5.000 problemas de análisis matemático

B.P.Demidóvich

Traducido del ruso por:
EMILIANO APARICIO BERNARDO

Doctor (Kandidat) en Ciencias Físico-Matemáticas por la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú, Catedrático de Universidad, Profesor Emérito de la Universidad del País Vasco

9ª Edición

SELECCIÓN DE PROBLEMAS (CON RESPUESTAS)

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

THOMSON

Australia • Canadá • México • Singapur • España • Reino Unido • Estados Unidos

Página

SEGUNDA PARTE

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Capítulo 6 CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Límite de una función. Continuidad

1.° Límite de una función. Sea $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función definida en un conjunto E que tiene un punto de acumulación P_0. Se dice que

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A,$$

si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ tal que

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

siempre que $P \in E$ y $0 < \rho(P, P_0) < \delta$, donde $\rho(P, P_0)$ es la distancia entre los puntos P y P_0.

2.° Continuidad. Una función $f(P)$ se llama continua en el punto P_0, si

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Una función $f(P)$ es continua en un recinto dado, si es continua en cada punto de este recinto.

3.° Continuidad uniforme. Una función $f(P)$ se llama uniformemente continua en un recinto G, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que depende de solamente de ε, tal que, para cualesquiera puntos P' y P'' de G, se verifica la desigualdad

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

siempre que sea

$$\varrho(P', P'') < \delta.$$

Una función que es continua en un recinto cerrado y acotado, es uniformemente continua en este recinto.

Problemas:

Determinar y representar los campos de existencia de las siguientes funciones:

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

3137. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

3138. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3139. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

3141. $u=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\frac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\frac{x}{x+y}$.

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3149. $u=\ln(xyz)$.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

Construir las líneas de nivel de las siguientes funciones:

3151. $z=x+y$.

3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$.

3154. $z=(x+y)^2$.

3155. $z=\frac{y}{x}$.

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

3158. $z=|x|+y$.

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

3159.1. $z=\min(x, y)$.

3159.2. $z=\max(|x|, |y|)$.

3159.3. $z=\min(x^2, y)$.

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

3161. $z=x^y \quad (x>0)$.

3162. $z=x^y e^{-x} \quad (x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$.

3164. $z=\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a>0)$.

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

Hallar las superficies de nivel de las siguientes funciones:

3166. $u=x+y+z$.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

3170. $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

3175. Construir la gráfica de la función

$$F(t)=f(\cos t, \sin t),$$

donde

$$f(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{si} \quad y\geqslant x, \\ 0, & \text{si} \quad y<x. \end{cases}$$

3176. Hallar $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ si $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

3177. Hallar $f(x)$, si

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad (x>0).$$

3178. Sea

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

Determinar las funciones f y z, si $z=x$ para $y=1$.

3179. Sea

$$z=x+y+f(x-y).$$

Hallar las funciones f y z, si $z=x^2$ para $y=0$.

3180. Hallar $f(x, y)$, si $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

3181. Demostrar que, para la función

$$f(x, y)=\frac{x-y}{x+y}$$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\}=1; \quad \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\}=-1,$$

mientras que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

3182. Demostrar que, para la función

$$f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\}=0,$$

a pesar de que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

3183. Demostrar que, para la función

$$f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

ambos límites $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\}$ y $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\}$

no existen, a pesar de que existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0$.

3183.1. ¿Existe el límite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}?$$

3183.2. ¿A qué es igual el límite de la función

$$f(x, y)=x^2 e^{-(x^2-y)}$$

a lo largo de cualquier rayo

$$x=t\cos\alpha, \quad y=t\sin\alpha \qquad (0\leqslant t<+\infty)$$

cuando $t\to+\infty$?

¿Se puede llamar a esta función infinitésima cuando $x\to\infty$ e $y\to\infty$?

3184. Hallar

$$\lim_{x\to a}\{\lim_{y\to b} f(x, y)\} \text{ y } \lim_{y\to b}\{\lim_{x\to a} f(x, y)\},$$

si:

a) $f(x, y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

b) $f(x, y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=\infty$, $b=+0$;

c) $f(x, y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

d) $f(x, y)=\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

e) $f(x, y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

Hallar los siguientes límites dobles:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3193. ¿Sobre qué direcciones φ existe el límite finito:

a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; b) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$,

si $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$?

Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

3194. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3195. $u=\dfrac{xy}{x+y}$.

3196. $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

3197. $u=\sin\dfrac{1}{xy}$.

3198. $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

3200. $u=\dfrac{1}{xyz}$.

3201. $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. Comprobar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

es continua respecto de cada variable x e y por separado (para un valor fijado de la otra variable), pero no es continua respecto del conjunto de estas variables.

3203. Comprobar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{si } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

es continua en el punto O (0, 0) a lo largo de cada rayo

$$x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha \quad (0\leqslant t<+\infty),$$

que pase por este punto, es decir, existe

$$\lim_{t \to 0} f(t \cos \alpha,\ t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

sin embargo, esta función no es continua en el punto (0, 0).

3203.4 ¿Es continua la función

$$u = \arcsin \frac{x}{y}.$$

en su campo de definición E?

3204. Comprobar que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función $f(x, y) = x \text{ sen } \dfrac{1}{y}$, si $y \neq 0$ y $f(x, 0) = 0$, no es cerrado.

3206. Demostrar que, si en un recinto G la función $f(x, y)$ es continua respecto de la variable x y satisface a la condición de Lipschitz respecto de la variable y, o sea,

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leqslant L\,|y' - y''|,$$

donde $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ y L es una constante, entonces esta función es continua en el recinto dado.

3207. Demostrar que, si la función $f(x, y)$ es continua respecto de cada variable x e y por separado y es monótona respecto de una de ellas, entonces esta función es continua respecto del conjunto de las variables (teorema de Young).

3209. Supongamos que: 1) la función $f(x, y)$ es continua en el recinto R $(a < x < A; b < y < B)$; 2) la función $\varphi(x)$ es continua en el intervalo (a, A) y toma valores que pertenecen al intervalo (b, B). Demostrar que la función

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

es continua en el intervalo (a, A).

3210. Supongamos que: 1) la función $f(x, y)$ es continua en el recinto R $(a < x < A; \ b < y < B)$; 2) las funciones $x = \varphi(u, v)$ e $y = \psi(u, v)$ son continuas en el recinto R' $(a' < u < A'; b' < v < B')$ y toman valores pertenecientes a los intervalos (a, A) y (b, B), respectivamente. Demostrar que la función

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \ \psi(u, v))$$

es continua en el recinto R'.

§ 2. Derivadas parciales. Diferencial de una función

1.° Derivadas parciales. El resultado de la derivación parcial de una función de varias variables no depende del orden de derivación, si todas las derivadas que figuran en el cálculo son continuas.

2.° Diferencial de una función. Si el incremento total de una función $f(x, y, z)$, de las variables independientes x, y, z, puede expresarse en la forma

$$\Delta f(x, y, z) = A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z + o(\varrho),$$

donde A, B, C no dependen de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y $\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, la función $f(x, y, z)$ se llama diferenciable en el punto (x, y, z) y la parte lineal del incremento $A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z$, igual a

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz, \qquad (1)$$

donde $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, se llama diferencial de esta función.

La fórmula (1) conserva su valor también en el caso en que las variables x, y, z son funciones diferenciables de otras variables independientes.

Si x, y, z son variables independientes, entonces para las diferenciales de orden superior se verifica la fórmula simbólica

$$d^n f(x, y, z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x, y, z).$$

3.° Derivada de una función compuesta. Si $w = f(x, y, z)$, donde $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, $z=\chi(u, v)$ y las funciones f, φ, ψ, χ son diferenciables, se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Para calcular las derivadas de segundo orden de la función w es conveniente utilizar las fórmulas simbólicas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+$$
$$+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

donde

$$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\quad R_1=\frac{\partial z}{\partial u}$$

y

$$P_2=\frac{\partial x}{\partial v},\quad Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4.° Derivada en una dirección dada. Si la dirección l en el espacio $Oxyz$ se caracteriza por los cosenos directores: $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ y la función $u = f(x, y, z)$ es diferenciable, la derivada según la dirección l se calcula por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

La velocidad del crecimiento máximo de la función en un punto dado se determina, en su valor absoluto así como su dirección, por el vector, denominado gradiente de la función:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k,$$

cuya magnitud es igual a

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Problemas:

3211. Comprobar que

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

3212. Hallar $f'_x(x, 1)$, si

$$f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3212.1. Hallar $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$, si

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

¿Es esta función diferenciable en el punto 0 (0, 0)?

3212.2. ¿Es diferenciable la función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ en el punto 0 (0, 0)?

3212.3. Averiguar si es diferenciable en el punto 0 (0, 0) la función

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 > 0$$

y $f(0, 0) = 0$.

Hallar las derivadas parciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3217. $u = x\sin(x+y)$.

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

3220. $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x + y^2)$.

3222. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3223. $u = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3224. $u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

3228. $u = x^{y^z}$.

3229. Comprobar la igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

si

a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; b) $u = x^{y^2}$; c) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

FAC... ...IERIA

3230. Sea $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, si $x^2 + y^2 \neq 0$ y $f(0, 0) = 0$. Comprobar que

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

3230.1. ¿Existe f''_{xy} (0, 0), si

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 0; \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Hallar las diferenciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones (x, y, z son variables independientes):

3235. $u = x^m y^n$.

3236. $u = \frac{x}{y}$.

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3239. $u = e^{xy}$.

3240. $u = xy + yz + zx$.

3241. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

3242. Hallar $df(1, 1, 1)$ y $d^2f(1, 1, 1)$, si

$$f(x, y, z) = \sqrt[z]{\frac{x}{y}}.$$

3243. Comprobar que, si

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

se tiene $d^2 u \geqslant 0$.

3244. Suponiendo que x, y son pequeños en valor absoluto, deducir unas fórmulas de aproximación para las siguientes expresiones:

a) $(1+x)^m (1+y)^n$;

b) $\ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$;

c) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy}$.

3245. Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial, calcular aproximadamente

a) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$;

b) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

c) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$;

d) $\sin 29° \cdot \operatorname{tg} 46°$;

e) $0{,}97^{1{,}05}$.

3246. ¿Cuánto variará la diagonal y el área de un rectángulo de lados $x = 6$ m e $y = 8$ m, si el primer lado se aumenta en 2 mm y el segundo se disminuye en 5 mm?

3247. El ángulo central de un sector $\alpha = 60°$ aumentó $\Delta\alpha = 1°$. ¿Cuánto hay que disminuir el radio del sector $R = 20$ cm, para que su área no varíe?

3248. Demostrar que el error relativo del producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

3249. Al medir el radio R de la base y la altura H de un cilindro se obtuvieron los siguientes resultados:

$$R = 2{,}5 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}; \qquad H = 4{,}0 \text{ m} \pm 0{,}2 \text{ m}.$$

¿Con qué error absoluto Δ y error relativo δ se puede calcular el volumen del cilindro?

3250. Los lados de un triángulo son: $a = 200$ m $\pm$ 2 m, $b = 300$ m $\pm$ 5 m, y el ángulo formado por ellos es $C = 60° \pm 1°$. ¿Con qué error absoluto puede calcularse el tercer lado c del triángulo?

3251. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

es continua en el punto (0, 0) y tiene en este punto ambas derivadas parciales $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$, sin embargo, no es diferenciable en el punto (0, 0).

Estudiar el comportamiento de las derivadas $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0).

3252. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{si} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

y

$$f(0, 0) = 0,$$

es continua y tiene derivadas parciales acotadas $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0), sin embargo, esta función no es diferenciable en el punto (0, 0).

3253. Comprobar que la función

$$f(x, y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{si} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

y

$$f(0, 0) = 0,$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0), las cuales son discontinuas en este punto y no están acotadas en cualquier entorno del mismo; a pesar de esto, la función es diferenciable en el punto (0, 0).

3255. Demostrar que, si una función $f(x, y)$ es continua respecto de la variable x para cada valor fijado de y, y tiene derivada acotada $f'_y(x, y)$ respecto de la variable y, entonces esta función es continua respecto del conjunto de las variables x e y.

Hallar las derivadas parciales indicadas en los siguientes ejercicios:

3256. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, si

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y}$, si $u = x\ln(xy)$.

3258. $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\, \partial y^3}$, si $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

3259. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, si $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

3260. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, si $u = e^{xyz}$.

3261. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y\, \partial \xi\, \partial \eta}$, si $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

3262. $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\, \partial y^q}$, si $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q$.

3263. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, si $u = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3264. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, si $u = (x^2+y^2)\, e^{x+y}$.

3265. $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, si $u = xyze^{x+y+z}$.

3266. Hallar $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,\ 0)$, si $f(x,\ y) = e^x \sin y$.

3267. Comprobar que, si

$$u = f(xyz),$$

se tiene

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = F(t),$$

donde $t = xyz$, y hallar la función F.

3268. Hallar $d^4 u$, si $u = x^4 - 2x^3 y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2 y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$.

¿A qué son iguales las derivadas $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ y $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$?

Hallar las diferenciales totales del orden indicado en los siguientes ejercicios:

3269. $d^3 u$, si $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$.
3270. $d^2 u$, si $u = \sin(x^2 + y^2)$.
3271. $d^{10} u$, si $u = \ln(x+y)$.
3272. $d^6 u$, si $u = \cos x \operatorname{ch} y$.
3273. $d^3 u$, si $u = xyz$.
3274. $d^3 u$, si $u = \ln(x^x y^y z^z)$.
3275. $d^n u$, si $u = e^{ax+by}$.
3276. $d^n u$, si $u = X(x)\, Y(y)$.
3277. $d^n u$, si $u = f(x+y+z)$.
3278. $d^n u$, si $u = e^{ax+by+cz}$

3279. Sea $P_n(x,\ y,\ z)$ un polinomio homogéneo de grado n. Demostrar que

$$d^n P_n(x,\ y,\ z) = n!\ P_n(dx,\ dy,\ dz).$$

3280. Sea

$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hallar Au y $A^2 u = A\,(Au)$, si

a) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; b) $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$.

3281. Sea

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Hallar Δu, si

$$\text{a) } u=\sin x \operatorname{ch} y; \quad \text{b) } u=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

3282. Sea

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

y

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Hallar $\Delta_1 u$ y $\Delta_2 u$, si

$$\text{a) } u=x^3+y^3+z^3-3xyz; \quad \text{b) } u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Hallar las derivadas de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones compuestas:

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$. **3284.** $u=f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

3285. $u=f(x, xy, xyz)$.

3286. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, si

$$u=f(x+y, xy).$$

3287. Hallar

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

si

$$u=f(x+y+z, \quad x^2+y^2+z^2).$$

Hallar las diferenciales totales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones compuestas (x, y, z son variables independientes):

3288. $u=f(t)$, donde $t=x+y$. **3291.** $u=f(t)$, donde $t=xyz$.

3289. $u=f(t)$, donde $t=\frac{y}{x}$. **3292.** $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3290. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3293. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=ax$, $\eta=by$.

3294. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

3295. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=xy$, $\eta=\frac{x}{y}$. **3296.** $u=f(x+y, z)$.

3297. $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$. **3298.** $u=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u=f(x, y, z)$, donde $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

3300. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, donde $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

3301. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, donde $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x^2-y^2$, $\zeta=2xy$.

Hallar $d^n u$, si:

3302. $u=f(ax+by+cz)$. **3303.** $u=f(ax, by, cz)$.

3304. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, donde $\xi=a_1x+b_1y+c_1z$, $\eta=a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$.

3305. Sea $u=f(r)$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y f es una función dos veces diferenciable. Comprobar que

$$\Delta u=F(r),$$

donde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace, y hallar la función F.

3306. Sean u y v funciones dos veces diferenciables y Δ el operador de Laplace (véase el problema 3305). Demostrar que

$$\Delta(uv)=u\,\Delta v+v\,\Delta u+2\Delta(u, v),$$

donde

$$\Delta(u, v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Comprobar que la función

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a y b son constantes) satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. Demostrar que, si la función $u=u(x, y)$ satisface a la ecuación de Laplace (véase el problema 3307), la función

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

también satisface a esta ecuación.

3309. Comprobar que la función

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

(a y b son constantes) satisface a la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. Demostrar que, si la función $u = u\ (x,\ t)$ satisface a la ecuación del calor (véase el problema 3309), la función

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right) \qquad (t > 0)$$

también satisface a esta ecuación.

3311. Demostrar que la función

$$u = \frac{1}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, satisface a la ecuación de Laplace

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

para $r \neq 0$.

3312. Demostrar que, si la función $u = u\ (x,\ y,\ z)$ satisface a la ecuación de Laplace (véase el problema 3311), la función

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2x}{r^2}, \frac{k^2y}{r^2}, \frac{k^2z}{r^2}\right),$$

donde k es una constante y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, también satisface a esta ecuación.

3313. Demostrar que la función

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y C_1, C_2 son constantes, satisface a la ecuación de Helmholz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

3314. Supongamos que las funciones $u_1 = u_1\ (x,\ y,\ z)$ y $u_2 = u_2\ (x,\ y,\ z)$ satisfacen a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$.
Demostrar que la función

$$v = u_1 (x,\ y,\ z) + (x^2 + y^2 + z^2)\, u_2 (x,\ y,\ z)$$

satisface a la ecuación biarmónica

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. Sea $f(x, y, z)$ una función homogénea, de grado n, y m veces diferenciable.

Demostrar que

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x,y,z).$$

3316. Simplificar la expresión

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y},$$

si

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

donde f es una función diferenciable.

3317. Comprobar que la función

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. Comprobar que

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. Simplificar la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z},$$

si

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,\ z-x),$$

donde f es una función diferenciable.

3320. Sea

$$x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$$

y

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

Demostrar que

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

Suponiendo que las funciones arbitrarias φ, ψ, etc., son diferenciables un número suficiente de veces, comprobar las siguientes igualdades:

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, si $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, si $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

3323. $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, si $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$, si $u = x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$, si $u = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, si $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$.

3328. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, si $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3329. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n - 1)u$,

si $u = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3330. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

Mediante la derivación sucesiva, eliminar las funciones arbitrarias φ y ψ:

3331. $z = x + \varphi(xy)$.

3332. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3334. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

3335. $u=\varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3336. $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

3337. $z=\varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

3339. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3340. $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. Hallar la derivada de la función

$$z=x^2-y^2$$

en el punto $M(1, 1)$, en la dirección l que forma el ángulo $\alpha=60°$ con la dirección positiva del eje Ox.

3342. Hallar la derivada de la función

$$z=x^2-xy+y^2$$

en el punto $M(1, 1)$ en la dirección l que forma un ángulo α con la dirección positiva del eje Ox. ¿En qué dirección esta derivada: a) alcanza el valor máximo; b) alcanza el valor mínimo; c) es igual a 0.

