^2-z^2+1}$.

   f) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 y \ln z}{\sqrt{16+x^2+y^2-z}}$.

2. Grafique los siguientes campos escalares.

   a) $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$.

   b) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

   c) $f(x,y) = \cos x$.

   d) $f(x,y) = y^2$.

3. Identifique las curvas o superficies de nivel de cada uno de los siguientes campos escalares, según corresponda. Además indique el dominio y el conjunto imagen de cada campo escalar.

   a) $f(x,y) = x+y$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}$.

   d) $f(x,y) = e^{xy}$.

   e) $f(x,y,z) = (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2$.

   f) $f(x,y,z) = x+y+z$.

   g) $f(x,y,z) = x^2+8z^2$.

   h) $f(x,y,z) = x^2+y-z^2$.

4. Calcule los siguientes límites o indique por qué no existen.

   a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(2,4)} \frac{x+5y^2-8}{x-4y}.$

   b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(-3,0)} \frac{6y^2+2xy^2}{x^2+y^4+6x+9}.$

   c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$

   d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right).$

   e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y-xy}{x+y}.$

   f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}.$

   g) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}.$

   h) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

   i) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\operatorname{sen} xy.$

   j) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y}.$

   k) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2}.$

   l) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}.$

5. Dado el campo escalar
$$f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|},$$
   a) Determine el dominio de f.

   b) Compruebe que es posible definir $f(0,0)$ de modo que f resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

6. Estudie la continuidad sobre $\mathbb{R}^2$ de cada uno de los siguientes campos escalares.

   a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(0,1),\\ 0 & (x,y)=(0,1).\end{cases}$

   b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{5xy^2}{9x^2+7y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

2. Derivadas parciales

1. Calcule las derivadas parciales de primer orden de cada uno de los siguientes campos escalares.

   a) $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} xy + y^2 \cos xy$.

   b) $f(x,y) = \ln\left(x^3 y + 2x\right)$.

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

   e) $f(x,y,z) = y \operatorname{sen}(xz)$.

   f) $f(x,y,z) = e^{xy \tan z}$.

2. Demuestre que cada uno de los siguientes campos escalares es solución de la ecuación diferencial

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0.$$

   a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

   b) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

   d) $f(x,y) = 3x^2 y - y^3$.

3. Para el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   se pide:

   a) calcule $f_x(0,h)$ y $f_y(h,0)$ (con $h \neq 0$);

   b) demuestre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$;

   c) explique por qué no se contradice el teorema de CLAIRAUT.

4. La medida del largo, ancho y alto de una caja con tapa son 10, 15 y 20 cm, respectivamente, con un error máximo en la medición de 0.1 cm en cada medida. Utilice diferenciales para estimar el máximo error que resulta de calcular el área total de la caja. ¿Cuál es el error relativo correspondiente?

5. ¿Con qué precisión se puede calcular $V = \pi r^2 h$ con medidas r y h que tienen un error relativo del 1 %?

6. El rango de un proyectil disparado en el vacío con una velocidad inicial v_0 y un ángulo de inclinación α desde la horizontal es $R = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)$. Utilice diferenciales para aproximar el cambio del alcance si v_0 se incrementa de 400 pie/s a 410 pie/s y α aumenta de 30º a 31º.

7. Una placa calentada de manera irregular tiene temperatura $T(x,y)$ en ºC en el punto (x,y). Si $T(2,1) = 135$, $T_x(2,1) = 16$ y $T_y(2,1) = -15$, estime la temperatura en el punto $(2.04, 0.97)$.

8. El volumen V (en cm^3) de 1 mol de un gas ideal está dado por

$$V = \frac{82.06T}{p},$$

   donde p es la presión (en atm) y T es la temperatura absoluta (en K). Aproxime el cambio en el volumen cuando la presión aumenta de 5.0 a 5.2 atm y la temperatura aumenta de 300 a 310 K.

9. La potencia calorífica disipada en una resistencia eléctrica viene dada por $P = E^2/R$ vatios. Siendo $E = 200$ voltios y $R = 8$ ohms, halle la disminución que experimenta la potencia cuando E disminuye en 5 voltios y R lo hace en 0.2 ohms.

10. Un lado de un triángulo mide 2.4 m y aumenta con una velocidad de 10 cm/s. El segundo lado mide 1.5 m y disminuye con una velocidad de 5 cm/s. El ángulo formado por estos dos lados mide 60º y aumenta con una velocidad de 2 °/s. Determine la razón de cambio del área del triángulo respecto del tiempo.

11. Halle la linealización local de la función $f(x,y) = x^2y$ en el punto $(3,1)$.

12. Verifique la aproximación lineal en $(0,0)$

    a) $\dfrac{2x+3}{4y+1} \approx 3 + 2x - 12y$. *b*) $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \dfrac{y}{2}$.

13. Demuestre que el campo escalar $z(x,y) = \phi\left(x^2 + y^2\right)$, donde ϕ es una función derivable, satisface la ecuación diferencial
$$yz_x(x,y) - xz_y(x,y) = 0.$$

14. Calcule en cada caso $w'(t_0)$ para $w(t) = f((x(t), y(t), z(t))$, siendo f, x, y, z y t_0 los que en cada caso se indican.

    a) $f(x,y,z) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y}$, $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $z(t) = \frac{1}{t}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

    b) $f(x,y,z) = z - \operatorname{sen}(xy)$, $x(t) = t$, $y(t) = \ln t$, $z(t) = e^{t-1}$, $t_0 = 1$.

15. Calcule $\nabla w(P)$ en cada caso si $w(u,v) = z((x(u,v), y(u,v))$, siendo z, x, y y P los que en cada caso se indican.

    a) $z(x,y) = 4e^x \ln y$, $x(u,v) = \ln(u\cos v)$, $y(u,v) = u\operatorname{sen} v$, $P(2, \pi/4)$.

    b) $z(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$, $x(u,v) = u\cos v$, $y(u,v) = u\operatorname{sen} v$, $P(1.3, \pi/6)$.

16. Cada una de las siguientes ecuaciones define implícitamente a y como función de x, es decir $y = y(x)$. Determine $y'(x)$.

    a) $\tan\sqrt{xy} = 1 + x^2 \sec y$. *b*) $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$.

17. Cada una de las siguientes ecuaciones define implícitamente a z como función de x e y, es decir $z = z(x,y)$. Determine las derivadas parciales de primer orden de z.

    a) $yx^2 + z^2 + \cos(xyz) = 4$. *b*) $y\sqrt{z} + x^3 = \ln(x + 2z)$.

18. Calcule las derivadas direccionales de los siguientes campos escalares, en los puntos y direcciones indicadas.

    a) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^5$, punto $P(1,-1)$, dirección $(1,1)$.

    b) $f(x,y) = \operatorname{sen}^2(xy)$, punto $P(-1,0)$, en la dirección que forma un ángulo de 60º con el eje x.

    c) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, punto $P\left(1,1,\sqrt{6}\right)$, dirección $(2,1,-1)$.

    d) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, punto $P(1,-1,1)$, dirección $(1,1,1)$.

