UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Matemático II

SEGUNDO PARCIAL — MARTES 30 DE AGOSTO DE 2022

NOMBRE Y APELLIDO: ______________________________ LEGAJO: ________________

1. Hallar la masa de una placa cuadrada de lado a sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un vértice.

2. Hallar el volumen interior al cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4x$, limitado inferiormente por $z = 0$ y superiormente por $x^2 + y^2 = 4z$.

3. Determine el valor de m para que el volumen limitado por la porción de cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = my$ sea igual a a^3.

4. Hallar, utilizando integrales iteradas la integral doble siguiente, efectuando la integración en los dos órdenes posibles.
$$\iint_S y\,dA,$$
donde S es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $2y = x^2$, $y = 3x$, $x + y = 4$.

Solución

1. Tomo el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(0,a)$, (a,a) y $(a,0)$. Para la densidad uso el cuadrado de la distancial al vértice $(0,0)$: $\delta(x,y) = k\left(x^2+y^2\right)$. Entonces

$$\text{masa } = \iint\limits_D k\left(x^2+y^2\right)\,dA = \int_0^a \int_0^a k\left(x^2+y^2\right)\,dy\,dx = k\int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + ax^2\right)\,dx = \frac{2}{3}ka^4.$$

2. En coordenadas cilíndricas

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} \int_0^{\frac{r^2}{4}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} \frac{r^3}{4}\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4\theta\,d\theta = 6\pi.$$

3. Por simetría respecto del eje y:

$$V = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\,dy\,dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2 m}{2} - 2mx^2\right)\,dx = \frac{1}{3}a^3 m = a^3 \implies m = 3.$$

4.

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{2y}} y\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\sqrt{2}y^{3/2} - \frac{y^2}{3}\right)\,dy + \int_2^3 \left(4y - \frac{4y^2}{3}\right)\,dy = \frac{104}{45} + \frac{14}{9} = \frac{58}{15}.$$

$$\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^{3x} y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right)\,dx + \int_1^2 \left(-\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - 4x + 8\right)\,dx = \frac{59}{40} + \frac{287}{120} = \frac{58}{15}.$$