3343. Hallar la derivada de la función

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

en el punto $M(x_0, y_0)$ en la dirección que es perpendicular a la línea de nivel que pasa por este punto.

3344. Hallar la derivada de la función

$$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

en el punto $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, en dirección de la normal interior a la curva

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

en este punto.

3345. Hallar la derivada de la función

$$u=xyz$$

en el punto $M(1, 1, 1)$, en la dirección $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

¿A qué es igual la magnitud del gradiente de la función en este punto?

3346. Hallar la magnitud y la dirección del gradiente de la función

$$u=\frac{1}{r},$$

en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0), donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3347. Determinar el ángulo formado por los gradientes de la función

$$u=x^2+y^2-z^2$$

en los puntos A $(\epsilon, 0, 0)$ y B $(0, \epsilon, 0)$.

3348. ¿Cuánto se diferencia la magnitud del gradiente de la función

$$u=x+y+z$$

en el punto M (1, 2, 2) de la magnitud del gradiente de la función

$$v=x+y+z+0{,}001 \sin(10^6 \pi \sqrt{x^2+y^2+z^2})?$$

en el mismo punto?

3349. Comprobar que en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0), el ángulo formado por los gradientes de las funciones

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

y

$$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a, b, c, m, n, p son constantes y $a^2+b^2+c^2 \neq 0$) tiende a cero cuando el punto M_0 se aleja al infinito.

3350. Sea $u=f(x, y, z)$ una función dos veces diferenciable. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$, si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la dirección l.

3351. Sea $u=f(x, y, z)$ una función dos veces diferenciable y

$$l_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}, \quad l_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\},$$
$$l_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$$

tres direcciones perpendiculares entre sí.

Demostrar que:

$$\text{a)}\quad \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. Sea $u = u(x, y)$ una diferenciable, tal que para $y = x^2$ se tiene:

$$u(x, y)=1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ para $y = x^2$.

3353. Supongamos que la función $u = u(x, y)$ satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

y también a las siguientes condiciones:

$$u(x, 2x)=x, \quad u'_x(x, 2x)=x^2.$$

Hallar

$$u''_{xx}(x, 2x), \quad u''_{xy}(x, 2x), \quad u''_{yy}(x, 2x).$$

Suponiendo que $z = z(x, y)$, resolver las siguientes ecuaciones:

3354. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$ 3355. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0.$ 3356. $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}=0.$

3357. Suponiendo que $u = u(x, y, z)$, resolver la ecuación

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0.$$

3358. Hallar la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y,$$

que satisface a la condición: $z(x, x^2) = 1$.

3359. Hallar la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

que cumple las condiciones: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

3360. Hallar la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = x + y,$$

que cumple las condiciones: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

§ 3. Derivación de las funciones implícitas

1.° Teorema de existencia. Si: 1) la función $F(x, y, z)$ se anula en un punto $A_0(x_0, y_0, z_0)$; 2) $F(x, y, z)$ y $F_z'(x, y, z)$ están definidas y son continuas en un entorno del punto A_0; 3) $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces en cierto entorno suficientemente pequeño del punto $A_0(x_0, y_0)$ existe una función uniforme continua única

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

que satisface a la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

y tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2.° Diferenciabilidad de la función implícita. Si, además, 4) la función $F(x, y, z)$ es diferenciable en un entorno del punto $A_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces la función (1) es diferenciable en un entorno del punto $A_0(x_0, y_0)$ y sus derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ pueden hallarse por las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Si la función $F(x, y, z)$ es diferenciable un número suficiente de veces, entonces, derivando sucesivamente las igualdades (2) pueden calcularse también las derivadas de orden superior de la función z.

Problemas:

3361. Comprobar que la función de Dirichlet

$$y = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es racional,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

que es discontinua en cada punto, satisface a la ecuación

$$y^2 - y = 0$$

3362. Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo (a, b). ¿En qué caso la ecuación

$$f(x)\,y = 0$$

tiene la solución continua única $y = 0$ para $a < x < b$?

*) En los enunciados de la mayoría de los problemas de este capítulo se supone, sin reservas, que se cumplen las condiciones de existencia de las funciones implícitas y de sus derivadas correspondientes.

3363. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son continuas en el intervalo (a, b). ¿En qué caso la ecuación

$$f(x)\,y=g(x)$$

tiene una solución continua única en el intervalo (a, b)?

3364. Dada la ecuación

$$x^2+y^2=1 \tag{1}$$

sea

$$y=y(x) \quad (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{2}$$

una función uniforme que satisface a la ecuación (1).

1) ¿Cuántas funciones uniformes (2) satisfacen a la ecuación (1)?

2) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1)?

3) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1), si: $y(0)=1$; b) $y(1)=0$?

3365. Dada la ecuación

$$x^2=y^2 \tag{1}$$

sea

$$y=y(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{2}$$

una función uniforme que satisface a la ecuación (1).

1) ¿Cuántas funciones uniformes (2) satisfacen a la ecuación (1)?

2) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1)?

3) ¿Cuántas funciones uniformes diferenciables (2) satisfacen a la ecuación (1)?

4) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1), si: a) $y(1)=1$; b) $y(0)=0$?

5) ¿Cuántas funciones uniformes continuas $y=y(x)\,(1-\delta<x<1+\delta)$ satisfacen a la ecuación (1), si $y(1)=1$ y δ es suficientemente pequeño?

3366. La ecuación

$$x^2+y^2=x^4+y^4$$

determina a y como función multiforme de x. ¿En qué regiones esta función: 1) es uniforme, 2) es biforme, 3) es triforme, 4) es tetraforme? Determinar los puntos de ramificación de esta función y sus ramas uniformes continuas.

3367. Determinar los puntos de ramificación y las ramas uniformes continuas $y = y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ de la función multiforme y, definida por la ecuación

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

3368. Supongamos que $f(x)$ es continua para $a < x < b$ y que $\varphi(y)$ es monótona creciente y continua para $c < y < d$. ¿En qué caso la ecuación

$$\varphi(y) = f(x)$$

determina la función uniforme

$$y = \varphi^{-1}(f(x))?$$

Examinar los ejemplos: a) $\operatorname{sen} y + \operatorname{sh} y = x$; b) $e^{-y} = -\operatorname{sen}^2 x$.

3369. Sea

$$x = y + \varphi(y), \qquad (1)$$

donde $\varphi(0) = 0$ y $|\varphi'(y)| \leqslant k < 1$ para $-a < y < a$. Demostrar que, para $-\epsilon < x < \epsilon$, existe una función diferenciable única $y = y(x)$ que satisface a la ecuación (1) y tal que $y(0) = 0$.

3370. Sea $y = y(x)$ una función implícita determinada por la ecuación

$$x = ky + \varphi(y),$$

donde la constante $k \neq 0$ y $\varphi(y)$ es una función diferenciable periódica, de período ω, tal que $|\varphi'(y)| < |k|$. Demostrar que

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

donde $\psi(x)$ es una función periódica, de período $|k|\omega$.

Hallar y' e y'' para las funciones y, determinadas por las siguientes ecuaciones:

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. **3372.** $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. $y = f(x)$

3373. $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

3374. $x^y = y^x$ $(x \neq y)$. **3375.** $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3376. Demostrar que, para

$$1+xy=k(x-y),$$

donde k es una constante, se verifica la igualdad

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. Demostrar que, si

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

entonces, para $xy>0$ se verifica la igualdad

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. Demostrar que, en un entorno del punto $x=0$, $y=0$, la ecuación

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \qquad (a\neq 0)$$

determina dos funciones diferenciables: $y=y_1(x)$ e $y=y_2(x)$. Hallar $y_1'(0)$ e $y_2'(0)$.

3379. Hallar y' para $x=0$ e $y=0$, si

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3.$$

3380. Hallar y', y'', y''', si $x^2+xy+y^2=3$.

3381. Hallar y', y'', y''' para $x=0$, $y=1$, si

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0.$$

3382. Demostrar que para la curva de 2° orden

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

se verifica la igualdad

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

Hallar, para la función $z=z(x, y)$, las derivadas parciales de primero y segundo órdenes, si:

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

3385. $x+y+z=e^z$.

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot \operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **3387.** $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

3388. Sea

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \qquad (1)$$

y

$$f(x,\ y,\ z)=xy^2z^3.$$

Hallar: a) f'_x (1, 1, 1), si $z = z\ (x,\ y)$ es la función implícita determinada por la ecuación (1); b) f'_x (1, 1, 1), si $y = y\ (x,\ z)$ es la función implícita determinada por la ecuación (1). Explicar por qué estas derivadas son distintas.

3389. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ para $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, si $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

Hallar dz y d^2z, si:

3390. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **3391.** $xyz=x+y+z$.

3392. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$. **3393.** $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.

3394. Hallar du, si

$$u^3-3(x+y)u^2+z^3=0.$$

3395. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, si $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

3396. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$.

3397. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si $F(x,\ x+y,\ x+y+z)=0$.

3398. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si $F(xz,\ yz)=0$.

3399. Hallar d^2z, si

a) $F(x+z,\ y+z)=0$; b) $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0$.

3399.1. Sea $z = z\ (x,\ y)$ la función diferenciable, determinada por la ecuación

$$z^3-xz+y=0,$$

que para $x = 3$, $y = -2$ toma el valor $z = 2$. Hallar dz (3, −2) y d^2z (3, −2).

§ 5. Aplicaciones geométricas

1.° *Recta tangente y plano normal.* Las ecuaciones de la recta tangente a la curva

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t)$$

en su punto $M(x, y, z)$, tienen la forma

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

La ecuación del plano normal en este punto es:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

2.° *Plano tangente y recta normal.* La ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x, y)$ en su punto $M(x, y, z)$, tiene la forma

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

Las ecuaciones de la normal en el punto M, son:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Si la ecuación de la superficie viene dada en forma implícita $F(x, y, z)=0$, entonces, se tiene respectivamente: la ecuación del plano tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

y las ecuaciones de la normal

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Problemas:

Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes y planos normales en los puntos dados a las siguientes curvas:

3528. $x = a\cos\alpha\cos t$, $y = a\sin\alpha\cos t$, $z = a\sin t$; en el punto $t = t_0$.

3529. $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$; en el punto $t = \frac{\pi}{4}$.

3530. $y = x$, $z = x^2$; en el punto $M(1, 1, 1)$.

3531. $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$; en el punto $M(1, 1, 3)$.

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x + y + z = 0$: en el punto $M(1, -2, 1)$.

3533. Hallar un punto en la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, de modo que la recta tangente en éste sea paralela al plano $x + 2y + z = 4$.

3534. Demostrar que la recta tangente a la hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ forma un ángulo constante con el eje Oz.

3535. Demostrar que la curva

$$x = ae^t\cos t,\quad y = ae^t\sin t,\quad z = ae^t$$

corta a todas las generatrices del cono $x^2 + y^2 = z^2$ bajo un mismo ángulo.

3536. Demostrar que la loxodrómica

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{k\varphi}\quad (k = \text{const}),$$

donde φ es la longitud y ψ la latitud del punto de la esfera, corta todos los meridianos de la esfera bajo un ángulo constante.

3537. Hallar la tangente del ángulo formado por la recta tangente a la curva

$$z = f(x, y),\quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha},$$

en el punto M_0 (x_0, y_0) y el plano Oxy, donde f es una función diferenciable.

3538. Hallar la derivada de la función

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

en el punto M $(1, 2, -2)$ en dirección de la recta tangente a la curva

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4.$$

en este punto.

Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos indicados:

3539. $z = x^2 + y^2$; en el punto M_0 $(1, 2, 5)$.

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; en el punto M_0 $(3, 4, 12)$.

3541. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; en el punto M_0 $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0).

3543. $z = y + \ln \dfrac{x}{z}$; en el punto M_0 $(1, 1, 1)$.

3544. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$; en el punto M_0 $(2, 2, 1)$.

3545. $x = a \cos\psi \cos\varphi$, $y = b \cos\psi \sin\varphi$, $z = c \sin\psi$; en el punto $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

3546. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r \operatorname{ctg}\alpha$; en el punto M_0 (φ_0, r_0).

3547. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$; en el punto $M_0(u_0, v_0)$.

3548. Hallar la posición límite del plano tangente a la superficie

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

cuando el punto de contacto M (u, v) $(u \neq v)$ se aproxima indefinidamente hacia el punto M_0 (u_0, u_0) de la línea del borde $u = v$ de la superficie.

3549. Hallar en la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$$

los puntos en los que los planos tangentes son paralelos a los planos coordenados.

3550. ¿En qué punto del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la normal a éste forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

3551. Trazar los planos tangentes a la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

que son paralelos al plano

$$x + 4y + 6z = 0.$$

3552. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = a^2$ $(a > 0)$ forman con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante.

3553. Demostrar que los planos tangentes a la superficie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \qquad (a > 0)$$

cortan en los ejes coordenados segmentos cuyas sumas son constantes.

3554. Demostrar que los planos tangentes al cono

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

pasan por su vértice.

3555. Demostrar que las normales a la superficie de revolución

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (f' \neq 0)$$

se cortan con el eje de rotación.

3556. Hallar las proyecciones del elipsoide

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

sobre los planos coordenados.

3557. El cuadrado $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ se ha dividido en un número finito de partes σ de diámetro $\leqslant \delta$. Acotar superiormente el número δ, si las direcciones de las normales a la superficie

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

en cualesquiera puntos $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$, pertenecientes a una misma parte σ, difieren menos de 1°.

3558. Sea

$$z = f(x, y), \text{ donde } (x, y) \in D, \tag{1}$$

la ecuación de una superficie y $\varphi(P_1, P)$ el ángulo formado por las normales a la superficie (1) en los puntos $P(x, y) \in D$ y $P_1(x_1, y_1) \in D$.

Demostrar que, si el recinto D está acotado y es cerrado y la función $f(x, y)$ tiene derivadas acotadas de 2° orden en el recinto D, entonces se verifica la desigualdad de Liapunov

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P), \qquad (2)$$

donde C es una constante y $\rho(P_1, P)$ es la distancia entre los puntos P y P_1.

3559. ¿Bajo qué ángulo se cortan el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con la superficie $bz = xy$ en el punto común $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

3560. Comprobar que las superficies coordenadas respectivas a las coordenadas esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ y = x \operatorname{tg}\varphi,\ x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\theta$$

son ortogonales entre sí.

3561. Comprobar que las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2by,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$$

forman un sistema triortogonal.

3562. Por cada punto $M(x, y, z)$ pasan, para $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, tres superficies de segundo orden:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2} + \frac{y^2}{b^2-\lambda^2} + \frac{z^2}{c^2-\lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0).$$

Demostrar que éstas son ortogonales entre sí.

3563. Hallar la derivada de la función $u = x + y + z$ en la dirección de la normal exterior a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

en su punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

¿En qué puntos de la esfera la derivada normal de la función u tiene: a) el valor máximo, b) el valor mínimo, c) es igual a cero?

3564. Hallar la derivada de la función $u = x^2 + y^2 + z^2$ en la dirección de la normal exterior al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en su punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3565. Sean $\frac{\partial u}{\partial n}$ y $\frac{\partial v}{\partial n}$ las derivadas normales de las funciones u y v en un punto de la superficie $F(x, y, z) = 0$. Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

§ 7. Extremos de una función de varias variables

1.° *Definición de extremo.* Sea $f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función definida en un entorno del punto P_0. Si $f(P_0) > f(P)$, o bien $f(P_0) < f(P)$, para $0 < \rho(P_0, P) < \delta$, se dice que la función $f(P)$ tiene un extremo (un máximo o un mínimo, respectivamente) en el punto P_0.

2.° *Condición necesaria de extremo.* Una función diferenciable $f(P)$ puede tener extremo solamente en un punto estacionario P_0, o sea, en un punto tal que $df(P_0) = 0$. Por consiguiente, los puntos de extremo de la función $f(P)$ satisfacen al sistema de ecuaciones $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

3.° *Condición suficiente de extremo.* La función $f(P)$ tiene en el punto P_0:

a) un máximo, si $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$ para $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

b) un mínimo, si $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$ para $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

La averiguación del signo de la diferencial de segundo orden $d^2 f(P_0)$ puede efectuarse mediante una reducción de la forma cuadrática correspondiente a la forma canónica.

En particular, para el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables independientes x e y, en el punto estacionario (x_0, y_0) $(df(x_0, y_0) = 0)$ con la condición $D = AC - B^2 \neq 0$, donde $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, se tiene:

1) un mínimo, si $D > 0$, $A > 0$ $(C > 0)$;

2) un máximo, si $D > 0$, $A < 0$ $(C < 0)$;

3) no hay extremo, si $D < 0$.

4.° *Extremos condicionados.* El problema de la determinación de los extremos de la función $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ habiendo una serie de relaciones $\varphi_i(P) = 0$ $(i = 1, \ldots, m; m < n)$ se reduce a la búsqueda de los extremos ordinarios para la función de Lagrange

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(P),$$

donde λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ son factores constantes. El problema de la existencia y el carácter del extremo condicionado se resuelve en el caso más elemental, basándose en el estudio del signo de la diferencial de segundo orden $d^2 L(P_0)$ en el punto estacionario P_0 de la función $L(P)$, con la condición de que las variables $dx_1, \ldots, dx_n$ estén ligadas por las relaciones

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

5.° *Extremos absolutos.* Una función $f(P)$, que es diferenciable en un recinto cerrado y acotado, alcanza sus valores máximo y mínimo en este recinto en un punto estacionario o en un punto de la frontera del recinto.

Problemas:

Averiguar los extremos de las siguientes funciones de varias variables:

3621. $z = x^2 + (y - 1)^2$.

3622. $z = x^2 - (y - 1)^2$.

3623. $z = (x - y + 1)^2$.

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

3625. $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$.

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

3627.1. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0, \ y > 0)$.

3629. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a > 0, \ b > 0)$.

3630. $z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

3631. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

3632. $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

3634. $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

3641. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

3642. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

3643. $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

3644. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$.

3646. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$

$(x>0,\quad y>0,\quad z>0,\ a>0,\ b>0)$.

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$(0\leqslant x\leqslant\pi;\quad 0\leqslant y\leqslant\pi;\quad 0\leqslant z\leqslant\pi)$.

3648. $u=x_1x_2^2\ldots x_n^n\ (1-x_1-2x_2-\ldots-nx_n)$

$(x_1>0,\ x_2>0,\ldots,\ x_n>0)$.

3649. $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}$

$(x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3650. Problema de Huygens. Entre dos números positivos a y b hay que introducir n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tal modo que la fracción

$$u=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

sea máxima.

Hallar los valores extremales de la función z de las variables x, y, dada en forma implícita:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

Hallar los puntos de extremo condicionado para las siguientes funciones:

3654. $z = xy$, si $x + y = 1$.

3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, si $x^2 + y^2 = 1$.

3656. $z = x^2 + y^2$, si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

3657. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, si $x^2 + y^2 = 1$.