19. ¿En qué dirección se anula la derivada direccional de $f(x,y) = xy + y^2$ en $P(3,2)$?

20. Dada $w(x,y,z) = x - z^2y + e^{x-y}$ con $x(u,v) = u - v$; $y(u,v) = u + u^3\ln(v-1)$; $z = uv$. Halle la dirección de máxima derivada direccional de $h = w(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ en $(1,2)$ y el valor de dicha derivada máxima.

21. La derivada de un campo escalar diferenciable f en el punto $P(1,2)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1,1)$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección de $\vec{w} = (0,-2)$ es -3. ¿Cuál es la derivada de f en la dirección de $\vec{u} = (-1,-2)$?

22. ¿Existe una dirección en la que la razón de cambio de la función temperatura $T(x,y,z) = 2xy - yz$ en el punto $P(1,-1,1)$ sea igual a -3ºC/pie? Justifique.

23. Suponga que escala una montaña cuya forma la da la ecuación $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, donde x, y y z se dan en metros y usted está parado en un punto cuyas coordenadas son $(60,40,966)$. El eje de las X positivas va hacia el este y el de las Y positivas va hacia el norte.

    a) Si camina directo hacia el sur, ¿empezará a ascender o a descender?

    b) Si camina hacia hacia el noroeste, ¿empezará a ascender o a descender?

    c) ¿En qué dirección es la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección?

24. Demuestre que cualquier recta normal a una esfera contiene a su centro.

25. Demuestre que la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ es perpendicular al paraboloide de ecuación $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ en el punto de coordenadas $(1,1,2)$.

3. Extremos

1. Halle los puntos críticos de cada uno de los siguientes campos escalares y clasifíquelos.

    a) $z(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

    b) $f(x, y) = 2y^4 + x^4 + y^2$.

    c) $g(x, y) = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$.

    d) $f(x, y) = e^x \cos y$.

    e) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

2. Clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ para $x > 0$, $y > 0$.

3. Determine el valor máximo y mínimo del producto de tres números reales x, y, z, si la suma se éstos debe ser cero y la suma de sus cuadrados debe ser 6.

4. Un envase cilíndrico debe tener 1000 cm^3 de capacidad. El material para las tapas cuesta 0.02 $\$/\text{cm}^2$ mientras que el de la cara lateral 0.01 $\$/\text{cm}^2$. Calcule las dimensiones del envase para que el costo sea mínimo.

5. Demuestre que para los ángulos positivos α, β y γ tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ se verifica que

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

6. De todos los paralelepípedos rectangulares que tienen la diagonal dada, halle el que tenga el mayor volumen posible.

7. La intersección del plano de ecuación $x + y + 2z = 2$ con la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ es una elipse. Encuentre los puntos de dicha elipse que están más cercanos y más alejados del origen.

8. Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Halle las temperaturas extremas sobre la curva intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 3$.

9. Halle los puntos más próximos al origen de coordenadas de la curva dada por

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

10. Halle los puntos más lejanos y más cercanos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.

11. Determine los extremos absolutos de los siguientes campos escalares sobre las regiones que en cada caso se indican.

    a) $f(x, y) = x^2 - x + 4y^2 + 2y$ en la región acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

    b) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$ en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

    c) $f(x, y) = e^{-xy}$ en la región limitada por la curva de ecuación $x^2 + 4y^2 = 1$.

    d) $z(x, y) = e^{x^2 - y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$ en el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Funciones vectoriales

1. Grafique la curva representada por la función vectorial, indicando su orientación.

   a) $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + (t-1)\,\vec{j}$.

   b) $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j}$.

   c) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$.

   d) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j}$.

   e) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$.

   f) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$.

   g) $\vec{r}(t) = \vec{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}$.

2. Para las curvas del apartado $1a$ y $1g$ calcule $\vec{r}\,'(0)$.

3. Calcule la longitud de arco descripta en cada caso por la función vectorial dada y en el intervalo indicado.

   a) $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + 3\cos t\,\vec{k}$, $t \in [0, \pi]$.

   b) $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$, $t \in [1, e]$.

4. Demuestre que si el módulo $|\vec{r}|$ de la función vectorial $\vec{r}(t)$ es constante para todos los valores de t, entonces $\vec{r}\,'(t) \perp \vec{r}(t)$. ¿Cuál es la interpretación geométrica de esto? ¿Se verifica el recíproco de este resultado?

5. Determine ecuaciones para la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en los puntos indicados.

   a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$, en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

   b) $\vec{r}\,(\phi) = \left(a\cos\phi, a\,\mathrm{sen}\,\phi, \frac{k}{2\pi}\phi\right)$, en $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{k}{8}\right)$.

5. Integrales múltiples

1. Calcule las siguientes integrales dobles mediante integración reiterada.

   a) $\iint_R xy\left(x^2-y^2\right)\,dx\,dy$, $R=[0,1]\times[0,1]$.

   b) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx$.

   c) $\int_1^2\int_y^{3y}(x+y)\,dx\,dy$.

2. En cada uno de los siguientes casos, escriba la integral en los dos órdenes posibles de integración y calcule en el que resulte más conveniente.

   a) $\iint_D xy\,dA$, D: es el rectángulo con vértices $(0,0)$, $(0,5)$, $(3,5)$ y $(3,0)$.

   b) $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$, D: es el triángulo limitado por $y=x$, $y=2x$, $x=2$.

   c) $\iint_D \frac{y}{1+x^2}\,dA$, D: es la región limitada por $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x=4$.

3. Calcule el área de las regiones limitadas por las condiciones que en cada caso se indican. Grafique la región.

   a) $y\geq x^2$, $y\leq x$.

   b) $x+y\leq 2$, $y\leq x$, $y\geq 0$.

   c) $y=x^3$, $y=x$.

   d) limitada por la curva de nivel 4 del campo escalar $f(x,y)=|x|+|y|$.

4. Calcule
$$\int_0^2\int_{\sqrt{2x}}^{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}y^3\right)\,dy\,dx.$$

5. Al calcular por doble integración el volumen V del sólido limitado superiormente por la superficie de ecuación $z=f(x,y)$, con $f(x,y)\geq 0$ e inferiormente por una cierta región S del plano xy, se ha obtenido la fórmula
$$V=\int_1^2\int_x^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx+\int_2^8\int_x^8 f(x,y)\,dy\,dx.$$
   Represente la región S y exprese V mediante una integración reiterada con el orden de integración invertido.

6. Calcule en cada caso, la masa, centro de masa y momentos de inercia respecto de los ejes coordenados.

   a) Lámina limitada por $x^2+y^2=a^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$. Densidad $\delta(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$.

   b) Lámina limitada por $x=y^2$, $x=2y-y^2$. Densidad $\delta(x,y)=y+1$.

7. Determine la masa de un disco circular de radio a, si la densidad en cualquier punto P es inversamente proporcional a la distancia entre P y el centro del disco.

8. Calcule el momento de inercial del rectángulo limitado por las rectas $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, respecto al origen de coordendas, si la densidad en cada punto del rectángulo es igual a 1.

