UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Rosario
Departamento de Matemática

Análisis Matemático II

Primer Examen Parcial — Martes 25 de junio de 2019

Apellido y Nombre: ______________________ Legajo: __________

Carrera: Ingeniería Química __________ Comisión: 2.02 __________

1. Para el campo escalar
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   a) Analizar la continuidad de f en $(0,0)$.
   b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
   c) Calcular f_y.

2. El capitán Ralph tiene problemas cerca de la cara iluminada de Mercurio. La temperatura del casco de su nave cuando se encuentra en el punto (x,y,z) es de
$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2},$$
donde x, y, z se miden en metros. En este momento está en $(1,1,1)$.
   a) ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura baje lo más rápidamente posible?
   b) Si la nave vuela a $e^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, ¿a qué velocidad bajará la temperatura cuando se desplace en esa dirección?
   c) Desafortunadamente el metal del casco se fracturará si se enfría a una velocidad mayor de $\sqrt{14}e^2\ ^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$. Describir el conjunto de direcciones según las cuales puede desplazarse para bajar la temperatura a un ritmo inferior al límite permitido.

3. Un ingeniero debe ubicar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia, quiere colocarlo donde el campo magnético del planeta es más débil. El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades. Con base en un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro del planeta, la fuerza del campo magnético está dada por $M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$. ¿Dónde debe colocar el radiotelescopio el ingeniero?

4. En el instante $t = 0$ una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en el punto $(1,1,1)$ en una dirección normal a la superficie a la velocidad de $10\sqrt{14}$ unidades por segundo. ¿En qué instante atraviesa la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$?

5. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar sus respuestas.
   a) Si $f(3,1) = 2$ y $\lim_{(x,1)\to(3,2)} f(x,y) = 2$, entonces $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 2$.
   b) Si la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(2,-1)$ con plano tangente $z = 2x-3y+2$, entonces la función $g(x,y) = 3x - 2f(x,y) + 5$ es diferenciable en el punto $(2,-1)$ con plano tangente $z = -x + 6y + 1$.
   c) Si f es un campo escalar diferenciable y $f(a,b)$ es un mínimo relativo de f, entonces $D_{\vec{u}} f(a,b) = 0$ para cualquier vector unitario $\vec{u}$.