3657.1. $z = x^2 + 12xy + 2y^2$. si $4x^2 + y^2 = 25$.

3658. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, si $x - y = \frac{\pi}{4}$.

3659. $u = x - 2y + 2z$. si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3660. $u = x^m y^n z^p$, si

$$x + y + z = a \quad (m > 0,\ n > 0,\ p > 0,\ a > 0).$$

3661. $u = x^2 + y^2 + z^2$, si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

3662. $u = xy^2z^3$, si $x + 2y + 3z = a$

$$(x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0).$$

3663. $u = xyz$, si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

3663.1. $u = xy + yz$, $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, si $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$$(x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

3665. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

$$(a > b > c > 0,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1).$$

3666. $u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$,

si $Ax + By + Cz = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$$\frac{\xi}{\cos\alpha} = \frac{\eta}{\cos\beta} = \frac{\zeta}{\cos\gamma},$$ donde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, si

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_i > 0;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

3668. $u = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p$ $(p > 1)$, si

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \quad (a > 0).$$

3669. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$, si

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = 1 \ (\alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ x_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

3670. $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, si $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$
$(a > 0,\ \alpha_i > 1,\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

3671. Hallar los extremos de la forma cuadrática

$$u = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

3672. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

si $n \geqslant 1$ y $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Indicación. Buscar el mínimo de la función $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ con la condición $x + y = s$.

3673. Demostrar la desigualdad de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i \geqslant 0,\quad x_i \geqslant 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n;\quad k > 1,\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1\right).$$

Indicación. Buscar el mínimo de la función

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A.$$

3674. Demostrar la desigualdad de Hadamard para un determinante $A = |a_{ij}|$ de orden n:

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

Indicación. Examinar el extremo del determinante $A = |a_{ij}|$ con las condiciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Determinar los valores máximo (sup) y mínimo (inf) de las siguientes funciones en los recintos indicados:

3675. $z = x - 2y - 3$, si

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x + y \leqslant 1.$$

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, si $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, si $|x| + |y| \leqslant 1$.

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, si $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100$.

3679. $u = x + y + z$, si $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

3680. Hallar el ínfimo (inf) y el supremo (sup) de la función

$$u = (x + y + z)\, e^{-(x+2y+3z)}$$

en la región $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3681. Comprobar que la función $z = (1 + e^y) \cos x - y\, e^y$ tiene un conjunto infinito de máximos y ningún mínimo.

3682. ¿Es suficiente para el mínimo de una función $f(x, y)$ en un punto $M_0\ (x_0, y_0)$ que esta función tenga mínimo a lo largo de cada recta que pasa por el punto M_0?

Examinar el ejemplo $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$.

3683. Descomponer un número positivo dado a en n factores positivos de tal modo que la suma de sus inversos sea mínima.

3684. Descomponer un número positivo dado a en n sumandos de tal modo que la suma de sus cuadrados sea mínima.

3685. Descomponer un número positivo dado a en n factores positivos de tal modo que la suma de unas potencias positivas dadas de dichos factores sea mínima.

3686. Se dan n puntos materiales en el plano. $P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$, ..., $P_n\ (x_n, y_n)$, cuyas masas son iguales a $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente.

¿Cuál tiene que ser la posición del punto $P\ (x, y)$ para que el momento de inercia del sistema respecto de este punto sea mínimo?

3687. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una bañera rectangular abierta de una capacidad dada V, para que su superficie sea mínima?

3688. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una bañera cilíndrica abierta, con una sección transversal semicircular, cuya superficie es igual a S, para que su capacidad sea máxima?

3689. Hallar un punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tal que la suma de los cuadrados de sus distancias hasta n puntos dados M_i (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, ..., n)$ sea mínima.

3690. Un cuerpo consta de un cilindro circular recto que termina con un cono circular recto. Dada la superficie total del cuerpo, igual a Q, determinar sus dimensiones de tal modo que su volumen sea máximo.

3691. Un cuerpo, cuyo volumen es igual a V, representa un paralelepípedo rectangular recto, cuyas bases inferior y superior vienen terminadas por pirámides regulares y cuadrangulares iguales. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación de las caras laterales de las pirámides respecto de sus bases, para que la superficie total del cuerpo sea mínima?

3692. Hallar un rectángulo de un perímetro dado $2p$, de tal modo que al girar alrededor de uno de sus lados se forme un cuerpo de volumen máximo.

3693. Hallar un triángulo de un perímetro dado $2p$, de modo que al girar alrededor de uno de sus lados se forme un cuerpo de volumen máximo.

3694. Inscribir en una semiesfera de radio R un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

3695. Inscribir en un cono circular recto un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

3696. Inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

un paralelepípedo de volumen máximo.

3697. Inscribir en un cono circular recto, cuya generatriz l forma un ángulo α con el plano de la base, un paralelepípedo rectangular tal que su superficie total sea máxima.

3698. Inscribir en el segmento de paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = c$, un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

3699. Hallar la distancia mínima del punto M_0 (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

3700. Determinar la distancia mínima d entre dos rectas en el espacio

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

y

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

3701. Hallar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

3702. Hallar los semiejes de una curva central de segundo orden

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1.$$

3703. Hallar los semiejes de una superficie central de segundo orden

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1.$$

3704. Determinar el área de la elipse formada en la intersección del cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el plano

$$Ax + By + Cz = 0.$$

3705. Determinar el área de la sección del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

por el plano

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

donde

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3706. Según el principio de Fermat, la luz que sale del punto A y que incide en el punto B se propaga por aquella curva, para cuyo recorrido se invierta el tiempo mínimo.

Suponiendo que los puntos A y B están situados en distintos medios ópticos, divididos por un plano, siendo la velocidad de propagación de la luz en el primer medio igual a v_1 y en el segundo igual a v_2, deducir la ley de refracción de la luz.

3707. ¿Cuál debe ser el ángulo de incidencia para que la desviación del rayo luminoso (o sea, el ángulo formado por el rayo incidente y el rayo emergente) que pasa por un prisma, que tiene el ángulo de refracción α y el índice de refracción n, sea mínima.

3708. Las variables x e y satisfacen a una ecuación lineal

$$y = ax + b,$$

cuyos coeficientes se necesitan determinar. Como resultado de una serie de mediciones de igual precisión de las magnitudes x e y se han obtenido los valores x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Aplicando el método de los cuadrados mínimos, determinar los valores más probables para los coeficientes a y b.

Indicación. Según el método de los cuadrados mínimos, los valores más probables de los coeficientes a y b son aquellos para los que la suma de los cuadrados de los errores

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

es mínima.

3709. En el plano se ha dado un sistema de n puntos M_i (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \ldots, n$).

¿Cuál debe ser la posición de la recta

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

para que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos dados de esta recta sea mínima?

3710. Sustituir aproximadamente la función x^2 en el intervalo $(1, 3)$ por una función lineal $ax + b$, de tal modo que la desviación absoluta

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \qquad (1 \leqslant x \leqslant 3)$$

sea mínima.

---

pítulo **8** INTEGRALES MULTIPLES Y CURVILINEAS

§ 1. Integrales dobles

1.° *Cálculo directo de una integral doble.* Se llama integral doble de una función continua $f(x, y)$, extendida a un recinto cuadriculable cerrado y acotado Ω, al número

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \to 0 \\ \max |\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ y la suma se extiende a aquellos valores de i y j para los cuales $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Si el recinto Ω viene dado por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones continuas en el segmento $[a, b]$, entonces la integral doble correspondiente puede calcularse según la fórmula

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

2.° *Cambio de variables en la integral doble.* Si las funciones, con diferenciales continuas,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

realizan una transformación biyectiva del recinto cerrado y acotado Ω del plano Oxy en el recinto Ω' del plano Ouv, y el jacobiano

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

entonces se verifica la fórmula

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v))\, |I|\, du\, dv.$$

En particular, para el caso del paso a coordenadas polares r y φ según las fórmulas $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, se tiene:

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Problemas:

3901. Calcular la integral

$$\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy,$$

considerándola como el límite de las sumas integrales, dividiendo el recinto de integración en cuadrados mediante las rectas

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\qquad (i, j=1, 2, \ldots, n-1)$$

y tomando los valores de la función subintegral en los vértices de la derecha de estos cuadrados.

3902. Formar las sumas integrales, la inferior $\underline{S}$ y la superior $\overline{S}$, para la función $f(x, y)=x^2+y^2$ en el recinto $1\leqslant x\leqslant 2$, $1\leqslant y\leqslant 3$, dividiendo éste en rectángulos mediante las rectas

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\qquad (i, j=0, 1, \ldots, n).$$

¿A qué son iguales los límites de estas sumas cuando $n\longrightarrow\infty$?

3903. Calcular aproximadamente la integral

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dx\,dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

aproximando el recinto de integración por un sistema de cuadrados inscritos, cuyos vértices A_{ij} estén situados en los puntos enteros, y tomando los valores de la función subintegral en los vértices de estos cuadrados que están más alejados del origen de coordenadas. Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de la integral.

3904. Calcular aproximadamente la integral

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

donde S es el triángulo limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, dividiendo el recinto S por las rectas $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$, en cuatro triángulos iguales y tomando los valores de la función subintegral en los centros de gravedad de estos triángulos.

3905. El recinto S $\{x^2+y^2 \leqslant 1\}$ está dividido en un número finito de partes cuadriculables ΔS_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ de diámetro menor que δ. ¿Para qué valor de δ puede garantizarse la validez de la desigualdad

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\,dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\,\Delta S_i\right| < 0{,}001,$$

donde $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$?

Calcular las integrales:

3906. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy$. 3907. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy$.

3908. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} r^2 \sin^2 \varphi\,dr$.

3909. Demostrar la igualdad

$$\iint_R X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy,$$

si R es el rectángulo:

$$a \leqslant x \leqslant A, \quad b \leqslant y \leqslant B.$$

3910. Calcular:

$$I = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x, y)\,dy,$$

si

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

3911. Sea $f(x)$ una función continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Demostrar la desigualdad

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

donde el signo de igualdad solamente se verifica si $f(x) = \text{const}$.

Indicación. Examinar la integral

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \, dy.$$

3912. Qué signo tienen las integrales:

a) $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$; b) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$;

c) $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1-x}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy$?

3913. Hallar el valor medio de la función

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

en el cuadrado: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

3914. Aplicando el teorema del valor medio, acotar la integral

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dx\, dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

3915. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia de un punto del círculo $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2$ al origen de coordenadas.

En los ejercicios 3916-3922 hay que colocar los límites de integración en la integral doble $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$, en uno y otro orden, para los recintos indicados Ω.

3916. Ω es el triángulo con los vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

3917. Ω es el triángulo con los vértices $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$.

3918. Ω es el trapecio con los vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 1)$.

3919. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. 3920. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant y$.

3921. Ω es el segmento parabólico limitado por las curvas $y = x^2$, $y = 1$.

3922. Ω es el anillo circular $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3923. Demostrar la fórmula de Dirichlet

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dx = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx \quad (a > 0).$$

Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales:

3924. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy.$

3925. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\, dy.$

3926. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy.$

3927. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy.$

3928. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

3929. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy \quad (a > 0).$

3930. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy.$

3931. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y)\, dy.$

Calcular las siguientes integrales:

3932. $\iint_\Omega xy^2\, dx\, dy$, si el recinto Ω está limitado por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

3933. $\iint_\Omega \frac{dx\, dy}{\sqrt{2a - x}}$ $(a > 0)$, si el recinto Ω está limitado por el arco más pequeño de la circunferencia con el centro en el punto (a, a), que es tangente a los ejes de coordenadas, y los ejes de coordenadas.

3934. $\iint_\Omega |xy|\, dx\, dy$, si Ω es un círculo de radio a con el centro en el origen de coordenadas.

3935. $\iint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, si Ω es un paralelogramo con los lados $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$ $(a > 0)$.

3936. $\iint_\Omega y^2\, dx\, dy$, si Ω está limitado por el eje de abscisas y el primer arco de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Pasar en la integral doble

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$$

a coordenadas polares r, φ, haciendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, y colocar los límites de integración, si:

3937. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

3938. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant ax$ $(a > 0)$.

3939. Ω es el anillo $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$.

3940. Ω es el triángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.

3941. Ω es el segmento parabólico $-a \leqslant x \leqslant a$. $\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a$.

3942. ¿En qué caso, después de pasar a coordenadas polares, los límites de integración resultan constantes?

Pasar a coordenadas polares r, φ, haciendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, y colocar los límites de integración en uno y otro orden en las siguientes integrales:

3943. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy$.

3944. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3945. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dy$.

3946. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy$.

3947. $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

Suponiendo que r y φ son coordenadas polares, cambiar el orden de integración en las siguientes integrales:

3948. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr \quad (a > 0)$.

3949. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,dr \quad (a > 0)$.

3950. $\int\limits_0^a d\varphi \int\limits_0^\varphi f(\varphi, r)\, dr \quad (0 < a < 2\pi)$.

Pasando a coordenadas polares, sustituir las integrales dobles por simples.

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dx\, dy$.

3952. $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dx\, dy$, где $\Omega = \{|y| \leqslant |x|;\ |x| \leqslant 1\}$.

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy$.

Pasando a coordenadas polares, calcular las siguientes integrales dobles:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$. **3955.** $\iint\limits_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

Calcular las siguientes integrales dobles:

3965. $\iint\limits_{\Omega} (x + y)\, dx\, dy$, donde el recinto Ω está limitado por la recta

$$x^2 + y^2 = x + y.$$

3966. $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|)\, dx\, dy.$

3967. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$ donde el recinto Ω está limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

3968. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$

3969. $\iint\limits_{\Omega} (x + y)\, dx\, dy,$ donde el recinto Ω está limitado por las curvas $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

3970. $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, donde el recinto Ω está limitado por las curvas $xy=1, x+y=\frac{5}{2}$.

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq \pi\\ 0\leq y\leq \pi}} |\cos(x+y)|\,dx\,dy$.

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right| dx\,dy$. 3973. $\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1\\ 0\leq y\leq 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$.

Calcular las integrales de las funciones discontinuas:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$.

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq 2}} [x+y]\,dx\,dy$. 3976. $\iint\limits_{x^2\leq y\leq 4} \sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy$.

3977. Demostrar que

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} x^m y^n\,dx\,dy=0,$$

si m y n son números enteros positivos y al menos uno de ellos es impar.

3978. Hallar

$$\lim_{\rho\to} \frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq\rho^2} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde $f(x, y)$ es una función continua.

3979. Hallar $F'(t)$, si

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq t\\ 0\leq y\leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy.$$

3980. Hallar $F'(t)$, si

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leq 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

3981. Hallar $F'(t)$, si

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x, y)\,dx\,dy \quad (t>0).$$

3982. Demostrar que, si $f(x, y)$ es continua, entonces la función

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\,d\eta$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y).$$

3983. Supongamos que las líneas de nivel de la función $f(x, y)$ son curvas elementales cerradas y que el recinto $S(v_1, v_2)$ está limitado por las curvas $f(x, y)=v_1$ y $f(x, y)=v_2$.

Demostrar que

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

donde $F(v)$ es el área de la figura limitada por las curvas $f(x, y)=v_1$, $f(x, y)=v_2$.

Indicación. Dividir el recinto de integración en partes, limitadas por líneas de nivel de la función $f(x, y)$, infinitamente próximas entre sí.

§ 2. Cálculo de áreas

El área de un recinto S situado en el plano Oxy viene dado por la fórmula

$$S=\iint\limits_S dx\,dy.$$

Problemas:

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

3984. $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$.

3985. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0,\ q>0)$.

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$.

§ 3. Cálculo de volúmenes

El volumen de un cilindroide, limitado por arriba por una superficie continua $z=f(x, y)$, por abajo por el plano $z=0$ y lateralmente por

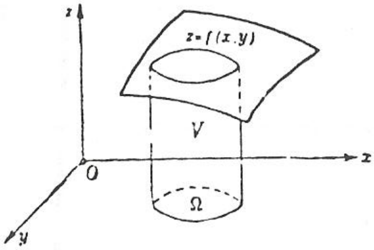

Fig. 14.

una superficie cilíndrica recta, que corta en el plano Oxy un recinto cuadriculable Ω (Fig. 14), es igual a

$$V=\iint_{\Omega} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Problemas:

4005. Dibujar el cuerpo cuyo volumen expresa la integral

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

4006. Representar los cuerpos cuyos volúmenes vienen expresados por las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}(x+y)\,dx\,dy$; d) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

b) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$; e) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,dx\,dy$;

c) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$; f) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

4007. $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4008. $x+y+z=a,\ x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (a\geqslant R\sqrt{2}).$

4009. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

4010. $z=\cos x\cos y,\ z=0,\ |x+y|\leqslant\frac{\pi}{2},\ |x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}.$

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$.

4012. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

Pasando a coordenadas polares, hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

4013. $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$.

4014. $z=x+y$, $(x^2+y^2)^2=2xy$, $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

4015. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$.

4017. $x^2+y^2-az=0$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $z=0$ $(a>0)$.

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$.

4019. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $z=0$,

$y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$ $(a>0,\ c>0,\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies (se supone que los parámetros son positivos).

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $z=0$.

4025. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4026. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

4027. $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

4028. $z=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $z=0$.

4029. $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$, $z=0$.

4030. $z=c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$, $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta;$ $x>0)$.

4031. $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4032. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $z=0$.

4033. $z=c\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ $(y\geqslant 0)$.

4033.1. $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}}$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=m$, $y=n$, $z=0$ $(0<m<n)$.

4034. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0)$.

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0,$ $m>0)$.

§ 4. Cálculo de áreas de superficies

1.° *Caso de expresión explícita de una superficie.* El área de una superficie lisa $z=z(x,y)$ se expresa por la integral

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

donde Ω es la proyección de la superficie dada sobre el plano Oxy.

2.° *Caso de expresión paramétrica de una superficie.* Si la superficie viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

donde $(u,v)\in\Omega$, Ω es un recinto cerrado cuadriculable y las funciones x, y, z admiten diferenciales continuas en el recinto Ω, entonces, para el área de la superficie se tiene la fórmula

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

donde

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Problemas:

4036. Hallar el área de la parte de la superficie $az=xy$, comprendida en el interior del cilindro $x^2+y^2=a^2$.

4037. Hallar el área de la superficie del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

4038. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, comprendida en el interior del cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leqslant a)$.

4039. Hallar el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ cortada por los planos $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4040. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada fuera de los cilindros $x^2 + y^2 = \pm ax$ (problema de Viviani).

4041. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprendida en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

4042. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ comprendida en el interior del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

4043. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ recortada por los planos $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

4044. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = 2az$ comprendida en el interior del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

4045. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = a^2$ recortada por los planos $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

4045.1. Hallar el área de la parte de la superficie

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1,$$

cortada por el plano $z = 0$.

4045.2. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1,$$

recortada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4045.3. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

recortada por la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geqslant 0).$$

4045.4. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

recortada por los planos $x = 1$, $x = 2$ $(y \geqslant 0)$.