9. Combine la suma de las dos integrales dobles en una única integral doble, utilizando coordenadas polares, y calcule.

   a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$

   b) $\displaystyle\int_0^{5\sqrt{2}/2} \int_0^x xy\,dy\,dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy\,dy\,dx.$

   c) $\displaystyle\int_{\sqrt{8}}^4 \int_{\sqrt{16-x^2}}^x xy\,dy\,dx + \int_4^{\sqrt{18}} \int_0^x xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{18}}^6 \int_0^{\sqrt{36-x^2}} xy\,dy\,dx.$

10. Calcule el volumen del sólido limitado por las gráficas que en cada caso se indican.

    a) $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, en el primer octante.

    b) $y = x^2 + z^2 + 1$, $y = 0$, $x^2 + z^2 = 4$.

    c) $x = \sqrt{z^2 + y^2}$, $x = 0$, $z^2 + y^2 \geq 4$, $z^2 + y^2 \leq 16$.

11. Calcule las siguientes integrales triples.

    a) $\displaystyle\iiint_E xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo E el sólido del semiespacio $z \geq 0$ limitado por la superficie $z = xy$ y por los planos $x - y = 0$, $x - 1 = 0$, $y = 0$.

    b) $\displaystyle\iiint_E (1+x+y+z)^{-3}\,dx\,dy\,dz$, siendo E el tetraedro definido por los tres planos coordenados y por el plano $x + y + z - 1 = 0$.

    c) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo E el sólido limitado por la hoja superior del cono $z^2 = x^2+y^2$ y el plano $z = 1$.

12. Utilice una integral triple para determinar:

    a) El volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $z = 18 - x^2 - y^2$.

    b) El centro de masa del sólido limitado por $x^2+y^2+z^2 \leq 25$, con $z \geq 0$. Suponer $\rho(x, y, z) = 1$.

    c) El momento de inercia respecto de los ejes coordenados del sólido acotado por $x+y+z = 1$ en el primer octante. Suponer $\rho(x, y, z) = 1$.

13. Sea S el sólido limitado superiormente por la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e inferiormente por la superficie de ecuación $z = \sqrt{\frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right)}$. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}^+$ para que el volumen del sólido S sea igual a 9π.

14. Calcule el volumen interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4x$, limitado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$.

15. Calcule las siguientes integrales triples, usando coordenadas cilíndricas.

    a) $\displaystyle\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz$, siendo E el sólido interior al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2$.

    b) $\displaystyle\iiint_E y\,dx\,dy\,dz$, siendo E el sólido limitado por el paraboloide $z = 3 - 24\left(x^2 + y^2\right)$ en el primer octante.

    c) $\displaystyle\iiint_E 5x\,dx\,dy\,dz$, siendo E el sólido limitado por las superficies $x^2+y^2 = 1$, $z = \sqrt{2 - \left(x^2 + y^2\right)}$, $z = 0$.

d) $\iiint_E \left(z^2 + y^2\right) \, dx\, dy\, dz$, siendo E el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $z = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

16. Calcule las siguientes integrales triples, usando coordenadas esféricas.

a) $\iiint_E \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \, dV$ siendo E el sólido limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$, $y \geq 0$.

b) $\iiint_E \left(x^2 + y^2\right) \, dx\, dy\, dz$, siendo E el sólido limitado por dos superficies esféricas concéntricas de radios a y b con centro en el origen.

c) $\iiint_E z \, dx\, dy\, dz$, siendo E el sólido limitado superiormente por la superficie $x^2+y^2+z^2 = 2az$ $(a > 0)$ e inferiormente por $z^2 = x^2 + y^2$.

17. Calcule el volumen del sólido que se define en cada uno de los siguientes casos.

a) el sólido limitado por el paraboloide de $z = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right)$ y por el hemisferio superior de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

b) el sólido limitado por el plano $z = 0$, por el cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

c) el sólido limitado por los tres planos coordenados, por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y por el plano $x + y - 1 = 0$.

18. Exprese las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas o en coordenadas esféricas según resulte más sencillo y evalúelas.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} x \, dz\, dy\, dx.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz\, dy\, dx.$

c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x \, dz\, dy\, dx.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz\, dy\, dx.$

6. Integrales de línea y aplicaciones

1. Calcule las siguientes integrales de línea respecto a la longitud de arco.

   a) $\int_C (x - y)\,ds$, siendo C la curva descripta por $\vec{r}(t) = (4t,\ 3t)$, $t \in [0, 2]$.

   b) $\int_C 4xy\,ds$, siendo C la curva descripta por $\vec{r}(t) = (t,\ 1 - t)$, $t \in [0, 1]$.

   c) $\int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,ds$, siendo C la curva descripta por $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 8t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   d) $\int_C 8xyz\,ds$, siendo C la curva descripta por $\vec{r}(t) = (3,\ 12t,\ 5t)$, $t \in [0, 2]$.

   e) $\oint_C (x + y)\,ds$, siendo C el contorno del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, recorrido en sentido antihorario.

   f) $\oint_C \left(x^2 + y^2\right)\,ds$, siendo C el camino descripto por $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t + at\operatorname{sen} t, a\operatorname{sen} t - at\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   g) $\oint_C (2x + y)\,ds$, siendo C el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, recorrido desde el punto $(3, 4)$ hacia el punto $(4, 3)$.

2. Calcule el área de un lado del «biombo» cuya base es la curva C de ecuación $\vec{r}(t) = \left(t^3, t\right)$ con $t \in [0, 1]$ y cuya altura en cada punto (x, y) es $f(x, y) = x$.

3. Se quiere pintar los dos lados de una cerca cuya base está en el plano xy, con la forma $x = 30\cos^3 t$, $y = 30\operatorname{sen}^3 t$, con $t \in \left[0, \pi/2\right]$ y cuya altura en cada punto (x, y) es $h(x, y) = 1 + y/3$. Determine el área a pintar.

4. Calcule la longitud del arco de curva de ecuación $\vec{r}(t) = (2t, 3\operatorname{sen} t, 3\cos t)$ con $t \in \left[0, \pi/2\right]$.

5. Halle la masa, el centro de gravedad y los momentos de inercia respecto de los ejes coordenados del trozo de alambre helicoidal descripto por $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, si la densidad en cada punto (x, y, z) es $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

6. En cada caso, calcular la integral de línea del campo vectorial dado a lo largo del camino que se indica.

   a) $\vec{F}(x, y) = \left(x^2 - y, y^2 - x\right)$, a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$.

   b) $\vec{F}(x, y) = (x + y, x - y)$, a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ recorrida en sentido antihorario.

   c) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, a lo largo de la trayectoria que resulta de la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$, recorrida en el sentido que se desee.

7. Calcule las siguientes integrales de línea.

   a) $\oint_C \dfrac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^2 + y^2}$, siendo C la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ recorrida en sentido antihorario.

   b) $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, siendo C la curva de intersección del hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario.

8. El trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = \left(3y^2 + 2, 16x\right)$, al mover una partícula desde $(-1, 0)$ hacia $(1, 0)$, siguiendo la mitad superior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$, depende de b. Determine b para que el trabajo sea mínimo.

9. En cada uno de los siguientes casos muestre que el campo vectorial dado es gradiente de un campo escalar en todo su dominio, y determine una función potencial.

a) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$.

b) $\vec{F}(x, y) = \left(x^2 - y^2, -2xy\right)$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$.

d) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}z^4 + y^2 \cos x, -4 + 2y \operatorname{sen} x, 2 + xz^3\right)$.

10. *a*) Pruebe que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ es un gradiente y halle la función potencial que en $(0, 0)$ asume el valor 1.

    b) Demuestre que el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ es conservativo, y halle la función potencial que en $(1, -2, 3)$ toma el valor 0.

11. Calcule, en cada caso, la integral de línea.

    a) $\int_C 2x \operatorname{sen} y\, dx + \left(x^2 \cos y - 3y^2\right) dy$, donde C es la curva de ecuación $y = x^2 - 1$, desde $(-1, 0)$ hasta el punto $(5, 24)$.

    b) $\int_C x^2\, dx + xy\, dy$, donde C es la gráfica de $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

    c) $\int_C (e^y + ye^x)\, dx + (e^x + xe^y)\, dy$, donde C es el segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta el punto $(1, -1)$.

12. Aplique el teorema de GREEN para evaluar la integral de línea sobre la curva C.

    a) $\vec{F}(x, y) = \left(x^2 - y^2, xy\right)$, C es la frontera de la región acotada por la recta $y = x$ y por la parábola $y = x^2$.

    b) $\vec{F}(x, y) = \left(y^2, 2x - 3y\right)$, C es la frontera de la región acotada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

13. Utilice el teorema de GREEN para calcular el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ para mover una partícula a lo largo de la curva descripta por C.

    a) $\vec{F}(x, y) = \left(3x^2 + y, 4xy^2\right)$, C es la frontera de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

    b) $\vec{F}(x, y) = (3y + \cos x, 6x + 5e^y)$, C es la frontera del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$.

7. Integrales de superficie

1. Para cada una de las superficies determine la ecuación del plano tangente en el punto P_0 dado.

   a) $\vec{r}(u,v) = 2u\cos v\,\vec{i} + u^2\vec{j} + 3u\,\mathrm{sen}\,v\,\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $P_0 \equiv \vec{r}\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$.

   b) $\vec{r}(u,v) = \mathrm{sen}\,u\cos v\,\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v\,\vec{j} + 4\cos u\,\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $P_0 \equiv \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

   c) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\,\vec{j} + u^3\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $P_0 = (x_0, 1, 1)$.

2. Calcule el área de la porción del plano $x+y+z = 1$, cortado por la superficie cilíndrica $x^2+y^2 = 1$.

3. Determine el área de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ común al cilindro $x^2 + y^2 \leq 4y$.

4. Halle el área del trozo de superficie $z = 2(x + y)$ que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy, limitada por los planos $x = 2$, $y = 1$.

5. Calcule las integrales de superficie que en cada caso se indican

   a) $\displaystyle\iint_S xy\,dS$, donde S es la región plana determinada por los vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$.

   b) $\displaystyle\iint_S \left(y^2 + z^2\right)\,dS$, donde S es la parte del paraboloide de ecuación $x = 4 - y^2 - z^2$ frente al plano de ecuación $x = 0$.

   c) $\displaystyle\iint_S z\left(x^2 + y^2\right)\,dS$, donde S es el helicoide de ecuación $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,\pi]$.

6. Calcule el momento de inercia respecto del eje x de la porción de superficie cónica homogénea $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, limitada por los planos $z = 1$, $z = 2$.

7. Calcule la masa y el momento de inercia respecto del eje z de la superficie cónica $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z \in [0,4]$, si la densidad superficial es $\rho(x,y,z) = 10 - z$.

8. Halle las coordenadas del baricentro de la porción de superficie esférica homogénea $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada en el primer octante.

9. Sea $\mathcal{S}$ el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,0)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$.

10. Un fluido tiene densidad de flujo $\vec{F}(x,y,z) = (x, -2x - y, z)$. Calcule la masa que atraviesa en la unidad de tiempo a la porción de superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $x \geq 0$.

11. Calcule el rotor y la divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales.

    a) $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy\right)$.

    b) $\vec{F}(x,y,z) = (2x - 3y, 3x - z, y - 2x)$.

    c) $\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{xy}, \cos xy, \cos xz^2\right)$.

12. Halle el trabajo realizado por el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y + z, z + x, x + y)$ a lo largo de la curva intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y el plano de ecuación $4x - 3y = 0$, desde el punto $A(3,4,0)$ al punto $B(0,0,5)$.

13. En los siguientes ejercicios, calcule $\iint_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{F}\right) \cdot \vec{n}\,dS$ mediante una integral de línea utilizando el teorema de STOKES.

a) $\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2, xy, xz\right)$, donde S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, $\vec{n}$ normal unitario con componente tercera componente negativa.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, con S la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, y $\vec{n}$ normal unitario.

14. Halle λ de modo que el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x+3y, y-2z, x+\lambda z)$ resulte solenoidal (divergencia nula).

15. Verifique el teorema de la divergencia (GAUSS) en los campos siguientes.

    a) $\vec{F}(x,y,z) = \left(xz, yz, 3z^2\right)$, E es el sólido limitado por el paraboloide de ecuación $z = x^2+y^2$ y el plano $z=1$.

    b) $\vec{F}(x,y,z) = (2x, -3y, z)$, S: frontera de la región limitada por las superficies de ecuaciones $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=x+2$, respectivamente.

16. Evalúe $\displaystyle\iint_S \left(xz^2,\ x^2y - z^3,\ 2xy + y^2z\right)\, d\vec{S}$, donde S es la semiesfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

17. Evalúe $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2yz, yz^2, z^3e^{xy}\right)$ y S es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 5$ que está encima del plano $z=1$ y está orientada hacia afuera.

18. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)$ y S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=1$ y los planos $z=0$ y $z=2$.

19. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$, donde C es la elipse en la que el plano $z=y$ interseca al cilindro $x^2+y^2=2y$, orientada positivamente y $\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2, z^2, x^2\right)$.

20. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y, z, xz)$, calcule $\oiint_{\partial\Omega} \vec{F}\, d\vec{S}$ donde Ω es el sólido $x^2+y^2 \leq z \leq 1$.

21. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(xy^2, yz, zx^2\right)$ a través de la supeficie del sólido que está entre los cilindros de ecuaciones $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ y los planos de ecuación $z=1$ y $z=3$.

22. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2x, \frac{1}{3}y^3 + \tan z, x^2z + y^2\right)$ a través de la mitad superior de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$.

8. Ecuaciones diferenciales

1. Determine una ecuación diferencial, de menor orden posible, que admita por solución la siguiente familia de funciones.

   a) $y = x + C \operatorname{sen}^2 x$.

   b) $x^3 - (C - x)y^5 = 0$.

   c) $y = C_1 x + C_2 \log x$.

   d) $y = C_1 x + C_2 x e^x$.