4046. Hallar el área de la superficie y el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$.

4047. Hallar el área de la parte de la esfera limitada por dos paralelos y dos meridianos.

4048. Hallar el área de la parte del helicoide

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h\varphi,\ \text{donde } 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

4049. Hallar el área de la parte de la superficie del toro

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ z = a\sin\psi$$

$(0 < a \leqslant b)$ comprendida por dos meridianos $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ y dos paralelos $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$.

¿A qué es igual el área de la superficie de todo el toro?

4050. Hallar el ángulo sólido ω bajo el cual se ve el rectángulo $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, desde el origen de coordenadas. Deducir una fórmula de aproximación para ω si a es grande.

§ 5. Aplicaciones de las integrales dobles a la mecánica

1.° *Centro de gravedad.* Si x_0, y_0 son las coordenadas del centro de gravedad de una lámina Ω, situada en el plano Oxy y $\rho = \rho(x, y)$ es la densidad de la lámina, entonces

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \varrho x\,dx\,dy,\quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \varrho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

donde $M = \iint_{\Omega} \rho\,dx\,dy$ es la masa de la lámina.

Si la lámina es homogénea, en las fórmulas (1) se debe hacer $\rho = 1$.

2.° *Momentos de inercia.* Los momentos de inercia I_x, I_y de una lámina Ω, situada en el plano Oxy, respecto de los ejes de coordenadas Ox y Oy, se expresan por las fórmulas

$$I_x = \iint_{\Omega} \varrho y^2\,dx\,dy,\quad I_y = \iint_{\Omega} \varrho x^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

respectivamente, donde $\rho = \rho(x, y)$ es la densidad de la lámina.

Se examina también el momento de inercia centrífugo

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} \varrho\,xy\,dx\,dy. \tag{3}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
BIBLIOTECA

Haciendo $\rho = 1$ en las fórmulas (2) y (3), obtenemos el momento de inercia geométrico de una figura plana.

Problemas:

4051. Hallar la masa de una lámina cuadrada de lado a, si la densidad de la lámina en cada punto es proporcional a la distancia de este punto a uno de los vértices del cuadrado y es igual a ρ_0 en el centro del cuadrado.

Hallar las coordenadas del centro de gravedad de las láminas homogéneas, limitadas por las siguientes curvas:

4052. $ay = x^2, \ x + y = 2a \ (a > 0)$.
4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \ x = 0, \ y = 0$.
4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \ (x > 0, \ y > 0)$.
4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (lazo).
4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \ (x > 0, \ y > 0)$.
4057. $r = a(1 + \cos\varphi), \ \varphi = 0$.
4058. $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi), \ y = 0$.

4059. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una lámina circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, si su densidad en el punto $M(x, y)$ es proporcional a la distancia del punto M al punto $A(a, 0)$.

4060. Determinar la curva que describe el centro de gravedad de la superficie variable, limitada por las curvas:

$$y = \sqrt{2px}, \ y = 0, \ x = X.$$

Hallar los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los ejes de coordenadas Ox y Oy de las figuras ($\rho = 1$), limitadas por las siguientes curvas:

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \ \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, \ y = 0 \ (b_1 > 0, \ b_2 > 0, \ h > 0)$.
4062. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2, \ x = 0, \ y = 0 \ (0 \leqslant x \leqslant a)$.
4063. $r = a(1 + \cos\varphi)$.
4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.
4065. $xy = a^2, \ xy = 2a^2, \ x = 2y, \ 2x = y \ (x > 0, \ y > 0)$.

4066. Hallar el momento polar

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

de la figura S limitada por la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

4066.1. Hallar el momento de inercia centrífugo I_{xy} de la figura homogénea limitada por las curvas

$$ay = x^2, \quad ax = y^2, \quad (a > 0).$$

4067. Demostrar la fórmula

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

donde I_l, I_{l_0} son los momentos de inercia de la figura S respecto de dos ejes paralelos l y l_0, de los cuales, l_0, pasa por el centro de gravedad de la figura y d es la distancia entre estos ejes.

4068. Demostrar que el momento de inercia de un recinto plano S, respecto de la recta que pasa por el centro de gravedad $O\,(0, 0)$ y que forma un ángulo α con el eje Ox, es igual a

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia del recinto S respecto de los ejes Ox y Oy, e I_{xy} es el momento centrífugo:

$$I_{xy} = \iint\limits_S \rho xy \, dx \, dy.$$

4069. Hallar el momento de inercia de un triángulo regular de lado a respecto de la recta que pasa por el centro de gravedad del triángulo y que forma con su altura un ángulo α.

4070. Determinar la presión del agua sobre la pared lateral $x \geqslant 0$ de una vasija cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, si el nivel del agua es $z = h$.

4071. Una bola de radio a está sumergida en un líquido de densidad constante a la profundidad h (contando desde el centro de la bola), donde $h \geqslant a$. Hallar la presión del líquido sobre las partes superior e inferior de la superficie de la bola.

4072. Un cilindro circular recto, cuyo radio de la base es igual a a, y de altura b, está completamente sumergido en un líquido de densidad δ, de tal modo que su centro se encuentra a la profundidad h bajo la superficie del líquido y el eje del cilindro forma con la vertical un ángulo α. Determinar la presión del líquido sobre las bases inferior y superior del cilindro.

4073. Determinar la fuerza de atracción de un punto material $P(0, 0, b)$ por un cilindro homogéneo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, si la masa del cilindro es igual a M y la masa del punto es igual a m.

4074. La distribución de la presión de un cuerpo sobre una lámina arrugada

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

viene dada por la fórmula $p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$.

Calcular la presión media del cuerpo sobre esta lámina.

4075. Un prado, que tiene la forma de un rectángulo con los lados a y b, está cubierto uniformemente por hierba segada cuya densidad es igual a $p\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. ¿Qué trabajo mínimo hay que realizar para recoger todo el heno en el centro del prado, si el trabajo de transporte de una carga de P kg a la distancia r es igual al kPr $(0<k<1)$.

§ 6. Integrales triples

1.° *Cálculo directo de una integral triple.* Si la función $f(x, y, z)$ es continua y el recinto V está acotado y se define por las siguientes desigualdades:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y),$$

donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ son funciones continuas, entonces la integral triple de la función $f(x, y, z)$, extendida al recinto V, puede calcularse por la fórmula

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)}f(x, y, z)\,dz.$$

A veces es conveniente aplicar la fórmula

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\iint\limits_{S(x)}f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

donde $S(x)$ es la sección del recinto V por el plano $x=\text{const}$.

2.° *Cambio de variables en la integral triple.* Si el recinto cubiculable cerrado y acotado V del espacio $Oxyz$ se transforma biunívocamente en el recinto V' del espacio $O'uvw$ mediante las funciones con diferenciales continuas

$$x=x(u, v, w)\quad y=y(u, v, w),\quad z=z(u, v, w),$$

siendo

$$I=\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)}\neq 0 \text{ para } (u,\ v,\ w)\in V',$$

se verifica la fórmula

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V'} f(x(u,\ v,\ w),\ \ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))\,|\,I\,|\,du\,dv\,dw.$$

Como casos particulares, se tiene: 1) el sistema de coordenadas cilíndricas $\varphi,\ r,\ h,$ donde

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

y

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ h)}=r,$$

y 2) el sistema de coordenadas esféricas $\varphi,\ \psi,\ r,$ donde

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi\quad z=r\sin\psi,^{*)}$$

y

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)}=r^2\cos\psi.$$

Problemas:

Calcular las siguientes integrales triples:

4076. $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

---

*) A veces, se utilizan las coordenadas esféricas $\varphi,\ \theta,\ \rho$, relacionadas con las coordenadas cartesianas por las fórmulas

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=\rho\cos\theta,$$

donde $0\leqslant\rho<+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, y

$$I=\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\varphi,\ \theta,\ \rho)}=\rho^2\sin\theta$$

Aquí θ, ρ son las coordenadas polares en el semiplano $\varphi=\text{const}$ respecto del sistema polar con el polo en el origen y cuyo eje polar coincide con el semieje positivo Oz y φ es la coordenada cilíndrica. Estas coordenadas esféricas están relacionadas con las coordenadas cilíndricas por las fórmulas

$$r=\rho\sin\theta,\ \ h=\rho\cos\theta,\ \ \varphi=\varphi.$$

(N. del T.)

4077. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ donde el recinto V está limitado por las superficies $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por la superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies

$$x^2+y^2=z^2, \quad z=1.$$

Colocar de diversos modos los límites de integración en las siguientes integrales triples:

4081. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz.$

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)\,dz.$

4083. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,dz.$

Sustituir las integrales triples por integrales ordinarias:

4084. $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int\limits_0^\eta f(\zeta)\,d\zeta.$

4085. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz.$

4086. Hallar

$$\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B dy \int\limits_c^C f(x, y, z)\,dz,$$

si $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ y a, b, c, A, B, C son constantes.

Pasando a coordenadas esféricas, calcular las integrales:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por la superficie $x^2+y^2+z^2=z$.

4088. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz$.

4089. Pasar a coordenadas esféricas en la integral

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

4090. Efectuando el cambio de variables correspondiente, calcular la integral triple

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4091. Pasando a coordenadas cilíndricas, calcular la integral

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

4092. Calcular la integral

$$\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$.

4093. Hallar la integral $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está situado en el octante $x>0$, $y>0$, $z>0$ y está limitado por las superficies:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\quad xy=b^2,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x$$

$$(0<a<b;\quad 0<\alpha<\beta;\quad 0<m<n).$$

4094. Hallar el valor medio de la función

$$f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$$

en el recinto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$.

4095. Hallar el valor medio de la función

$$f(x, y, z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

en el recinto $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

4096. Aplicando el teorema del valor medio, acotar la integral

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

donde $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

4097. Demostrar que, si la función $f(x, y, z)$ es continua en el recinto V y

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=0$$

para cualquier recinto $\omega \subset V$, entonces $f(x, y, z) \equiv 0$ para $(x, y, z) \in V$.

4098. Hallar $F'(t)$, si:

$$\text{a)}\ F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

donde f es una función diferenciable:

$$\text{b)}\ F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t\\ 0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz,$$

donde f es una función diferenciable.

4099. Hallar

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz,$$

donde m, n y p son números enteros no negativos.

§ 7. Cálculo de volúmenes mediante integrales triples

El volumen de un recinto V se expresa por la fórmula

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

Problemas:

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

4101. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

4102. $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4103. $x^2 + z^2 = a^2$, $x + y = \pm a$, $x - y = \pm a$.

4104. $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$.

4105. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$.

4106. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pasando a coordenadas esféricas o cilíndricas, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:

4107. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 \leqslant z^2$.

4108. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

4109. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

4110. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$ $(0 < a < b)$.

Utilizando un cambio de variables adecuado, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies (se supone que los parámetros son positivos):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4116.1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.1. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.2. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$

4119. $z=x^2+y^2,\quad z=2(x^2+y^2),\quad xy=a^2,\quad xy=2a^2,\quad x=2y,$
$2x=y\ (x>0,\ y>0).$

4120. $x^2+z^2=a^2,\quad x^2+z^2=b^2,\quad x^2-y^2-z^2=0\ (x>0).$

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}.$

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

4123. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$
$x=0,\ x=a.$

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}},\quad x=0,\quad z=0,\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

4125. ¿En qué razón divide la superficie $x^2+y^2+az=4a^2$ el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$?

4126. Hallar el volumen y el área de la superficie del cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=az,\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$.

4127. Hallar el volumen del paralelepípedo limitado por los planos

$$a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

si

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

4128. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2,$$

si

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

4129. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n>1).$$

4130. Hallar el volumen del cuerpo situado en el octante positivo del espacio $Oxyz$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) y limitado por las superficies:

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1 \quad (m>0,\ n>0,\ p>0), \qquad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

§ 8. Aplicaciones de las integrales triples a la mecánica

1.° *Masa de un cuerpo.* Si un cuerpo ocupa un volumen V y $\rho=\rho(x, y, z)$ es su densidad en el punto (x, y, z), entonces su masa es igual a

$$M=\iiint\limits_V \varrho\, dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

2.° *Centro de gravedad de un cuerpo.* Las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo (x_0, y_0, z_0) se calculan por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \varrho x\, dx\, dy\, dz,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \varrho y\, dx\, dy\, dz,\\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \varrho z\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si el cuerpo es homogéneo, en las fórmulas (1) y (2) se puede hacer $\rho=1$.

3.° *Momento de inercia.* Se llaman momentos de inercia de un cuerpo respecto de los planos coordenados a las integrales respectivas

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \varrho z^2\, dx\, dy\, dz, \qquad I_{yz}=\iiint\limits_V \varrho x^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V \varrho y^2\, dx\, dy\, dz.$$

Se llama momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje l a la integral

$$I_l=\iiint\limits_V \varrho r^2\, dx\, dy\, dz,$$

donde r es la distancia del punto variable del cuerpo (x, y, z) al eje l. En particular, para los ejes coordenados Ox, Oy, Oz, se tiene, respectivamente:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

Se llama momento de inercia de un cuerpo respecto del origen de coordenadas a la integral

$$I_0 = \iiint\limits_V \varrho\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Evidentemente, se tiene:

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4.° *Potencial de un campo de gravitación.* Se llama potencial newtoniano de un cuerpo en el punto $P(x, y, z)$ a la integral

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \varrho\,(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r},$$

donde V es el volumen del cuerpo, $\rho = \rho\,(\xi, \eta, \zeta)$ es su densidad y

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Un punto material de masa m es atraído por el cuerpo con una fuerza, cuyas proyecciones X, Y, Z, sobre los ejes coordenados Ox, Oy, Oz, son iguales a

$$X = km\,\frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint\limits_V \varrho\,\frac{\xi - x}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$Y = km\,\frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint\limits_V \varrho\,\frac{\eta - y}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$Z = km\,\frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint\limits_V \varrho\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

donde k es la constante de la ley de gravitación.

Problemas:

4131. Hallar la masa de un cuerpo que ocupa el volumen unidad $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, si la densidad del cuerpo en el punto $M(x, y, z)$ viene dada por la fórmula $\rho = x + y + z$.

4132. Hallar la masa de un cuerpo que ocupa la región infinita

$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, si la densidad varía según la ley $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde $\rho_0 > 0$ y $k > 0$ son constantes.

Hallar las coordenadas del centro de gravedad para los cuerpos homogéneos limitados por las siguientes superficies:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

4140. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
$(n > 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

4142. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo que tiene la forma de un cubo:

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

si su densidad en el punto (x, y, z) es igual a

$$\varrho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

donde $0 < \alpha < 1$. $0 < \beta < 1$. $0 < \gamma < 1$.

Determinar los momentos de inercia respecto de los planos coordenados de los cuerpos homogéneos limitados por las siguientes superficies (los parámetros son positivos):

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

4147.1. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

4147.2. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1,$

$$x=0,\ y=0,\ z=0\ (n>0;\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0).$$

Determinar los momentos de inercia respecto del eje Oz de los cuerpos homogéneos limitados por las superficies:

4148. $z=x^2+y^2,\ x+y=\pm 1,\ x-y=\pm 1,\ z=0.$
4149. $x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z^2\ (z>0).$
4149.1. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^5 z.$

4150. Hallar el momento de inercia de una bola no homogénea $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ de masa M respecto de su diámetro, si la densidad de la bola en el punto variable $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de este punto al centro de la bola.

4151. Demostrar la igualdad

$$I_l = I_{l_0} + Md^2,$$

donde I_l es el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje l, I_{l_0} es el momento de inercia respecto de un eje l_0 que es paralelo a l y pasa por el centro de gravedad del cuerpo, d es la distancia entre los ejes y M es la masa del cuerpo.

4152. Demostrar que el momento de inercia de un cuerpo que ocupa un volumen V, respecto de un eje l que pasa por su centro de gravedad O (0, 0, 0) y que forma con los ejes coordenados los ángulos α, β, γ, es igual a:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

donde I_x, I_y, I_z son los momentos de inercia del cuerpo respecto de los ejes coordenados y

$$K_{xy} = \iiint\limits_V \varrho xy\,dx\,dy\,dz, \quad K_{xz} = \iiint\limits_V \varrho xz\,dx\,dy\,dz,$$
$$K_{yz} = \iiint\limits_V \varrho yz\,dx\,dy\,dz$$

son los momentos centrífugos.

4153. Hallar el momento de inercia de un cilindro homogéneo $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $z=\pm h$, de densidad ρ_0, respecto de la recta $x=y=z$.

4154. Hallar el momento de inercia respecto del origen de coordenadas de un cuerpo de densidad ρ_0, limitado por la superficie

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2).$$

4155. Hallar el potencial newtoniano en el punto $P(x, y, z)$ de una bola homogénea $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ de densidad ρ_0.

Indicación. Hacer pasar el eje $O\zeta$ por el punto $P(x, y, z)$.

4156. Hallar el potencial newtoniano en el punto $P(x, y, z)$ de una capa esférica $R_1^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R_2^2$, si su densidad es $\rho = f(r)$, donde f es una función dada y $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

4157. Hallar el potencial newtoniano en el punto $P(0,0,z)$ del cilindro $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, de densidad constante ρ_0.

4158. ¿Con qué fuerza es atraído el punto $P(0, 0, a)$ de masa m por una bola homogénea $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ de masa M?

4159. Hallar la fuerza con la que es atraído el punto $P(0, 0, z)$ de masa unidad por el cilindro homogéneo $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, de densidad ρ_0.

4160. Hallar la fuerza con la que un sector esférico homogéneo de densidad ρ_0 atrae a un punto material de masa unidad, situado en el vértice del sector, si el radio de la superficie esférica es igual a R y el ángulo de la sección axial del sector es igual a 2α.

§ 11. Integrales curvilíneas

1.° *Integral curvilínea de 1.ª especie.* Si $f(x, y, z)$ es una función, definida y continua en los puntos de una curva lisa C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

ds es la diferencial de arco, se tiene

$$\int_C f(x,\ y,\ z)\,ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t),\ y(t),\ z(t))\,\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Una particularidad de esta integral es que no depende la dirección en la curva C.

2.° *Aplicaciones de la integral curvilínea de 1ª especie a la mecánica.* Si $\rho=\rho(x,\ y,\ z)$ es la densidad lineal en el punto variable $(x,\ y,\ z)$ de la curva C, entonces la masa de la curva C es igual a:

$$M=\int_C \varrho(x,\ y,\ z)\,ds.$$

Las coordenadas del centro de gravedad $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ de esta curva se expresan por las fórmulas

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\varrho(x,\ y,\ z)\,ds,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_C y\varrho(x,\ y,\ z)\,ds,\quad z_0=\frac{1}{M}\int_C z\varrho(x,\ y,\ z)\,ds.$$

3.° *Integral curvilínea de 2ª especie.* Si las funciones $P=P(x,\ y,\ z)$, $Q=Q(x,\ y,\ z)$, $R=R(x,\ y,\ z)$ son continuas en los puntos de la curva (1), recorrida en la dirección del crecimiento del parámetro t, se tiene

$$\int_C P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\{P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t)+Q(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t)+ \qquad (2)$$

$$+R(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)\}\,dt.$$

Al cambiar la dirección del recorrido de la curva C esta integral cambia su signo por el contrario. En la mecánica, la integral (2) representa el trabajo de una fuerza variable $\{P,\ Q,\ R\}$, cuyo punto de aplicación describe la curva C.