2. Integre las siguientes ecuaciones diferenciales a variables separables y obtenga la solución que verifique la condición inicial dada.

   a) $y' = 2(y-1)x, \quad y(0) = 3$.

   b) $y' = (y-1)(y+3), \quad y(2) = 2$.

   c) $-\tan x \cos y = y' \tan y, \quad y(\pi) = \pi/3$.

3. Integre las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

   a) $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$.

   b) $xy^2 + x^3 + x^3 y' = 0$.

   c) $1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 2\dfrac{y}{x} y' = 0$.

4. Integre las siguientes ecuaciones diferenciales totales exactas.

   a) $\left(3x^2 + 6xy^2\right) dx + \left(6x^2 y + y^3\right) dy = 0$.

   b) $(\cos y + y \cos x)\ dx + (\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y)\ dy = 0$.

   c) $4x^3 y^3 - 2xy + \left(3x^4 y^2 - x^2\right) y' = 0$.

   d) $y\,dx + x\,dy = 0$.

5. Integre las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

   a) $xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$.

   b) $y' + y \tan x - \operatorname{sen} 2x = 0$.

   c) $xy' - 2y - x^5 = 0$.

   d) $y' e^y \operatorname{sen} x + (1 + e^y) \cos x = 0$.

   e) $y' - \dfrac{y}{x} - \tan \dfrac{y}{x} = 0$.

   f) $xy' - y + \dfrac{1}{2}\sqrt{4y^2 - 9x^2} = 0$.

   g) $x^2 y' + y^2 - xy - x^2 = 0$.

   h) $x(x+1)y' + y - x(x+1)^2 e^{-x^2} = 0$.

   i) $\left(x^2 - 4\right) y' - y = 0$.

   j) $e^{-x} + y + y' = 0$.

6. Resuelva los siguientes problemas de CAUCHY.

   a) $\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0, \\ y(2) = 1\,,\ y'(2) = -2. \end{cases}$

7. Obtenga la solución general de cada una de la siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

   a) $y'' - 9y = 1 + 3e^{2x}$.

   b) $y'' + 16y = 5x^2 + x + \dfrac{1}{2}$.

   c) $y'' + 9y = 2x^2 - 4x + 2$.

   d) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

   e) $y'' - 2y' + y = x^2 e^x - 6e^x$.

   f) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - 10 + \operatorname{sen} x$.

   g) $y'' - 2y' - 3y = 4x - \cos x$.

   h) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

8. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \\ y(0) = 0 = y'(0). \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} y'' + 4y = x^2 \operatorname{sen} 2x, \\ y(0) = 2\,, y'(0) = 1. \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^{-2}e^{3x}, \\ y(1) = 0\,, y'(1) = -2e^3. \end{cases}$

9. La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si hay inicialmente 50 g de sustancia y al cabo de 3 días quedan solamente 10 g, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 4 días?

10. Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen $V(t)$ respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para $t = 0$ el diámetro es de 5 cm y 30 minutos después el diámetro es de 2 cm, ¿en qué momento el diámetro será de 1 cm?

11. En un tanque que contiene 1000 l de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 20 l/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0.01 kg/l, determine:

    a) La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$.

    b) La cantidad de sal en el tanque después de 30 min.

    c) El tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque.

12. Un termómetro que marca 10ºC se lleva a una habitación a 20ºC. En un minuto la temperatura del termómetro asciende a 15ºC. Si la velocidad con que cambia la temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de la habitación, obtenga el comportamiento de la temperatura del termómetro en función del tiempo. ¿Cuándo estará a 19ºC?

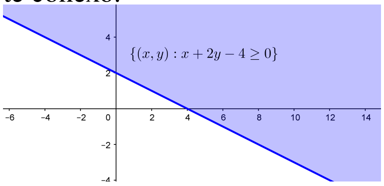
13. Un policía descubre el cuerpo de un millonario. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuándo se cometió el homicidio. El forense llega al medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 35°C. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 34°C. Asimismo, observa que la temperatura de la habitación es constante a 21°C. Suponiendo que la víctima estaba a temperatura normal (36°C) en el momento de su fallecimiento, ¿a qué hora se cometió el crimen?

14. Un objeto que tiene una temperatura de 10°C se coloca a las 10:00 horas en un horno que se mantiene a 190°C. A las 11:15 horas su temperatura era 55°C. ¿A qué hora estará el objeto a 70°C?

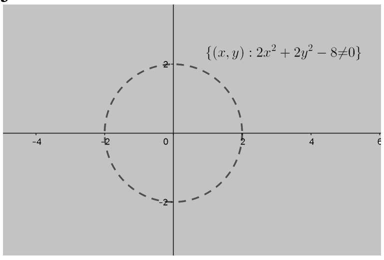
15. Bajo ciertas condiciones, el azúcar en agua se transforma en dextrosa a una velocidad proporcional, en cada instante, a la cantidad de azúcar sin transformar. Sabiendo que para $t = 0$ la cantidad de azúcar es de 75 gramos, y que al cabo de 30 minutos se han transformado 8 gramos, halle la cantidad transformada al cabo de una hora y media.

Funciones de varias variables

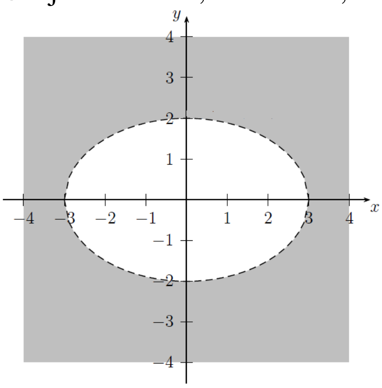
1. *a)* $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + 2y - 4 \geq 0\right\}$. Conjunto cerrado, no acotado, simplemente conexo.



   b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \neq 4\right\}$. Conjunto abierto, no acotado, no conexo.

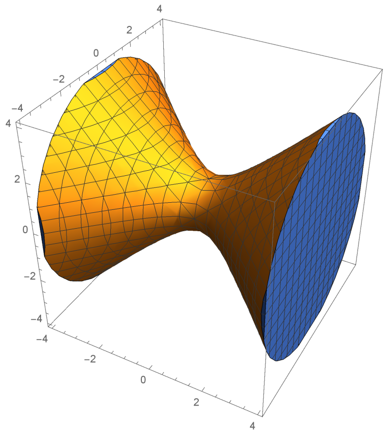


   c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 + 9y^2 - 36 > 0\right\}$. Conjunto abierto, no acotado, conexo.

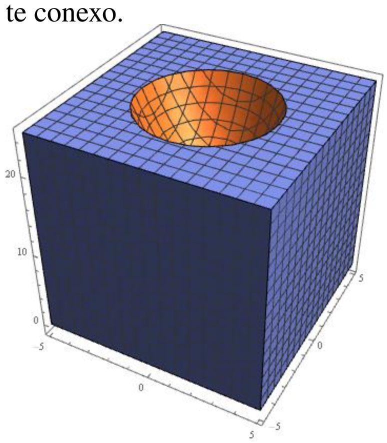


   d) $A = \mathbb{R}^2$. Conjunto abierto (también es cerrado), no acotado, simplemente conexo.

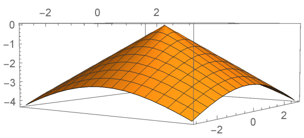
   e) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 - z^2 + 1 \geq 0\right\}$. Conjunto cerrado, no acotado, simplemente conexo.



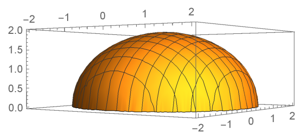
   f) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < z < 16 + x^2 + y^2\right\}$. Conjunto abierto, no acotado, simplemente conexo.



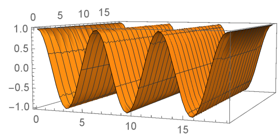
2. *a)*



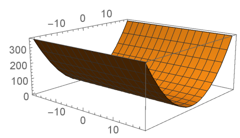
   b)



   c)



   d)



3. *a)* $D(f) = \mathbb{R}^2$. $I(f) = \mathbb{R}$. Las curvas de nivel corresponden a rectas paralelas (el vector normal de cada recta es paralelo al vector $(1, 1)$).

   b) $D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y > 0\right\}$. $I(f) = (0, +\infty)$. Las curvas de nivel corresponden a rectas paralelas (El vector normal de cada recta es paralelo al vector $(1, 1)$).

   c) $D(f) = \mathbb{R}^2$. $I(f) = [0, +\infty)$. Las curvas de nivel corresponden a elipses de semiejes $4\sqrt{k}$ y $2\sqrt{k}$. Para $k = 0$, la curva de nivel es el origen de coordenadas.

   d) $D(f) = \mathbb{R}^2$. $I(f) = (0, +\infty)$. Las curvas de nivel corresponden a hipérbolas equiláteras. Para $k = 1$, la curva de nivel es el par de rectas $x = 0$, $y = 0$.

e) $D(f) = \mathbb{R}^3$. $I(f) = [0, +\infty)$. Las superficies de nivel corresponden a esferas de centro $(1, 2, 3)$ y radio $\sqrt{k}$. Para $k = 0$ la superficie de nivel es el origen de coordenadas.

f) $D(f) = \mathbb{R}^3$. $I(f) = \mathbb{R}$. Las superficies de nivel corresponden a planos paralelos (el vector normal de cada plano es paralelo al vector $(1, 1, 1)$).

g) $D(f) = \mathbb{R}^3$. $I(f) = [0, +\infty)$. Las superficies de nivel corresponden a cilindros elípticos cuyo eje es el eje y. Para $k = 0$ la superficie de nivel coincide con el eje y.

h) $D(f) = \mathbb{R}^3$. $I(f) = \mathbb{R}$. Las superficies de nivel corresponden a paraboloides hiperbólicos con eje en el eje y.

4. *a*) $-\frac{37}{7}$.
   b) No existe.
   c) No existe.
   d) 0.
   e) No existe.
   f) 0.
   g) $+\infty$.
   h) 0.
   i) 0.
   j) No existe.
   k) No existe.
   l) 1.

5. *a*) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
   b) $f(0, 0) = 0$.

6. *a*) Continuo en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 1)\}$. La discontinuidad en $(0, 1)$ es no evitable.
   b) Continuo en $\mathbb{R}^2$.
   c) Continuo en $\mathbb{R}^2$.

Derivadas parciales

1. *a*)

$$f_x(x,y) = x^2 y\cos(xy) + y^3(-\operatorname{sen}(xy)) + 2x\operatorname{sen}(xy)$$
$$f_y(x,y) = x^3\cos(xy) - xy^2\operatorname{sen}(xy) + 2y\cos(xy)$$

b)

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2y+2}{x^3y+2x}$$
$$f_y(x,y) = \frac{x^3}{x^3y+2x}$$

c)

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

d)

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

e)

$$f_x(x,y,z) = yz\cos(xz)$$
$$f_y(x,y,z) = \operatorname{sen}(xz)$$
$$f_z(x,y,z) = xy\cos(xz)$$

f)

$$f_x(x,y,z) = y\tan(z)e^{xy\tan(z)}$$
$$f_y(x,y,z) = x\tan(z)e^{xy\tan(z)}$$
$$f_z(x,y,z) = xy\sec^2(z)e^{xy\tan(z)}$$

3. *a*) $f_x(0,h) = -h$, $f_y(h,0) = h$.

   b) $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$.

   c) Las derivadas parciales de primer orden de f no son continuas en $(0,0)$ (ambas tienen discontinuidad no evitable en el origen)

4. Error absoluto: 18 cm^2. Error relativo: 1.3846 %

5. 3 %.

6. $125\sqrt{3}+\frac{250\pi}{9} \doteq 303.773$.

7. 136.09ºC.

8. -32.824 cm^3

9. -125 vatios.

10. 0.0444063 m^2/s.

11. $L(x,y) = 6x + 9y - 18$.

14. a) $-\frac{4}{\pi^2}$.
    b) 0.

15. a) $(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\ln 2, 4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\ln 2)$.
    b) $(0,-1)$.

16. a) $y' = \dfrac{\frac{y\sec^2(\sqrt{xy})}{2\sqrt{xy}} - 2x\sec(y)}{x^2\tan(y)\sec(y) - \frac{x\sec^2(\sqrt{xy})}{2\sqrt{xy}}}$.
    b) $y' = \dfrac{2e^{x^2}xy - 2xy^3}{3x^2y^2 - e^{x^2} + 5y^4}$.

17. a)
$$z_x(x,y) = \frac{yz\operatorname{sen}(xyz) - 2xy}{2z - xy\operatorname{sen}(xyz)}$$
$$z_y(x,y) = \frac{xz\operatorname{sen}(xyz) - x^2}{2z - xy\operatorname{sen}(xyz)}$$
    b)
$$z_x(x,y) = -\frac{2\sqrt{z}\left(3x^3+6x^2z-1\right)}{xy+2yz-4\sqrt{z}}$$
$$z_y(x,y) = -\frac{2z(x+2z)}{xy+2yz-4\sqrt{z}}$$

18. a) 0.
    b) 0.
    c) 1.
    d) $\sqrt{3}e$.

19. En la dirección del vector $(7,-2)$.

20. $\left(-11,-9-\frac{2}{e^2}\right)$. La máxima razón de cambio es $\sqrt{121+\left(9+\frac{2}{e^2}\right)^2}$.

21. $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

22. No, porque el gradiente tiene módulo $\sqrt{6}$.

23. *a*) Asciende.
    b) Desciende.
    c) $(-0.6, -0.8)$. La razón de cambio es 1.

Extremos

1.
   a) Punto silla en $(-1, \pm 2)$. Máximo en $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$. Mínimo en $(0, 0)$.
   b) Mínimo en $(0, 0)$.
   c) Mínimo en $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.
   d) No posee puntos críticos en su dominio.
   e) Punto silla en $(0, \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Máximo relativo en $(3, 2)$.