4.° *Caso de una diferencial total.* Si

$$P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz=du$$

donde $u=u(x,\ y,\ z)$ es una función uniforme en el recinto V, entonces, independientemente de la forma de la curva C, situada completamente en el recinto V, se tiene:

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u(x_2,\ y_2,\ z_2)-u(x_1,\ y_1,\ z_1),$$

donde (x_1, y_1, z_1) es el punto inicial del camino y $(x_2, y_2\ z_2)$ el final. En el caso más simple, en que el recinto V es simplemente conexo y las funciones P, Q, y R admiten derivadas parciales continuas de primer orden, para esto es necesario y suficiente que se cumplan idénticamente las siguientes condiciones

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}:$$

en el recinto V.

Entonces, en el caso más simple de un recinto paralelepipeidal V se puede hallar la función u según la fórmula

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz+c,$$

donde (x_0, y_0, z_0) es un punto fijo del recinto V y c es una constante arbitraria.

En la mecánica, este caso corresponde al trabajo de una fuerza que tiene potencial.

Problemas:

Calcular las siguientes integrales curvilíneas de 1.ª especie.

4221. $\int_C (x+y)\,ds$, donde C es el contorno del triángulo con lo vértices $O\,(0, 0)$, $A\,(1, 0)$ y $B\,(0, 1)$.

4222. $\int_C y^2\,ds$, donde C es un arco de la cicloide

$$x=a\,(t-\sin t),\ y=a\,(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4223. $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, donde C es la curva

$$x=a\,(\cos t+t\sin t),\ y=a\,(\sin t-t\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4224. $\int_C xy\,ds$, donde C es el arco de la hipérbola

$$x=a\,\mathrm{ch}\,t,\ y=a\,\mathrm{sh}\,t \quad (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$, donde C es el arco de la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a$

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, donde C es un circuito convexo limitado p las curvas $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r y φ son las coordenadas polares).

4227. $\int_C |y|\,ds$, donde C es el arco de la lemniscata

$$(x^2+y^2)^2=a^2\,(x^2-y^2).$$

4228. $\int\limits_C x\, ds$, donde C es la parte de la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$ $(k > 0)$ situada en el interior del círculo $r \leqslant a$;

4229. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$.

4230. $\int\limits_C \frac{ds}{y^2}$, donde C es la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Hallar las longitudes de los arcos de las curvas del espacio (los parámetros son positivos):

4231. $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, desde O (0, 0, 0) hasta A (3, 3, 2).

4232. $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, para $0 < t < +\infty$.

4233. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a - x}{a + x}$ desde O (0, 0, 0) hasta $A(x_0, y_0, z_0)$.

4234. $(x - y)^2 = a(x + y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2$ desde O (0, 0, 0) hasta $A(x_0, y_0, z_0)$.

4235. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = tg \frac{z}{c}$ desde O (0, 0, 0) hasta $A(x_0, y_0, z_0)$.

4236. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}\, ch \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = a$ desde el punto A $(a, 0, 0)$ hasta el punto B (x, y, z).

Calcular las integrales curvilíneas de 1ª especie, tomadas a lo largo de las curvas del espacio.

4237. $\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, donde C es la parte de la hélice circular

$$x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = bt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4238. $\int\limits_C x^2\, ds$, donde C es la circunferencia

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0.$$

4239. $\int\limits_C z\, ds$, donde C es la hélice cónica

$$x = t \cos t,\ y = t \sin t,\ z = t \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

4240. $\int\limits_C z\, ds$, donde C es el arco de la curva $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ desde el punto O (0, 0, 0) hasta el punto A $(a, a, a\sqrt{2})$.

4241. Hallar la masa de la curva $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(a \geqslant b > 0;$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, si su densidad lineal en el punto (x, y) es igual a $\rho = |y|$.

4241.1. Hallar la masa del arco de la parábola

$$y^2 = 2px \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right),$$

si su densidad lineal en el punto variable $M(x, y)$ es igual a $|y|$.

4242. Hallar la masa del arco de la curva $x = at$, $y = \frac{a}{2}t^2$ $z = \frac{a}{3}t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, cuya densidad varía según la ley $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

4243. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva homogénea $y = a\, ch\frac{x}{a}$ desde el punto $A(0, a)$ hasta el punto $B(b, h)$.

4244. Determinar el centro de gravedad del arco de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

4244.1. Hallar los momentos estáticos

$$S_y = \int\limits_C x\, ds, \quad S_x = \int\limits_C y\, ds$$

del arco C de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (x \geqslant 0, \ y \geqslant 0)$$

respecto de los ejes de coordenadas.

4244.2. Hallar el momento de inercia de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

respecto de su diámetro.

4244.3. Hallar los momentos polares de inercia

$$I_0 = \int\limits_C (x^2 + y^2)\, ds$$

respecto del punto $O(0, 0)$ para las siguientes líneas: a) para el contorno C del cuadrado $\max\{|x|, |y|\} = a$; b) para el contorno C del triángulo regular con los vértices en coordenadas polares

$$P(a, 0), \ Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right), \ R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right).$$

4244.4. Hallar el radio polar medio de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

es decir, el número r_0 ($r_0 > 0$), definido por la fórmula

$$I_0 = s \cdot r_0^2,$$

donde I_0 es el momento polar de inercia de la astroide respecto del origen de coordenadas (véase 4244.3) y s es la longitud de arco de la astroide.

4245. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del contorno del triángulo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4246. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \quad (-\infty < t \leqslant 0).$$

4247. Hallar los momentos de inercia respecto de los ejes de coordenadas de una espira de la hélice circular

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4248. Calcular la integral curvilínea de 2ª especie

$$\int_{OA} x\, dy - y\, dx,$$

donde O es el origen de coordenadas y el punto A tiene las coordenadas (1, 2), si: a) OA es un segmento de recta; b) OA es una parábola, cuyo eje es Oy; b) OA es una poligonal, compuesta por el segmento OB del eje Ox y del segmento BA que es paralelo al eje Oy.

4249. Calcular

$$\int_{OA} x\, dy + y\, dx$$

para los caminos a), b) y c), indicados en el problema precedente.

Calcular las siguientes integrales curvilíneas de 2ª especie, tomadas a lo largo de las curvas indicadas en dirección del crecimiento del parámetro.

4250. $\int\limits_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, donde C es la parábola

$$y = x^2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

4251. $\int\limits_C (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$, donde C es la curva

$$y = 1 - |1 - x| \quad (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

4252. $\oint\limits_C (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$, donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4253. $\int\limits_C (2a - y)\, dx + x\, dy$, donde C es el arco de la cicloide

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4254. $\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4255. $\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, donde $ABCDA$ es el contorno del cuadrado con los vértices $A\ (1, 0)$, $B\ (0, 1)$, $C\ (-1, 0)$, $D\ (0, -1)$.

4256. $\int\limits_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, donde AB es el segmento de recta que une los puntos $A\ (0, \pi)$ y $B\ (\pi, 0)$.

4257. $\oint\limits_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, donde OmA es el segmento de la parábola $y = x^2$ y OnA es el segmento de la recta $y = x$.

Cerciorándose de que la expresión subintegral es una diferencia total, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

4258. $\int\limits_{(-1, 2)}^{(2, 3)} x\, dy + y\, dx.$

4259. $\int\limits_{(0, 1)}^{(3, -4)} x\, dx + y\, dy.$

4260. $\int\limits_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy.$

4261. $\int\limits_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x - y)\, (dx - dy).$

4262. $\int\limits_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x + y)\, (dx + dy)$, donde $f(u)$ es continua.

4263. $\int\limits_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2}$ a lo largo de caminos que no se corten con el eje Oy.

4264. $\int\limits_{(1, 0)}^{(6, 8)} \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ a lo largo de caminos que no pasen por el origen de coordenadas.

4265. $\int\limits_{(x_1,\, y_1)}^{(x_2,\, y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, donde φ y ψ son funciones continuas.

4266. $\int\limits_{(-2,\, -1)}^{(3,\, 0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy.$

4267. $\int\limits_{(0,\, -1)}^{(1,\, 0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ a lo largo de caminos que no se corten con la recta $y = x$.

4268. $\int\limits_{(1,\, \pi)}^{(2,\, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$ a lo largo de caminos que no se corten con el eje Oy.

4269. $\int\limits_{(0,\, 0)}^{(a,\, b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy).$

4270. Demostrar que, si $f(u)$ es una función continua y C es un circuito cerrado, liso a trozos, entonces

$$\oint\limits_C f(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0.$$

Hallar la función primitiva z, si:

4271. $dz = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy.$

4272. $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$

4273. $dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x+y)^3}.$

4274. $dz = e^x[e^y(x - y + 2) + y]\,dx + e^x[e^y(x - y) + 1]\,dy.$

4275. $dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\,dy.$

4276. $dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4277. Demostrar que para la integral curvilínea es válida la acotación siguiente:

$$\left|\int_C P\,dx + Q\,dy\right| \leqslant LM,$$

donde L es la longitud del camino de integración y $M = \max\sqrt{P^2 + Q^2}$ en el arco C.

4278. Acotar la integral

$$I_R = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Demostrar que $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

Calcular las integrales curvilíneas, tomadas a lo largo de curvas del espacio (se supone que el sistema de coordenadas es de mano derecha):

4279. $\int_C (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, donde C es la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, recorrida en sentido de crecimiento del parámetro.

4280. $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la espira de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, recorrida en sentido de crecimiento del parámetro.

4281. $\int_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, si se observa desde la parte positiva de las x.

4282. $\int_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, donde C es la parte de la curva de Viviani $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ $(z \geqslant 0,\ a > 0)$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, si se observa desde la parte positiva $(x > a)$ del eje Ox.

4283. $\int_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, donde C es el contorno que limita la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, recorrido de tal modo que la parte exterior de esta superficie queda hacia la izquierda.

Hallar las siguientes integrales curvilíneas de las diferenciales totales:

4284. $\int\limits_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,3,\,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz.$

4285. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(6,\,1,\,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$

4286. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, donde el punto (x_1, y_1, z_1) está situado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, y el punto (x_2, y_2, z_2), en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(a > 0, b > 0)$.

4287. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz$, donde φ, ψ, χ, son funciones continuas.

4288. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} f(x + y + z)(dx + dy + dz)$, donde f es una función continua.

4289. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$, donde f es una función continua.

Hallar la función primitiva u si:

4290. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz.$

4291. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz.$

4292. $du = \frac{(x + y - z)\,dx + (x + y - z)\,dy + (x + y + z)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$

4293. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad, cuando un punto de masa m se traslada de la posición (x_1, y_1, z_1) a la posición (x_2, y_2, z_2) (el eje Oz lleva la dirección vertical hacia arriba).

4294. Hallar el trabajo de una fuerza elástica, dirigida hacia el origen de coordenadas, cuya magnitud es proporcional a la elongación del punto material del origen de coordenadas, si este punto describe el cuadrante positivo de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

4295. Hallar el trabajo de la fuerza de gravitación $F=\frac{k}{r^2}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, la cual actúa sobre una masa unidad cuando esta última se desplaza del punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ al punto $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

§ 12. Fórmula de Green

1.° *Relación de la integral curvilínea con la integral doble.* Si C es un circuito cerrado simple, liso a trozos, que encierra un recinto finito simplemente conexo S, recorrido de tal modo que el recinto S quede hacia la izquierda, y las funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden $P'_y(x, y)$ y $Q'_x(x, y)$ en el recinto S y en su frontera, entonces es válida la fórmula de Green

$$\oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (1)$$

La fórmula (1) también es válida para un recinto acotado S, limitad por unos cuantos circuitos simples, si por frontera C del mismo s entiende la unión de todos los circuitos frontera, donde el recorrid se elige de tal modo que el recinto S quede a la izquierda.

2.° *Area de un recinto plano.* El área de una figura limitada por u circuito simple C, liso a trozos, es igual a

$$S=\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx).$$

Mientras no se haya advertido otra cosa, en este párrafo se supon que el circuito cerrado de integración es simple (sin puntos de auto tersección) y que se recorre de tal modo que el recinto encerrado por que no contenga al punto del infinito, queda hacia la izquierda (sent positivo).

Problemas:

4296. Aplicando la fórmula de Green, transformar la integral cur nea

$$I=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$$

donde el circuito C encierra un recinto acotado S.

4297. Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral curvilínea

$$I=\oint\limits_{K}(x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy,$$

donde K es el contorno del triángulo ABC con los vértices $A\,(1,1)$, $B\,(3,2)$, $C\,(2,5)$, recorrido en sentido positivo.

Comprobar el resultado obtenido calculando directamente la integral.

Aplicando la fórmula de Green, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

4298. $\oint\limits_{C} xy^2\,dy-x^2y\,dx$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$.

4299. $\oint\limits_{C}(x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, donde C es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4300. $\oint\limits_{C} e^x(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy$, donde C es el circuito que encierra el recinto $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$, recorrido en sentido positivo.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

4302. ¿Cuánto se diferencian entre sí las integrales curvilíneas

$$I_1=\int\limits_{AmB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$$

y

$$I_2=\int\limits_{AnB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,$$

donde AmB es la recta que une los puntos $A\,(1,1)$ y $B\,(2,6)$, y AnB es la parábola cuyo eje es vertical y pasa por los mismos puntos A y B y por el origen de coordenadas?

4303. Calcular la integral curvilínea

$$\int\limits_{AmO}(e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy,$$

donde AmO es la semicircunferencia superior $x^2+y^2=ax$, recorrida desde el punto $A\,(a,0)$ hasta el punto $O\,(0,0)$.

Indicación. Completar el trayecto AmO hasta cerrarlo, mediante el segmento rectilíneo OA del eje Ox.

4304. Calcular la integral curvilínea

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)e^x - m]\,dy,$$

donde $\varphi(y)$ y $\varphi'(y)$ son funciones continuas y AmB es un trayecto arbitrario que une los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el cual, junto con el segmento AB encierra una figura $AmBA$ de área S.

4305. Determinar dos funciones con diferenciales continuas $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, de tal modo que la integral curvilínea

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta)\,dx + Q(x + \alpha, y + \beta)\,dy$$

para cualquier circuito cerrado C no dependa de las constantes α y β.

4306. ¿A qué condición tiene que satisfacer una función diferenciable $F(x, y)$ para que la integral curvilínea

$$\int_{AmB} F(x, y)(y\,dx + x\,dy)$$

no dependa de la forma del camino de integración?

4307. Calcular

$$I = \oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

donde C es un circuito cerrado simple que no pasa por el origen de coordenadas, recorrido en sentido positivo.

Indicación. Examinar dos casos: 1) el origen de coordenadas está situado fuera del circuito; 2) el circuito C encierra al origen de coordenadas.

Calcular las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas, mediante integrales curvilíneas:

4308. La elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4309. La astroide $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4310. La parábola $(x + y)^2 = ax$ $(a > 0)$ y el eje Ox.

4311. El lazo del folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.
Indicación. Hacer $y = tx$.

4312. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.
Indicación. Hacer $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

4313. La curva $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ y los ejes de coordenadas.

4314. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0,\ n > 0,\ m > 0).$$

4315. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ n > 0)$$

y los ejes de coordenadas.

Indicación. Hacer $\frac{x}{a} = \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $\frac{y}{b} = \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$.

4316. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0, b > 0, n > 1)$ y los ejes de coordenadas.

4317. Calcular el área que encierra el lazo de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ n > 0).$$

4318. Se llama epicicloide la curva que describe un punto de una circunferencia en movimiento de radio r, que rueda sin deslizar por la parte exterior de una circunferencia inmóvil de radio R.

Hallar el área de la figura limitada por la epicicloide, suponiendo que la razón $\frac{R}{r} = n$ es un número entero $(n \geqslant 1)$.

Estudiar el caso particular $r = R$ (la cardioide).

4319. Se llama hipocicloide la curva que describe un punto de una circunferencia en movimiento de radio r, que rueda sin deslizar por la parte interior de una circunferencia inmóvil de radio R. Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide, suponiendo que $\frac{R}{r} = n$ es un número entero $(n \geqslant 2)$.

Estudiar el caso particular $r = \frac{R}{4}$ (la astroide).

4320. Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ax$ recortada por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4320.1. Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de un circuito cerrado C, situado en el semiplano superior $y \geqslant 0$, es igual a

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. Calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2},$$

si $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ y el circuito cerrado simple C encierra al origen de coordenadas $(ad - bc \neq 0)$.

4322. Calcular la integral I (véase el problema anterior), si $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, y el circuito simple C encierra al origen de coordenadas; además, las curvas $\varphi(x, y) = 0$ y $\psi(x, y) = 0$ tienen unos cuantos puntos simples de intersección en el interior del circuito C.

4323. Demostrar que, si C es un circuito cerrado y l es una dirección arbitraria, entonces

$$\oint_C \cos(l, n)\, ds = 0,$$

donde n es la normal exterior al circuito C.

4324. Hallar el valor de la integral

$$I = \oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)]\, ds,$$

donde C es una curva cerrada simple que limita un recinto finito S, y n es la normal exterior a la misma.

4325. Hallar

$$\lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \cdot n)\, ds,$$

donde S es la figura limitada por un circuito C que encierra al punto (x_0, y_0), $d(S)$ es el diámetro del recinto S, n es el vector unitario de la normal exterior al circuito C y $F\{X, Y\}$ es un vector con diferencial continua en $S + C$.

§ 13. Aplicaciones físicas de las integrales curvilíneas

4326. ¿Con qué fuerza atrae una masa M, distribuida uniformemente en la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$, a un punto material de masa m que ocupa la posición $(0, 0)$?

4327. Calcular el potencial logarítmico de simple capa

$$u(x, y) = \oint_C \varkappa \ln \frac{1}{r}\, ds,$$

donde $\varkappa = \text{const}$ es la densidad, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ y el circuito C es la circunferencia $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Calcular en coordenadas polares ρ y φ los potenciales logarítmicos de simple capa

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi \quad \text{y} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi,$$

donde r es la distancia del punto (ρ, φ) al punto variable $(1, \psi)$ y m es un número natural.

4329. Calcular la integral de Gauss

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds,$$

donde $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ es la longitud del vector r que une el punto $A(x, y)$ con el punto variable $M(\xi, \eta)$ de un circuito cerrado liso simple C, (r, n) es el ángulo formado por el vector r y la normal exterior n a la curva C en su punto M.