3. Máximo 2, mínimo -2.

4. $r = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$, $h = 20\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

6. Un cubo.

7. El punto más cercano es $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; el más alejado es $Q(-1, -1, 2)$.

8. Temperatura máxima: 29º. Temperatura mínima: 25º.

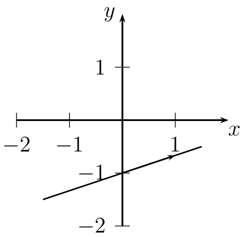
9. Los puntos más próximos son $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$.

10. El punto más alejado es $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. El punto más cercano es $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

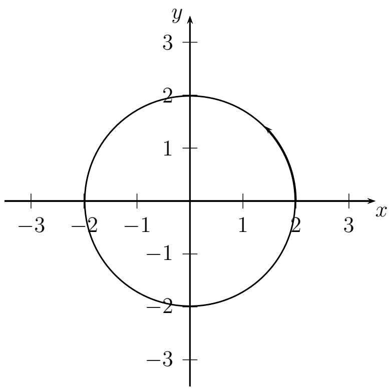
11.
    a) Mínimo absoluto 0. Máximo absoluto 26.
    b) Mínimo absoluto -9. Máximo absoluto 3.
    c) Mínimo absoluto $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$. Máximo absoluto $\sqrt[4]{e}$.
    d) Mínimo absoluto 0. Máximo absoluto $8e^4$.

Funciones vectoriales

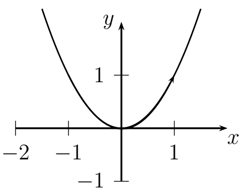
1. *a*)



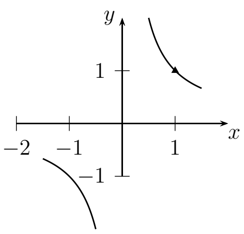
b)



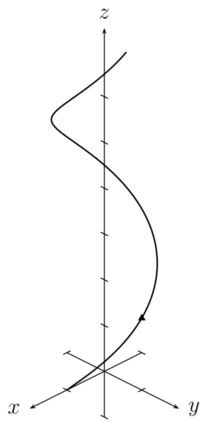
c)



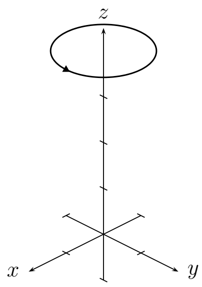
d)



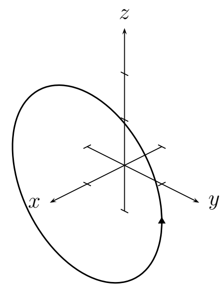
e)



f)



g)



2. $(3,1)$ y $(0,2,0)$.

3. *a*) $\sqrt{13}\pi$.

   b) e^2.

5. *a*) $\begin{cases} x = \frac{1}{4} + t, \\ y = \frac{1}{3} + t, \\ z = \frac{1}{2} + t, \quad \forall t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{at}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{at}{\sqrt{2}}, \\ z = \frac{k}{8} + \frac{kt}{2\pi}, \quad \forall t. \end{cases}$

Integrales múltiples

1. *a*) 0.

   b) $\frac{1}{6}$.

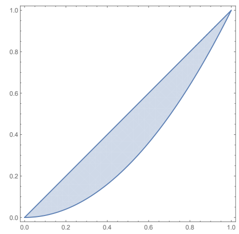
   c) 14.

2. *a*) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^5 xy\,dy\,dx = \int_0^5 \int_0^3 xy\,dx\,dy = \frac{225}{4}.$

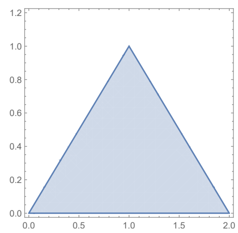
   b) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_1^4 \int_{\frac{y}{2}}^{2} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \ln\frac{5}{2}.$

   c) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_{y^2}^{4} \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\ln 17.$

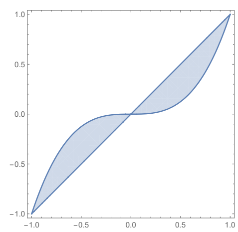
3. *a*) $\frac{1}{6}$.



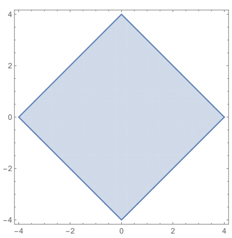
   b) 1.



   c) $\frac{1}{2}$.

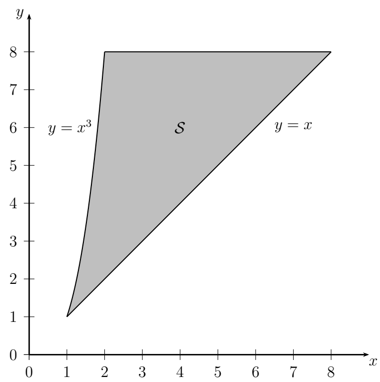


   d) 32.



4. $\frac{3}{4\pi}$.

5. $\displaystyle\int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$



6. *a*) Masa: $\frac{1}{8}\pi a^4 k$. $CM\left(\frac{8a}{5\pi}, \frac{8a}{5\pi}\right)$. $I_x = I_y = \frac{1}{24}\pi a^6 k$.

   b) Masa: $\frac{1}{2}$. $CM\left(\frac{8}{15}, \frac{8}{15}\right)$. $I_x = \frac{1}{6}$. $I_y = \frac{73}{420}$.

7. $ka\pi$.

8. $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$

9. *a*) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$.
   b) $\frac{625}{16}$.
   c) 65.

10. *a*) $\frac{1}{364}$.
    b) 12π.
    c) $\frac{112}{3}\pi$.

11. *a*) $\frac{1}{64}$.
    b) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.
    c) $\frac{1}{6}\pi$.

12. *a*) 81π.
    b) $\left(0, 0, \frac{15}{8}\right)$.
    c) $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30}$

13. $a = 3$.

14. 12π.

15. *a*) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi$.
    b) $\frac{1}{40\sqrt{2}}$.
    c) 0.
    d) $\frac{\pi}{3}$.

16. *a*) $\frac{1944}{5}\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi$.
    b) $\frac{8}{15}\pi\left(b^5 - a^5\right)$.
    c) $\frac{7}{6}\pi a^4$.

17. *a*) $\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right)\pi$.

    b) $\frac{32}{9}$.

    c) $\frac{1}{6}$.