4330. Calcular en coordenadas polares ρ y φ los potenciales logarítmicos de doble capa

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(r, n)}{r}\, d\psi \quad \text{y} \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(r, n)}{r}\, d\psi,$$

donde r es la distancia del punto $A(\rho, \varphi)$ al punto variable $M(1, \psi)$, (r, n) es el ángulo formado por la dirección $AM = r$ y el radio $OM = n$, trazado desde el punto $O(0, 0)$, y m es un número natural.

4331. Una función dos veces diferenciable $u = u(x, y)$ se llama armónica, si $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Demostrar que u es una función armónica si, y sólo si

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0,$$

donde C es un circuito cerrado arbitrario y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada respecto de la normal exterior a este circuito.

4332. Demostrar que

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\iint_S u\, \Delta u\, dx\, dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds,$$

donde el circuito liso C limita un recinto finito S.

4333. Demostrar que una función, que es armónica en el interior de un recinto finito S y en su frontera, se determina unívocamente por sus valores en el circuito C (véase el problema 4332).

4334. Demostrar la segunda fórmula de Green en el plano

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

donde el circuito liso C limita un recinto finito S y $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en dirección de la normal exterior a C.

4335. Aplicando la segunda fórmula de Green, demostrar que si $u = u(x, y)$ es una función armónica en un recinto cerrado finito S, se tiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

donde C es la frontera del recinto S, n es la dirección de la normal exterior al circuito C, (x, y) es un punto interior del recinto S y $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ es la distancia del punto (x, y) al punto variable (ξ, η) del circuito C.

Indicación. Recortar el punto (x, y) del recinto S junto con un entorno circular infinitésimo del mismo y aplicar la segunda fórmula de Green a la parte restante del recinto S.

4336. Demostrar el teorema de la media para una función armónica $u(M)=u(x,y)$:

$$u(M)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)\,ds,$$

donde C es una circunferencia de radio R con el centro en el punto M.

4337. Demostrar que una función armónica $u(x,y)$ en un recinto cerrado y acotado, que no es constante en este recinto, no puede alcanzar sus valores máximo y mínimo absoluto en un punto interior de este recinto (principio del valor máximo).

4338. Demostrar la fórmula de Riemann

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy=\oint_C P\,dx+Q\,dy,$$

donde

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv\cdot$$

(a, b, c son constantes). P y Q son unas funciones determinadas y el circuito C limita un recinto finito S.

4339. Sean $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$ las componentes de la velocidad del flujo de un líquido en régimen permanente. Determinar la cantidad de líquido que sale en una unidad de tiempo de un recinto S limitado por un circuito C (o sea, la diferencia entre las cantidades de líquido que sale y que entra). ¿A qué ecuación satisfacen las funciones u y v, si el líquido es incompresible y en el recinto S no hay manantiales y sumideros?

4340. Según la ley de Biot y Savart, una corriente eléctrica i que recorre un elemento de conductor ds, engendra en el punto del espacio $M(x,y,z)$ un campo magnético de intensidad

$$dH=ki\frac{(r\times ds)}{r^3},$$

donde r es el vector que une el elemento ds con el punto M y k es el coeficiente de proporcionalidad.

Hallar las proyecciones H_x, H_y, H_z de la intensidad del campo magnético H en el punto M para el caso de un conductor cerrado C.

§ 14. Integrales de superficie

1.° *Integral de superficie de primera especie.* Si S es una superficie bilateral lisa a trozos

$$x=x(u,\ v)\quad y=y(u,\ v)\quad z=z(u,\ v)\quad ((u,\ v)\in\Omega) \tag{1}$$

y $f(x, y, z)$ es una función, definida y continua en los puntos de la superficie S, entonces

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,dS=\iint_\Omega f(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{2}$$

donde

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

En particular, si la ecuación de la superficie S tiene la forma

$$z=z(x,\ y)\quad ((x,\ y)\in\sigma),$$

donde $z(x, y)$ es una función uniforme con diferencial continua, se tiene

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,dS=\iint_\sigma f(x,\ y,\ z(x,\ y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Esta integral no depende de la cara de la superficie S elegida.

Si se considera que $f(x, y, z)$ es la densidad de la superficie S en el punto (x, y, z), entonces la integral (2) representa la masa de esta superficie.

2.° *Integral de superficie de 2ª especie.* Si S es una superficie bilateral lisa, S^+ es la cara de la misma que se caracteriza por la dirección de la norma $n\ \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P=P(x, y, z)$ $Q=Q(x, y, z)$ $R=R(x, y, z)$ son tres funciones definidas y continuas en la superficie S, entonces

$$\iint_{S+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS. \quad (3)$$

Si la superficie S viene dada en forma paramétrica (1), entonces los cosenos directores de la normal n se determinan por las fórmulas:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

donde

$$A = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}, \quad B = \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)}, \quad C = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)},$$

y el signo ante el radical se elige de un modo adecuado.

Al pasar a la otra cara S^- de la superficie S la integral (3) cambia su signo por opuesto.

Problemas:

4341. ¿Cuánto se diferencian entre sí las integrales de superficie

$$I_1 = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$$

y

$$I_2 = \iint\limits_P (x^2 + y^2 + z^2)\, dP,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y P es la superficie del octaedro $|x| + |y| + |z| = a$, incrito en esta esfera?

4342. Calcular

$$\iint\limits_S z\, dS,$$

donde S es la parte de la superficie $x^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$, recortada por la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Calcular las siguientes integrales de superficie de 1ª especie:

4343. $\iint\limits_S (x + y + z)\, dS$, donde S es la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geqslant 0.$$

4344. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS$, donde S es la frontera del cuerpo

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1.$$

4345. $\iint\limits_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, donde S es la frontera del tetraedro

$$x + y + z \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

4346. $\iint\limits_S |xyz|\, dS$, donde S es la parte de la superficie $z = x^2 + y^2$ recortada por el plano $z = 1$.

4347. $\iint\limits_S \frac{dS}{h}$, donde S es la superficie del elipsoide y h es la distancia del centro del elipsoide al plano que es tangente al elemento dS de la superficie del elipsoide.

4348. $z\,dS$, donde S es la parte de la superficie del helicoide

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v\,(0 < u < a;\ 0 < v < 2\pi).$$

4349. $\iint\limits_S z^2 dS$, donde S es la parte de la superficie del cono $(0 \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ y α es una constante $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$, donde S es la parte de la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, recortada por la superficie

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

4351. Demostrar la fórmula de Poisson

$$\iint\limits_S f(ax + by + cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\,du,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4352. Hallar la masa de la cápsula parabólica

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

cuya densidad varía según la ley $\rho = z$.

4352.1. Hallar la masa de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (z \geqslant 0),$$

cuya densidad en cada uno de sus puntos $M(x, y, z)$ es igual a $\frac{z}{a}$.

4352.2. Hallar los momentos estáticos de la lámina triangular homogénea

$$x + y + z = a \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

respecto de los planos coordenados.

4353. Calcular el momento de inercia respecto del eje Oz de la cápsula homogénea esférica

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (z \geqslant 0)$$

de densidad ρ_0.

4354. Calcular el momento de inercia de la cápsula homogénea cónica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant b)$$

de densidad ρ_0 respecto de la recta

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}.$$

4355. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la parte de la superficie homogénea

$$z=\sqrt{x^2+y^2},$$

recortada por la superficie $x^2+y^2=ax$.

4356. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie homogénea

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad (x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x+y \leqslant a).$$

4356.1. Hallar los momentos polares de inercia

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$$

de las siguientes superficies S:

a) la superficie del cubo $\max\{|x|,|y|,|z|\}=a$;

b) la superficie total del cilindro $x^2+y^2 \leqslant R^2$; $0 \leqslant z \leqslant H$.

4356.2. Hallar los momentos de inercia de la lámina triangular

$$x+y+z=1 \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

respecto de los planos coordenados.

4357. ¿Con qué fuerza atrae la superficie cónica truncada homogénea

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0<b \leqslant r \leqslant a)$$

de densidad ρ_0 a un punto material de masa m situado en el vértice de esta superficie?

4358. Hallar el potencial de la superficie esférica homogénea $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, de densidad ρ_0, en el punto $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, es decir, calcular la integral

$$u = \iint\limits_S \frac{\rho_0\, dS}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

4359. Calcular

$$F(t) = \iint\limits_{x+y+z=t} f(x, y, z)\, dS,$$

donde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1; \\ 0 \quad\quad , & \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

Construir la gráfica de la función $u = F(t)$.

4360. Calcular la integral

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)\, dS,$$

donde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si} \quad z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0 \quad , & \text{si} \quad z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

4361. Calcular la integral

$$F(x, y, z, t) = \iint\limits_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS,$$

donde S es la esfera variable

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

y

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{si} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

suponiendo que

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0.$$

Calcular las siguientes integrales de superficie de 2ª especie:

4362. $\iint\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$, donde S es la cara exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4363. $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz + g(y)\,dz\,dx + h(z)\,dx\,dy$, donde $f(x), g(y)$, $h(z)$ son funciones continuas y S es la cara exterior de la superficie del paralelepípedo $0\leqslant x\leqslant a; 0\leqslant y\leqslant b; 0\leqslant z\leqslant c$.

4364. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$.

4365. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4366. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la esfera $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

§ 15. Fórmula de Stokes

Si $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ son funciones con diferenciales continuas y C es un circuito cerrado simple y liso a trozos, que limita una superficie bilateral finita S, lisa a trozos, entonces se verifica la fórmula de Stokes:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie S, cuya dirección es tal que respecto de ésta el recorrido del circuito C se efectúa en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (para un sistema de coordenadas de mano derecha).

Problemas:

4367. Aplicando la fórmula de Stokes, calcular la integral curvilínea

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

Comprobar el resultado mediante un cálculo directo.

4368. Calcular la integral

$$\int_{AmB} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

tomada sobre el arco de la hélice circular

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

desde el punto $A\ (a, 0, 0)$ hasta el punto $B\ (a, 0, h)$.

Indicación. Completar la curva AmB con un segmento rectilíneo y aplicar la fórmula de Stokes.

4369. Sea C un circuito cerrado, situado en el plano

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal al plano), que limita una lámina S.

Hallar

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

donde el recorrido del circuito es en sentido positivo.

Aplicando la fórmula de Stokes, calcular las integrales:

4370. $\oint_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$,

donde C es la elipse $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, recorrida en sentido del crecimiento del parámetro t.

4371. $\oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, donde C es la elipse $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > 0, h > 0)$ recorrido en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

4372. $\oint\limits_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz,$

donde C es la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R,$ $z > 0)$, recorrida de tal modo que el recinto menor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, limitado por la misma quede hacia la izquierda.

4373. $\oint\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz,$

donde C es la sección de la superficie del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ efectuada por el plano $x + y + z = \frac{3}{2}a$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

4374. $\oint\limits_C y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz,$

donde C es la curva cerrada $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$ recorrida en el sentido del crecimiento del parámetro t.

4375. Demostrar que la función

$$W(x, y, z) = ki\iint\limits_S \frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS \qquad (k = \text{const}),$$

donde S es una superficie limitada por el circuito C, n es la normal a la superficie S y r es el radio vector que une un punto del espacio $M(x, y, z)$ con el punto variable $A(\xi, \eta, \zeta)$ del circuito C, representa el potencial del campo magnético H, engendrado por la corriente i que recorre el circuito C (véase el problema 4340).

§ 16. Fórmula de Ostrogradski

Si S es una superficie lisa a trozos, que limita un volumen V, y $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ son funciones continuas junto con sus derivadas parciales de 1$^{\text{er}}$ orden en el recinto $V + S$, entonces se verifica la fórmula de Ostrogradski:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

Problemas:

Aplicando la fórmula de Ostrogradski, transformar las siguientes integrales de superficie, si la superficie lisa S limita un volumen finito y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie S.

4376. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy.$

4377. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx+xy\,dx\,dy.$

4378. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS.$

4380. $$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

4381. Demostrar que si S es una superficie cerrada simple y l es una dirección constante arbitraria, entonces

$$\iint\limits_S \cos(n, l)\,dS=0,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

4382. Demostrar que el volumen del cuerpo limitado por una superficie S, es igual a

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

4383. Demostrar que el volumen de un cono limitado por una superficie cónica lisa $F(x, y, z)=0$ y el plano $Ax+By+Cz+D=0$, es igual a

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

donde S es el área de la base del cono, situada en el plano dado y H es la altura.

4384. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = \pm c$ y

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v,\\ y &= a\cos u\sin v - b\sin u\cos v,\\ z &= c\sin u. \end{aligned}\right\}$$

4385. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = -u + a\cos v\quad (u \geqslant 0)$$

y los planos: $x = 0$ y $z = 0$ $(a > 0)$.

4385.1. Hallar el volumen del cuerpo limitado por el toro

$$\left.\begin{aligned} x &= (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y &= (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z &= a\sin\psi \end{aligned}\right\}$$

$$(0 < a \leqslant b).$$

4386. Demostrar la fórmula

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,\ y,\ z,\ t)\,dx\,dy\,dz\right\} =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,\ y,\ z,\ t)\,dS + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\quad (t > 0).$$

Aplicando la fórmula de Ostrogradski, calcular las siguientes integrales de superficie:

4387. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy,$

donde S es la cara exterior de la frontera del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

4388. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$,

donde S es la cara exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4389. $\iint\limits_S (x - y + z)\,dy\,dz + (y - z + x)\,dz\,dx +$

$$+ (z - x + y)\,dx\,dy,$$

donde S es la cara exterior de la superficie

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1.$$

4390. Calcular

$$\iint\limits_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS,$$

donde S es la parte de la superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a esta superficie.

Indicación. Adjuntar la parte del plano

$$z=h, \quad x^2+y^2 \leqslant h^2.$$

4391. Demostrar la fórmula

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint\limits_S \cos(r, n)\, dS,$$

donde S es una superficie cerrada que limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S en el punto variable de la misma (ξ, η, ζ), $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ y r es el radio vector que va del punto (x, y, z) al punto (ξ, η, ζ).

4392. Calcular la integral de Gauss

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\cos(r, n)}{r^2}\, dS,$$

donde S es una superficie simple cerrada lisa que limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S en el punto de la misma (ξ, η, ζ), r es el radio vector que une el punto (x, y, z) con el punto (ξ, η, ζ) y $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Examinar dos casos:

a) la superficie S no encierra al punto (x, y, z),

b) la superficie S encierra al punto (x, y, z).

4393. Demostrar que, si

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

y S es una superficie lisa que limita un cuerpo finito V, entonces se verifican las siguientes fórmulas:

a) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \Delta u\, dx\, dy\, dz;$

b) $$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\iiint_V u\,\Delta u\,dx\,dy\,dz,$$

donde u es una función continua junto con sus derivadas parciales hasta el segundo orden inclusive en el recinto $V+S$ y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada respecto de la normal exterior a la superficie S.

4394. Demostrar la segunda fórmula de Green en el espacio

$$\iiint_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dx\,dy\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}dS,$$

donde el volumen V está limitado por la superficie S, n lleva la dirección de la normal exterior a la superficie S y las funciones $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$ son dos veces diferenciables en el recinto $V+S$.

4395. Una función $u=u(x, y, z)$, que admite derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive en un recinto, se llama armónica en el mismo, si

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Demostrar que, si u es una función armónica en un recinto cerrado finito V limitado por una superficie lisa S, entonces se verifican las fórmulas:

a) $$\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=0;$$

b) $$\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

Aplicando la fórmula b), demostrar que una función armónica en un recinto V se determina unívocamente por sus valores en la frontera S.

4396. Demostrar que, si una función $u=u(x, y, z)$ es armónica en un recinto cerrado finito V limitado por una superficie lisa S, entonces

$$u(x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u\frac{\cos(r, n)}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS,$$

donde r es el radio vector que va del punto interior (x, y, z) del recinto V al punto variable (ξ, η, ζ) de la superficie S. $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, n es el vector de la normal exterior a la superficie S en el punto (ξ, η, ζ).

4397. Demostrar que, si $u=u(x, y, z)$ es una función armónica en el interior de una esfera S de radio R con el centro en el punto (x_0, y_0, z_0), entonces

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\, dS$$

(teorema del valor medio).

4398. Demostrar que, si una función $u=u(x, y, z)$ es continua en un recinto cerrado y acotado V y es armónica en el interior del mismo, entonces no puede alcanzar sus valores máximo y mínimo absolutos en un punto interior del recinto, a no ser que la función sea idénticamente constante (principio del máximo).

4399. Un cuerpo V está totalmente sumergido en un líquido. Basándose en la ley de Pascal, demostrar que la fuerza de empuje que experimenta el líquido es igual al peso de un volumen de agua igual al volumen del cuerpo, y va dirigida verticalmente hacia arriba (ley de Arquímedes).

4400. Sea S_t una esfera variable $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ y $f(\xi, \eta, \zeta)$ una función continua. Demostrar que la función

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\, dS_t$$

satisface a la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

y a las condiciones iniciales: $u\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x, y, z).$

Indicación. Expresar la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ en forma de una integral triple.

§ 17. Elementos de la teoría de campo

1.° *Gradiente*. Si $u(r)=u(x, y, z)$, donde $r=xi+yj+zk$, es un campo escalar con diferencial continua, entonces se llama gradiente del mismo al vector

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k$$

o, abreviadamente, grad $u = \nabla u$, donde $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$.

El gradiente del campo u en un punto dado (x, y, z) lleva la dirección de la normal a la superficie de nivel $u(x, y, z) = C$ que pasa por este punto. Este vector, en cada punto, es igual en valor absoluto a

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

y su dirección, coincide con la de la velocidad máxima de variación de la función u.

La derivada del campo u en una dirección $l\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ es igual a:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2.° *Divergencia y rotor de un campo.* Si

$$a(r) = a_x(x, y, z)\,i + a_y(x, y, z)\,j + a_z(x, y, z)\,k$$

es un campo vectorial con diferencial continua, entonces, el escalar

$$\operatorname{div} a = \nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

se llama divergencia de este campo.

El vector

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

se denomina rotor del campo o rotacional.

3.° *Flujo de un valor a través de una superficie.* Si el vector $a(r)$ engendra un campo vectorial en un recinto Ω, se llama flujo del vector a través de la superficie dada S, situada en Ω, en una dirección determinada, caracterizada por el vector normal $n\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, a la integral

$$\iint_S a_n\, dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\, dS,$$

donde $a_n = an$ es la proyección normal del vector. La fórmula de Ostrogradski en forma vectorial es:

$$\oiint_S a_n\, dS = \iiint_V \operatorname{div} a\, dx\, dy\, dz,$$

donde S es la superficie que limita al volumen V y n es el vector unitario de la normal exterior a la superficie S.

4.° *Circulación de un vector.* Se llama integral lineal del vector a (r), tomada sobre una curva C (trabajo del campo), al número

$$\int_C a\,dr = \int_C a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz.$$

Si el circuito C es cerrado, entonces la integral lineal se llama circulación del vector a a lo largo del circuito C.

En forma vectorial, la fórmula de Stokes tiene la forma

$$\oint_C a\,dr = \iint_S (\mathrm{rot}\ a)_n\,dS,$$

donde C es un circuito cerrado que representa el borde de la superficie S, donde tiene que elegirse el sentido de la normal n a la superficie S de tal modo que, para un observador situado en la superficie S, con la cabeza en dirección de la normal, el recorrido del circuito C se efectúe en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (para un sistema de coordenadas de mano derecha).

5.° *Campo potencial.* Un campo vectorial a (r) que es el gradiente de un escalar u:

$$\mathrm{grad}\ u = a,$$

se llama potencial, y u se llama potencial del campo.

Si el potencial u es una función uniforme, se tiene

$$\int_{AB} a\,dr = u(B) - u(A).$$

En particular, en este caso la circulación del vector a es igual a cero.

La condición necesaria y suficiente para que un campo a, dado en un recinto superficial simplemente conexo, sea potencial, es que se cumpla la condición rot $a = 0$, o sea, que el campo sea irrotacional.

Problemas:

4401. Hallar el módulo y la dirección del gradiente del campo $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ en los puntos: a) O (0, 0, 0); b) A (1, 1, 1); c) B (2, 0, 1). ¿En qué punto el gradiente del campo es igual a cero?

4401.1. Sea

$$u = xy - z^2.$$

Hallar el módulo y la dirección del gradiente $\operatorname{grad} u$ en el punto $M(-9, 12, 10)$. ¿A qué es igual la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en dirección de la bisectriz del ángulo coordenado xOy?

4402. ¿En qué puntos del espacio $Oxyz$ el gradiente del campo

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

a) es perpendicular al eje Oz;
b) es paralelo al eje Oz;
c) es igual a cero?

4403. Se considera el campo escalar

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. ¿En qué puntos del espacio $Oxyz$ se verifica la igualdad

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

4404. Construir la superficie de nivel del campo escalar

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

Hallar la superficie de nivel que pasa por el punto $M(9, 12, 28)$. ¿A qué es igual el máx u en el recinto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$?

4405. Hallar el ángulo φ formado por los gradientes del campo

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

en los puntos $A(1, 2, 2)$ y $B(-3, 1, 0)$.

4406. Se considera el campo escalar

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Construir la superficie de nivel y la superficie de igual módulo del gradiente del campo.
Hallar inf u sup u, inf $|\operatorname{grad} u|$, sup $|\operatorname{grad} u|$ en el recinto $1 < z < 2$.

4407. Con una precisión hasta de infinitésimos de orden superior, hallar la distancia en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) entre dos superficies de nivel infinitamente próximas

$$u(x, y, z) = c \quad \text{y} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c,$$

donde $u(x_0, y_0, z_0) = c$ (grad $u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$).

4408. Demostrar las fórmulas:

a) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c es una constante);
b) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c es una constante);
c) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
d) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
e) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;
f) $\operatorname{grad} f'(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Calcular: a) grad r; b) grad r^2; c) grad $\frac{1}{r}$, si $r = xi + yj + zk$

4410. Hallar grad $f(r)$, si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. Hallar grad (cr), si c es un vector constante y r es el radio vector desde el origen de coordenadas.

4412. Hallar grad $\{ |c \times r|^2 \}$ (c es un vector constante).

4413. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

4414. Demostrar la fórmula

$$\nabla^2 (uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v,$$

donde

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. Demostrar que, si la función $u = u(x, y, z)$ es diferenciable en un recinto convexo Ω y $|\operatorname{grad} u| \leqslant M$, donde M es una constante, entonces, para cualesquiera puntos A, B de Ω, se tiene:

$$|u(A) - u(B)| \leqslant M\varrho(A, B),$$

donde $\varrho(A, B)$ es la distancia entre los puntos A y B.

4415.1. Expresar el grad u para una función $u = u(x, y, z)$: a) en coordenadas cilíndricas; b) en coordenadas esféricas.

4416. Hallar la derivada del campo $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en un punto dado $M(x, y, z)$ en dirección del radio vector $\boldsymbol{r}$ de este punto.

¿En qué caso esta derivada es igual al módulo del gradiente?

4417. Hallar la derivada del campo $u = \frac{1}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en la dirección $\boldsymbol{l}$ $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

¿En qué caso esta derivada es igual a cero?

4418. Hallar la derivada del campo $u = u(x, y, z)$ en la dirección del gradiente del campo $v = v(x, y, z)$.

¿En qué caso esta derivada es igual a cero?

4419. Expresar el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \operatorname{grad} u,$$

mediante los versores de la base, si

$$u = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

4420. Hallar las líneas de fuerza del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}.$$

4421. Efectuando un cálculo directo, demostrar que la divergencia de un vector $\boldsymbol{a}$ no depende del sistema rectangular de coordenadas elegido.

4422. Demostrar que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{V} \iint_S a_n \, dS,$$

donde S es una superficie cerrada que encierra al punto M y limita un volumen V, $\boldsymbol{n}$ es la normal exterior a la superficie S, $d(S)$ es el diámetro de la superficie S.

4422.1. Hallar la divergencia del campo

$$\boldsymbol{a} = \frac{-\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

en el punto $M(3, 4, 5)$. ¿A qué es igual, aproximadamente, el flujo Π del vector a a través de una esfera infinitésima $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\epsilon^2$?

4423. Hallar

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. Demostrar que

a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$; b) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\operatorname{grad}u$

(c es un vector constante, u es un escalar);

c) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}u$.

4425. Hallar $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$.

4426. Hallar $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. ¿En qué caso $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$?

4427. Calcular: a) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$; b) $\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

4428. Calcular $\operatorname{div}[f(r)\,\boldsymbol{c}]$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante.

4429. Hallar $\operatorname{div}[f(r)\,\boldsymbol{r}]$. ¿En qué caso la divergencia de este vector es igual a cero?

4430. Hallar: a) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$; b) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

4431. Un fluido que llena el espacio gira alrededor del eje Oz en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj con una velocidad angular ω. Hallar la divergencia del vector de la velocidad v y del vector de la aceleración w en el punto $M(x, y, z)$ del espacio en un instante dado de tiempo.

4432. Hallar la divergencia de un campo de fuerzas de gravitación engendrado por un sistema finito de centros de atracción.

4433. Hallar la expresión de la divergencia de un vector del plano $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r, \varphi)$ en coordenadas polares r y φ.

4434. Expresar la $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(x, y, z)$ en coordenadas curvilíneas ortogonales u, v, w, si:

$$x=f(u, v, w), \quad y=g(u, v, w), \quad z=h(u, v, w).$$

Como un caso particular, obtener la expresión de la $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Indicación. Examinar el flujo del vector a a través de un paralelepípedo infinitésimo, limitado por las superficies

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad w = \text{const}.$$

4435. Demostrar que:

a) $\operatorname{rot}(a+b) = \operatorname{rot} a + \operatorname{rot} b$;
b) $\operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a + \operatorname{grad}(u \times a)$.

4436. Hallar: a) $\operatorname{rot} r$; b) $\operatorname{rot}[f(r)\, r]$.

4436.1. Hallar el módulo y la dirección del rot a en el punto $M(1, 2, -2)$, si

$$a = \frac{y}{z} i + \frac{z}{x} j + \frac{x}{y} k.$$

4437. Hallar: a) $\operatorname{rot} cf(r)$. b) $\operatorname{rot}[c \times f(r)\, r]$ (c es un vector constante).

4438. Demostrar que $\operatorname{div}(a \times b) = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b$.

4439. Hallar: a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a)$.

4440. Un fluido que llena el espacio gira alrededor del eje $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ con una velocidad angular constante ω. Hallar el rotor del vector de la velocidad lineal v en un punto del espacio $M(x, y, z)$ en un instante dado.

4440.1. Hallar la expresión del rotor de un vector del plano $a = a(r, \varphi)$ en coordenadas polares r y φ.

4440.2. Expresar $\operatorname{rot} a(x, y, z)$

a) en coordenadas cilíndricas;
b) en coordenadas esféricas.

4441. Hallar el flujo del vector r:
a) a través de la superficie lateral del cono $x^2 + y^2 \leqslant z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$;
b) a través de la base de este cono.

4442. Hallar el flujo del vector $a = iyz + jxz + kxy$:
a) a través de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$;
b) a través de la superficie total de este cilindro.

4443. Hallar el flujo del radio vector r a través de la superficie

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant 1).$$

4444. Hallar el flujo del vector $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ a través del octante positivo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4445. Hallar el flujo del vector $a = yi + zj + xk$ a través de la superficie total de la pirámide, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

Comprobar el resultado, aplicando la fórmula de Ostrogradski.

4445.1. Hallar el flujo del vector

$$a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$$

a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4446. Demostrar que el flujo de un vector a a través de una superficie S, dada por la ecuación $r = r(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$, es igual a

$$\iint_S a_n dS = \iint_\Omega \left(a \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} \right) du\, dv,$$

donde $a_n = an$ y n es el vector unitario de la normal a la superficie S.

4447. Hallar el flujo del vector $a = m \frac{r}{r^3}$ (m es una constante) a través de una superficie cerrada S que encierre al origen de coordenadas.

4448. Hallar el flujo del vector

$$a(r) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right),$$

donde e_i son constantes y r_i son las distancias de los puntos M_i (los manantiales) al punto variable $M(r)$, a través de una superficie cerrada S que encierra a los puntos M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

4449. Demostrar que

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u \, dx\, dy\, dz,$$

donde la superficie S limita al cuerpo V.

4450. La cantidad de calor que penetra en un campo de temperaturas u en una unidad de tiempo a través de un elemento de superficie dS. es igual a

$$dQ = -kn \operatorname{grad} u \, dS,$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica interior y n es el vector unitario de la normal a la superficie S. Determinar la cantidad de calor acumulada por el cuerpo V en una unidad de tiempo. Sirviéndose de la velocidad de crecimiento de la temperatura, deducir la ecuación a la que satisface la temperatura del cuerpo (ecuación de propagación del calor).

4451. Un fluido incompresible en movimiento ocupa un volumen V. Suponiendo que en el recinto V no hay manantiales y sumideros, deducir la ecuación de continuidad

$$\frac{d\varrho}{dt}+\operatorname{div}(\varrho v)=0.$$

donde $\varrho=\varrho(x, y, z)$ es la densidad del fluido, v es el vector de la velocidad, t es el tiempo.

Indicación. Examinar el flujo del fluido a través de un volumen arbitrario ω contenido en V.

4452. Hallar el trabajo del vector $a=r$ a lo largo del arco de hélice

$$r=ia\cos t+ja\sin t+kbt \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4452.1. Hallar el trabajo del campo

$$a=\frac{1}{y}i+\frac{1}{z}j+\frac{1}{x}k$$

a lo largo del segmento rectilíneo que une los puntos $M(1, 1, 1)$ y $N(2, 4, 8)$.

4452.2. Hallar el trabajo del campo

$$a=ie^{y-z}+je^{z-x}+ke^{x-y}$$

a lo largo del segmento rectilíneo que une los puntos $O(0, 0, 0)$ y $M(1, 3, 5)$.

4452.3. Hallar el trabajo del campo

$$a=(y+z)\,i+(2+x)\,j+(x+y)\,k$$

a lo largo del arco más corto de la circunferencia mayor de la esfera $x^2+y^2+z^2=25$ que une los puntos $M(3, 4, 0)$ y $N(0, 0, 5)$.

4453. Hallar el trabajo del vector $a=f(r)\,r$, donde f es una función continua, a lo largo de un arco AB.

4454. Hallar la circulación del vector

$$a=-yi+xj+ck$$

(c es una constante): a) a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; b) a lo largo de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4455. Hallar la circulación Γ del vector $a = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$ a lo largo de un circuito C en dos casos: a) C no encierra al eje Oz; b) C encierra al eje Oz.

4455.1. Se considera el campo vectorial

$$a = \frac{y}{\sqrt{z}}i - \frac{x}{\sqrt{z}}j + \sqrt{xy}\,k.$$

Calculando rot a en el punto $M(1, 1, 1)$, hallar aproximadamente la circulación Γ del campo a lo largo de la circunferencia infinitésima

$$\left.\begin{array}{r}(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2, \\ (x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0,\end{array}\right\}$$

donde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4456. El flujo de un fluido en el plano en régimen permanente se caracteriza por el vector de la velocidad

$$w = u(x, y)\,i + v(x, y)\,j.$$

Determinar: 1) la cantidad de fluido Q que penetra a través de un circuito cerrado C que limita un recinto S (consumo de fluido); 2) la circulación Γ del vector de la velocidad a lo largo del circuito C. ¿A qué ecuaciones satisfacen las funciones u y v, si el fluido es incompresible y el flujo es irrotacional?

4457. Comprobar que el campo

$$a = yz(2x + y + z)\,i + xz(x + 2y + z)\,j + xy(x + y + 2z)\,k$$

es potencial y hallar el potencial del mismo.

4457.1. Cerciorándose que es potencial el campo

$$a = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}i - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}j - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}k,$$

hallar el trabajo del mismo a lo largo del camino que une en el octante positivo los puntos $M(1, 1, 3)$ y $N(2, 4, 5)$.

4458. Hallar el potencial del campo gravitatorio

$$a = -\frac{m}{r^3}r,$$

engendrado por una masa m situada en el origen de coordenadas.

4459. Hallar el potencial del campo gravitatorio engendrado por un sistema de masas m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ situadas en los puntos M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4460. Demostrar que el campo $a = f(r)\,r$, donde $f(r)$ es una función uniforme continua, es potencial. Hallar el potencial de este campo.

4461. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \varrho(Q)\,\frac{dV}{r} \right\} = -\iint_S \varrho(Q)\,n\,\frac{dS}{r} + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \varrho(Q)\,\frac{dV}{r},$$

donde S es una superficie que limita un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S, r es la distancia entre los puntos $P(x, y, z)$ y $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

4462. Demostrar que, si $a = \operatorname{grad} u$, donde

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

y

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

entonces

$$\operatorname{div} a = \varrho(x, y, z)$$

(suponiendo que la integral correspondiente tiene sentido).

SEGUNDA PARTE

Capítulo VI

3136. El semiplano $y \geqslant 0$. 3137. $|x| \leqslant 1$; $|y| \geqslant 1$. 3138. $x^2 + y^2 \leqslant 1$. 3139. La parte exterior del círculo $x^2 + y^2 > 1$. 3140. El anillo $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. 3141. La lúnula $x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2x$. 3142. $-1 \leqslant x^2 + y \leqslant 1$. 3143. El semiplano $x + y < 0$. 3144. El par de ángulos opuestos $|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$. 3145. El par de ángulos opuestos obtusos, limitados por las rectas $y = 0$ e $y = -2x$, incluyendo la frontera sin el vértice común $0(0, 0)$.

3146. El triángulo rectilíneo, limitado por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = -x$ y la recta $y = 2$, excluyendo el vértice $0(0, 0)$. **3147.** La familia de anillos concéntricos $2\pi k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi(2k + 1)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. **3148.** La parte exterior del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, incluyendo la frontera excepto el vértice. **3149.** El conjunto de cuatro octantes del espacio. **3150.** La parte interior del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. **3151.** Rectas paralelas. **3152.** Circunferencias concéntricas. **3153.** La familia de hipérbolas equiláteras con las asíntotas comunes $y = \pm x$. **3154.** Rectas paralelas. **3155.** Un haz de rectas con el vértice en el origen de coordenadas, a excepción del vértice. **3156.** Una familia de elipses semejantes. **3157.** Un conjunto de hipérbolas equiláteras, que se aproximan asintóticamente a los ejes de coordenadas y están situadas en el I y III cuadrantes. **3158.** Una familia de líneas poligonales de dos lados, cuyos vértices están situados en el eje Oy. **3159.** El I y III cuadrantes para $z = 0$; una familia de poligonales de dos lados, cuyos vértices están situados en la recta $x + y = 0$, y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, para $z > 0$. **3159.1.** Las curvas de nivel son los lados de los ángulos paralelos a las direcciones positivas de los ejes de coordenadas Ox y Oy, y con los vértices en la recta $y = x$. **3159.2.** La familia de los contornos de los cuadrados con el centro común $0(0, 0)$, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas Ox y Oy para $z > 0$; el punto $0(0, 0)$ para $z = 0$. **3159.3.** Rectas paralelas al eje Ox, si $z < 0$; los lados de los ángulos, paralelos al eje de coordenadas Ox y al semieje positivo Oy, con los vértices en la parábola $y = x^2$, si $z > 0$; el semieje positivo Oy, si $z = 0$. **3160.** Un haz de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (sin incluir este origen) y que son ortogonales al eje Ox. **3161.** Las curvas $y = \dfrac{C}{\ln x}$. **3162.** Las curvas $y = \dfrac{C + x}{\ln x}$. **3163.** Una familia de circunferencias con los centros en el eje Ox, que son ortogonales a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. **3164.** Una familia de circunferencias que son ortogonales al eje Oy y que pasan por los puntos $(-a, 0)$, $(a, 0)$, a excepción de estos últimos. **3165.** Las rectas $x = m\pi$ e $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, para $z = 0$; el sistema de cuadrados $m\pi < x < (m + 1)\pi$, $n\pi < y < (n + 1)\pi$, donde $(-1)^{m+n} = z$, para $z = -1$ o $z = 1$. **3166.** Una familia de planos paralelos. **3167.** Una familia de esferas concéntricas con centro en el origen de coordenadas. **3168.** Una familia de hiperboloides de dos hojas para $u < 0$; una familia de hiperboloides de una hoja para $u > 0$; un cono para $u = 0$. **3169.** Una familia de cilindros elípticos, cuyo eje común es la recta $x + y = 0$, $z = 0$. **3170.** Una familia de esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ para $u = 0$; una familia de capas esféricas $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi(n + 1)$, donde $(-1)^n = u$, para $u = -1$ o $u = 1$.

3176. $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = f(x, y)$. **3177.** $\sqrt{1 + x^2}$. **3178.** $f(t) = 2t + t^2$; $z = x - 1 + \sqrt{y}$

$(x > 0)$. **3179.** $f(x) = x^2 - x$; $z = 2y + (x - y)^2$. **3180.** $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$.

3183.1. No. **3183.2.** 0; no. **3184.** a) 0, 1; b) $\frac{1}{2}$, 1; c) 0, 1; d) 0, 1; e) 1, ∞.

3185. 0. **3186.** 0. **3187.** a. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** e. **3192.** ln 2.
3193. a) $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$. **3194.** Puntos de discontinuidad: $x = 0$, $y = 0$. **3195.** Todos los puntos de la recta $x + y = 0$. **3196.** $0\,(0, 0)$ es un punto de discontinuidad infinita; los puntos de la recta $x + y = 0$ $(x \neq 0)$ son de discontinuidad evitable. **3197.** Los puntos situados en los ejes de coordenadas. **3198.** El conjunto de puntos de las rectas $x = m\pi$ e $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3199.** Los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. **3200.** Los puntos de los planos coordenados: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. **3201.** (a, b, c).