18. *a*)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\frac{1}{2}}\int_0^{4\sec\phi}\rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cot\phi\csc\phi}\rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 0.$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^2\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{4}\rho^3\operatorname{sen}^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta +$$
$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\csc\phi}\rho^3\operatorname{sen}^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{8}{3}\pi^2 - 2\pi\sqrt{3}.$$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi}\rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi = 0.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\sqrt{r^2+z^2}\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1}\rho^3\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$

Integrales de línea y aplicaciones

1. *a*) 10.
   b) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.
   c) $\frac{1}{6}\sqrt{65}\pi\left(3+16\pi^2\right)$.
   d) 49920.
   e) $1+\sqrt{2}$.
   f) $2\pi^2\left(1+2\pi^2\right)a^3$.
   g) 15.
2. $\frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.
3. 450.
4. $\frac{\sqrt{13}}{2}\pi$.
5. masa $=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\pi\left(3+4\pi^2\right)$. $CM=\left(\dfrac{6}{3+4\pi^2},-\dfrac{6\pi}{3+4\pi^2},\dfrac{3\pi\left(1+2\pi^2\right)}{3+4\pi^2}\right)$. $I_x=\frac{\pi\left(5+40\pi^2+64\pi^4\right)}{5\sqrt{2}}$. $I_y=\frac{\pi\left(15+40\pi^2+64\pi^4\right)}{5\sqrt{2}}$. $I_z=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi\left(3+4\pi^2\right)$.
6. *a*) $-\dfrac{4}{3}$. *b*) 0. *c*) 0.
7. *a*) -2π *b*) $-\pi$.
8. $b=\pi$.
9. *a*) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.
   b) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-xy^2$.
   c) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+xz-\dfrac{y^2}{2}-yz$.
   d) $f(x,y,z)=y^2\operatorname{sen}x+\dfrac{xz^4}{4}-4y+2z$.
10. *a*) $f(x,y)=e^{xy}$.
    b) $f(x,y,z)=xyz+6$.
11. *a*) $-13824+25\operatorname{sen}24$.
    b) $\dfrac{11}{15}$.
    c) $\dfrac{1}{e}-e$.
12. *a*) $\dfrac{1}{5}$.
    b) 18π.
13. *a*) $-\dfrac{2}{15}$.
    b) $\dfrac{225}{2}$.

Integrales de superficie

1. *a)* $3\sqrt{3}x - 6y + 2z - 6 = 0.$
   b) $12x + 3z - 12\sqrt{2} = 0, \quad \forall y.$
   c) $2 - 3y + z = 0, \quad \forall x.$

2. $\sqrt{3}\pi.$

3. $16(\pi - 2).$

4. 6.

5. *a)* $\frac{7}{12}.$ *b)* $\frac{1}{60}\left(1 + 391\sqrt{17}\right)\pi.$ *c)* $\frac{1}{16}\pi^2\left(3\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$

6. $\frac{45\pi k}{2\sqrt{2}}.$

7. Masa $= \frac{352\sqrt{10}\pi}{27}$. $I_z = \frac{4352}{81}\sqrt{\frac{2}{5}}\pi.$

8. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$

9. $\frac{4}{3}\pi.$

10. $\frac{2}{3}\pi a^3.$

11. *a)* rot $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,0)$, div $\vec{F}(x,y,z) = 2(x+y+z).$
    b) rot $\vec{F}(x,y,z) = (2,2,6)$, div $\vec{F}(x,y,z) = 2.$
    c) rot $\vec{F}(x,y,z) = \left(0, z^2 \operatorname{sen}\left(xz^2\right), x\left(-e^{xy}\right) - y\operatorname{sen}(xy)\right)$, div $\vec{F}(x,y,z) = ye^{xy} - x\operatorname{sen}(xy) - 2xz\operatorname{sen}\left(xz^2\right).$

12. $-12.$

13. $-3a^3.$

14. $5(\pi - 4).$

15. *a)* $\frac{8}{3}\pi.$ *b)* 0.

16. $\lambda = -2.$

17. *a)* 3.
    b) 0.

18. $\frac{2}{5}\pi.$

19. $-4\pi.$

20. $11\pi.$

21. $-2\pi.$

22. 0.

23. $36\pi.$

24. $\frac{13}{20}\pi.$

Ecuaciones diferenciales

1. *a*) $\frac{1}{2}\tan x y' - y + x - \frac{1}{2}\tan x = 0$.
   b) $3x^2 y + y^6 - 5x^3 y' = 0$.
   c) $x^2(1 - \ln x)\, y'' + x y' - y = 0$.
   d) $y = y' - x\frac{x+1}{x+2} y'' + \frac{x}{x+2} y''$.

2. *a*) $y = 2e^{x^2} + 1$.
   b) $y = -\frac{3e^{4x}+5e^8}{e^{4x}-5e^8}$.
   c) $y = \operatorname{arcsec}(2 - \ln(-\sec x))$.

3. *a*) $y = \pm x\sqrt{c_1 x^2 - 1}$.
   b) $y = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{3}x \tan\left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right)$.
   c) $y = \pm\sqrt{x^2 + cx}$.

4. *a*) $x^3 + 3x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = 0$.
   b) $y \operatorname{sen} x + x \cos y = 0$.
   c) $x^4 y^3 - x^2 y = 0$.
   d) $xy = 0$.

5. *a*) $y = x \operatorname{senh}\left(c_1 - \ln x\right)$.
   b) $y = c_1 \cos x - 2\cos^2 x$.
   c) $y = c_1 x^2 + \frac{x^5}{3}$.
   d) $y = \ln\left(-1 + c_1 \csc x\right)$.
   e) $y = x \operatorname{arc\,sen}\left(c_1 x\right)$.
   f) $y = \frac{3}{2}\left(2x \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\left(2c_1 - \ln x\right)\right) + x\right)$.
   g) $y = \frac{x\left(x^2 - e^{2c_1}\right)}{e^{2c_1} + x^2}$.
   h) $y = \frac{(x+1)\left(2c_1 - e^{-x^2}\right)}{2x}$.
   i) $y = \frac{c_1 \sqrt[4]{2-x}}{\sqrt[4]{x+2}}$.
   j) $y = e^{-x}\left(c_1 - x\right)$.

6. *a*) $y = 0$.
   b) $y = -e^{2-x}(x - 3)$.

7. *a*) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{45}\left(-27e^{2x} - 5\right)$.
   b) $y = c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \cos(4x) + \frac{1}{128}\left(40x^2 + 8x - 1\right)$.
   c) $y = c_1 \operatorname{sen}(3x) + c_2 \cos(3x) + \frac{2}{81}\left(9x^2 - 18x + 7\right)$.
   d) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} x + \frac{e^{-2x}}{2x}$.
   e) $y = c_1 e^x x + c_2 e^x + \frac{1}{12} e^x \left(x^2 - 36\right) x^2$.
   f) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + \frac{1}{120}(60e^x x - 15e^x - 24\operatorname{sen}(x) - 12\cos(x) + 400)$.

   g) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{90}(-120x + 9\,\mathrm{sen}(x) + 18\cos(x) + 80)$.
   h) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + e^{x}\left(-x + e^{x}\log\left(e^{-x}+1\right) + \ln\left(e^{x}+1\right) - 1\right)$.

8. a) $y = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x \ln \cos x$.
   b) $y = \frac{1}{192}\left(\left(-16x^3 + 6x + 384\right)\cos(2x) + 3\left(4x^2 + 31\right)\mathrm{sen}(2x)\right)$.
   c) $y = -e^{3x}(x - 1 + \ln x)$.

9. 11.6961 %.

10. Pasados 40 minutos.

11. a) $y = 10 - 5e^{-t/50}$, $t \geq 0$.
    b) 7.26 kg.
    c) 45.81 min.

12. $x(t) = -10\left(2^{-t} - 2\right)$. A los 3.32193 minutos.

13. 11 : 04 AM.

14. 11 : 45 : 42.

15. 21.6 gr.