3203.4. La función es continua en E, pero no uniformemente. **3212.** $f'_x(x, 1) = 1$. **3212.1.** $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$; la función no es diferenciable en el punto $0\,(0, 0)$. **3212.2.** La función no es diferenciable en el punto $0\,(0, 0)$. **3212.3.** La función es diferenciable en el punto $0\,(0, 0)$.

3213. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -16xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$.
3215. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$. **3216.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$. **3217.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x + y) + x\cos(x + y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(x + y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\sin(x + y)$. **3218.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$. **3219.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$. **3220.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y - 1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$ $(x > 0)$. **3221.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}$. **3222.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. **3223.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}\ (xy\neq 1).$$ **3224.** $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x\,|y|}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$$
$$=\frac{2x\,|y|}{(x^2+y^2)^2}\ (y\neq 0).$$ **3225.** $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$ **3226.** $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\ \frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\times$$
$$\times\ln\frac{x}{y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\times$$
$$\times\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}>0\right).$$ **3227.** $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu}{xz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln x}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yu}{z^2}\ln x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{yu\ln x}{z^4}(2z+y\ln x),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(z+y\ln x)u}{xz^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3}\ (xz\neq 0).$$ **3228.** $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^z}{x}u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}u\ln x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=y^z u\ln x\ln y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^z(y^z-1)}{x^2}u,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=zy^{z-2}u\,(z-1+$$
$$+zy^z\ln x)\ln x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=y^z u(1+y^z\ln x)\ln x\ln^2 y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{zy^{z-1}u}{x}(1+y^z\ln x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{y^z u\ln y}{x}(1+y^z\ln x),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=y^{z-1}u\ln x\,[1+z\ln y\,(1+y^z\ln x)]$$
$(x>0,\ y>0)$. **3230.** $f''_{xy}(0,0)$ no existe. **3235.** $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$, $d^2u=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2\,dx^2+2mn\,xy\,dx\,dy+n(n-1)x^2\,dy^2]$. **3236.** $du=$
$$=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2},\quad d^2u=-\frac{2}{y^3}dy\,(y\,dx-x\,dy).$$ **3237.** $$du=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ d^2u=$$
$$=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$ **3238.** $$du=\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2},\ d^2u=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}.$$
3239. $du=e^{xy}(y\,dx+x\,dy)$; $d^2u=e^{xy}[y^2\,dx^2+2(1+xy)\,dx\,dy+x^2\,dy^2]$.
3240. $du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, $d^2u=2(dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx)$.
3241. $$du=\frac{(x^2+y^2)\,dz-2z(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2},\quad d^2u=\frac{2z\,[(3x^2-y^2)\,dx^2+\ldots\rightarrow}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\rightarrow\ldots\frac{+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2]-4(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)\,dz}{(x^2+y^2)^3}.$$ **3242.** $dx-dy$, $-2(dx-dy)(dy+dz)$. **3244.** a) $1+mx+ny$; b) xy, c) $x+y$. **3245.** a) 108,972; b) 1,055; c) 2,95; d) 0,502; e) 0,97. **3246.** La diagonal disminuirá 3 mm aproximadamente; el área disminuirá 140 cm^2 aproximadamente. **3247.** Hay que disminuir 1,7 mm. **3249.** $\Delta\approx 10{,}2\ m^3$; $\delta\approx 13\%$. **3250.** $\Delta\approx 7{,}6$ m. **3251.** $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ no están acotadas en un entorno del punto $(0,0)$. **3256.** $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24,$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=-16.$$ **3257.** $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=0.$$ **3258.** $$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y).$$
3259. $$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0.$$ **3260.** $$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2).$$ **3261.** $$\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial \xi\,\partial \eta}=$$

$= -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, donde $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. 3262. $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial x^q} = p!\, q!$.

3263. $\frac{2(-1)^m (m+n-1)!\,(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$. 3264. $e^{x+y}[x^2+y^2+2(mx+ny)+$ $+m(m-1)+n(n-1)]$. 3265. $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$. 3266. $\sin\frac{n\pi}{2}$.

3267. $F(t) = f'(t) + 3tf''(t) + t^2 f'''(t)$. 3268. $d^4u = 24(dx^4 - 2dx^3dy - 2dx\,dy^3 +$ $+ dy^4)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = -12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24$.
3269. $d^3u = 6(dx^3 - 3dx^2\,dy + 3dx\,dy^2 + dy^3)$. 3270. $d^3u = -8(x\,dx + y\,dy)^3 \times$ $\times \cos(x^2+y^2) - 12(x\,dx + y\,dy)(dx^2 + dy^2)\sin(x^2+y^2)$. 3271. $d^{10}u =$ $= -\frac{9!\,(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$. 3272. $d^6u = -(dx^6 - 15dx^4\,dy^2 + 15dx^2\,dy^4 - dy^6)\times$ $\times \cos x \operatorname{ch} y - 2dx\,dy\,(3dx^4 - 10dx^2dy^2 + 3dy^4)\sin x \operatorname{sh} y$. 3273. $d^3u = 6\,dx\,dy\,dz$.
3274. $d^4u = 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right)$. 3275. $d^n u = e^{ax+by}(a\,dx + b\,dy)^n$. 3276. $d^n u =$ $= \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{(n-k)}(x)\,Y^{(k)}(y)\,dx^{n-k}\,dy^k$. 3277. $d^n u = f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n$.
3278. $d^n u = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n$. 3280. a) $Au = -u$, $A^2u = u$; b) $Au = 1$, $A^2u = 0$. 3281 a) $\Delta u = 0$; b) $\Delta u = 0$. 3282. a) $\Delta_1 u = 9[(x^2-yz)^2 +$ $+(y^2-xz)^2 + (z^2-xy)^2]$, $\Delta_2 u = 6(x+y+z)$; b) $\Delta_1 u = \frac{1}{r^4}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta_2 u = 0$. 3283. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2+y^2+z^2) +$ $+ 4x^2 f''(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xyf''(x^2+y^2+z^2)$.

3284. $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f_2'\left(x, \frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_2'\left(x, \frac{x}{y}\right)$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}''\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2}{y} f_{12}''\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} f_{22}''\left(x, \frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} f_{12}''\left(x, \frac{x}{y}\right) -$ $-\frac{x}{y^3} f_{22}''\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2} f_2'\left(x, \frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} f_{22}''\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} f_2'\left(x, \frac{x}{y}\right)$. 3285. $\frac{\partial u}{\partial x} =$ $= f_1' + yf_2' + yzf_3'$; $\frac{\partial u}{\partial y} = xf_2' + xzf_3'$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xyf_3'$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + y^2 f_{22}'' + y^2z^2 f_{33}'' +$ $+ 2yf_{12}'' + 2yzf_{13}'' + 2y^2zf_{23}''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f_{22}'' + 2x^2zf_{23}'' + x^2z^2 f_{33}''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2y^2 f_{33}''$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xyf_{22}'' + xyz^2 f_{33}'' + xf_{12}'' + xzf_{13}'' + 2xyzf_{23}'' + f_2' + zf_3'$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xyf_{13}'' +$ $+ xy^2 f_{23}'' + xy^2z f_{33}'' + yf_3'$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2y f_{23}'' + x^2yz f_{33}'' + xf_3'$. 3286. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11}'' +$ $+(x+y) f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'$. 3287. $\Delta u = 3f_{11}'' + 4(x+y+z) f_{12}'' + 4(x^2+y^2+$ $+z^2) f_{22}'' + 6f_2'$. 3288. $du = f'(t)(dx+dy)$; $d^2u = f''(t)(dx+dy)^2$. 3289. $du =$ $= f'(t)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$; $d^2u = f''(t)\frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{x^4} - 2f'(t)\frac{dx\,(x\,dy - y\,dx)}{x^3}$.
3290. $du = f' \cdot \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d^2u = f'' \cdot \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{x^2+y^2} + f' \cdot \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
3291. $du = f'(t)\,dt$, $d^2u = f''(t)\,dt^2 + f'(t)\,d^2t$, donde $dt = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$ y $d^2t = 2(z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz)$. 3292. $du = 2f' \cdot (x\,dx + y\,dy + z\,dz)$;

$d^2u = 4f'' \cdot (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3293.** $du = af'_1\,dx + bf'_2\,dy$, $d^2u = a^2f''_{11}\,dx^2 + 2abf''_{12}\,dx\,dy + b^2f''_{22}\,dy^2$. **3294.** $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy)$; $d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx^2 - dy^2) + f''_{22} \cdot (dx - dy)^2$.
3295. $du = f'_1 \cdot (y\,dx + x\,dy) + f'_2 \cdot \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$; $d^2u = f''_{11} \cdot (y\,dx + x\,dy)^2 + 2f''_{12} \cdot \dfrac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} + f''_{22} \cdot \dfrac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + 2f'_1 \cdot dx\,dy - 2f'_2 \cdot \dfrac{(y\,dx - x\,dy)\,dy}{y^3}$.
3296. $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot dz$; $d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx + dy)\,dz + f''_{22} \cdot dz^2$. **3297.** $du = f'_1 \cdot (dx + dy + dz) + 2f'_2 \cdot (x\,dx + y\,dy + z\,dz)$; $d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy + dz)^2 + 4f''_{12} \cdot (dx + dy + dz)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + 4f''_{22}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f'_2 \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3298.** $du = f'_1 \cdot \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + f'_2 \cdot \dfrac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$;

$$d^2u = f''_{11} \cdot \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + 2f''_{12} \cdot \frac{(y\,dx - x\,dy)(z\,dy - y\,dz)}{y^2z^2} + f''_{22} \cdot \frac{(z\,dy - y\,dz)^2}{z^4} - 2f'_1 \cdot \frac{(y\,dx - x\,dy)\,dy}{y^3} - 2f'_2 \cdot \frac{(z\,dy - y\,dz)\,dz}{z^3}.$$

3299. $du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3)\,dt$; $d^2u = (f''_{11} + 4tf''_{12} + 4t^2f''_{22} + 6t^2f''_{13} + 12t^3f''_{23} + 9t^4f''_{33} + 2f'_2 + 6tf'_3)\,dt^2$. **3300.** $du = af'_1\,dx + bf'_2\,dy + cf'_3\,dz$; $d^2u = a^2f''_{11}\,dx^2 + b^2f''_{22}\,dy^2 + c^2f''_{33}\,dz^2 + 2abf''_{12}\,dx\,dy + 2acf''_{13}\,dx\,dz + 2bcf''_{23}\,dy\,dz$.
3301. $du = 2f'_1 \cdot (x\,dx + y\,dy) + 2f'_2 \cdot (x\,dx - y\,dy) + 2f'_3 \cdot (y\,dx + x\,dy)$;

$$d^2u = 4f''_{11} \cdot (x\,dx + y\,dy)^2 + 4f''_{22} \cdot (x\,dx - y\,dy)^2 + 4f''_{33} \cdot (y\,dx + x\,dy)^2 + 8f''_{12} \cdot (x^2\,dx^2 - y^2\,dy^2) + 8f''_{13} \cdot (x\,dx + y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + 8f''_{23} \cdot (x\,dx - y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + 2f'_1 \cdot (dx^2 + dy^2) + 2f'_2 \cdot (dx^2 - dy^2) + 4f'_3 \cdot dx\,dy.$$

3302 $d^nu = f^{(n)}(ax + by + cz)(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n$. **3303.** $d^nu = \left(a\,dx\dfrac{\partial}{\partial\xi} + b\,dy\dfrac{\partial}{\partial\eta} + c\,dz\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, donde $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.
3304. $d^nu = \left[dx\left(a_1\dfrac{\partial}{\partial\xi} + a_2\dfrac{\partial}{\partial\eta} + a_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dy\left(b_1\dfrac{\partial}{\partial\xi} + b_2\dfrac{\partial}{\partial\eta} + b_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dz\left(c_1\dfrac{\partial}{\partial\xi} + c_2\dfrac{\partial}{\partial\eta} + c_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$. **3305.** $F(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$.
3316. 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$. **3332.** $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.
3333. $y\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3334.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3335.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3336.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$. **3337.** $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
3339. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$. **3340.** $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3341.** $1 - \sqrt{3}$.
3342. $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$; a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$; c) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ y $\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$.
3343. $\dfrac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. **3344.** $\dfrac{1}{ab}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. **3345.** $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$;

$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{3}$. 3346. $|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{r_0^2}$; $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, x}) = -\frac{x_0}{r_0}$, $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, y}) = -\frac{y_0}{r_0}$, $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, z}) = -\frac{z_0}{r_0}$, donde $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 3347. $\frac{\pi}{2}$. 3348. ≈ 3142. 3350. $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma$. 3352. $\frac{\partial u}{\partial y} = -0{,}5$. 3353. $u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -4/3\,x$, $u''_{xy}(x, 2x) = 5/3\,x$. 3354. $z = x\varphi(y) + \psi(y)$. 3355. $z = \varphi(x) + \psi(y)$. 3356. $z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \ldots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. 3357. $u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$. 3358. $u = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$. 3359. $z = 1 + xy + y^2$. 3360. $z = x + y^2 + 0{,}5xy(x + y)$. 3362. Los ceros de la función $f(x)$ no pueden llenar completamente un intervalo $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. 3363. El conjunto de ceros de la función $f(x)$ no tiene que ser denso en ninguna parte del intervalo (a, b), además, cada cero ξ de la función $f(x)$ es simultáneamente un cero de la función $g(x)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to\xi} [g(x)/f(x)]$. 3364. 1) Un conjunto infinito; 2) dos; 3) a) una; b) dos. 3365. 1) Un conjunto infinito; 2) cuatro: $y = x$; $y = -x$; $y = |x|$; $y = -|x|$; 3) dos; 4) a) dos; b) cuatro; 5) una. 3366. 1) En ninguno; 2) $0 < |x| < 1$, $|x| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; 3) $x = 0$, $|x| = 1$; 4) $1 < |x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; las ramas uniformes son: $y = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ $\left(|x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$; $y = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$ $\left(1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, donde $\varepsilon = -1, 1$. 3367. Los puntos de ramificación son: $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$; $y = \varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1} - (2x^2+1)}{2}}$ $(|x| \leqslant 1)$, donde $\varepsilon(x) = -1, 1, \operatorname{sgn} x$ y $-\operatorname{sgn} x$.
$-\operatorname{sgn} x$. 3368. El conjunto de valores de la función $\varphi(y)$ tiene que tener puntos comunes con el conjunto de valores de la función $f(x)$. 3371. $y' = -\frac{x+y}{x-y}$; $y'' = \frac{2a^2}{(x-y)^3}$. 3372. $y' = \frac{x+y}{x-y}$; $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 3373. $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$; $y'' = \frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$. 3374. $y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$; $y'' = \frac{y^2[y(1-\ln x)^2 - 2(x-y)\times(1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$. 3375. $y' = \frac{y}{x}$; $y'' = 0$. 3378. $y_1'(0) = -1$; $y_2'(0) = 1$. 3379. $y_1'(0) = 0$; $y_2'(0) = -\sqrt{33}$; $y_3'(0) = \sqrt{3}$. 3380. $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$; $y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}$; $y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}$. 3381. $y' = 0$; $y'' = -\frac{2}{3}$; $y''' = -\frac{2}{3}$. 3383. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{z^3}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}$ **3384.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. **3385.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **3386.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. **3387.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3388. a) -2; b) -1. **3389.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{394}{125}$.

3390. $dz = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2}\right)$; $d^2z = -\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy + \left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$. **3391.** $dz = -\frac{(1-yz)\,dx + (1-xz)\,dy}{1-xy}$;

$$d^2z = -\frac{2\{y(1-yz)\,dx^2 + [x+y-z(1+xy)]\,dx\,dy + x(1-xz)\,dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

3392. $dz = \frac{z(y\,dx + z\,dy)}{y(x+z)}$; $d^2z = -\frac{z^2(y\,dx - x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$. **3393.** $dz = dx - \frac{(x-z)\,dy}{(x-z)^2+y(y+1)}$; $d^2z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}\,dy^2$.

3394. $du = -\frac{u^2(dx+dy) - z^2\,dz}{u[2(x+y)-u]}$. **3395.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1'+2zF_2')^3} \times [F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}''] - \frac{2(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')F_2'}{(F_1'+2zF_2')^3}$. **3396.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$. **3397.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1+\frac{F_1'+F_2'}{F_3'}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1+\frac{F_2'}{F_3'}\right)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -F_3'^{-3}[F_3'^2(F_{11}''+2F_{12}''+F_{22}'') - 2(F_1'+F_2')F_3'(F_{13}''+F_{23}'') + (F_1'+F_2')^2F_{33}''].$$

3398. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(xF_1'+yF_2')^{-3}\cdot[y^2z^2(F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}'') - 2z(xF_1'+yF_2')F_1'^2]$. **3399.** a) $d^2z = -\frac{F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}''}{(F_1'+F_2')^3}(dx-dy)^2$;

b) $d^2z = \frac{F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}''}{(xF_1'+yF_2')^3}(y\,dx - x\,dy)^2$. **3399.1.** $dz = \frac{1}{9}(2dx - dy)$;

$$d^2z = -\frac{2}{243}(2dx^2 - 5dx\,dy + 2\,dy^2).$$

3528. $\dfrac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=$ $=\dfrac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\dfrac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\operatorname{tg}t_0+(y-y_0)\sin\alpha\operatorname{tg}t_0$, donde $x_0=a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0=a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0=a\sin t_0$. 3529. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$, $y=\dfrac{b}{2}$; $ax-cz=\dfrac{1}{2}(a^2-c^2)$. 3530. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$; $x+y+2z=4$. 3531. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$; $3x+3y-z=3$. 3532. $x+z=2$, $y+2=0$; $x-z=0$. 3533. $M_1(-1,\ 1,\ -1)$; $M_2\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{27}\right)$. 3537. $\operatorname{tg}\varphi=$

$=f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha$. **3538.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{16}{243}$. **3539.** $2x + 4y - z - 5 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x + 4y + 12z = 169$; $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}$.

3541. $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - y)$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1$; $\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}$. **3543.** $x + y - 2z = 0$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. **3544.** $x + y - 4z = 0$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$.

3545. $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0 + \frac{z}{c}\sin\psi_0 = 1$; $\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \frac{y\sec\psi_0\operatorname{cosec}\varphi_0 - b}{ac} = \frac{z\operatorname{cosec}\psi_0 - c}{ab}$. **3546.** $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\frac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{z - r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$. **3547.** $ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0z = au_0v_0$; $\frac{x - u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \frac{y - u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}$. **3548.** $\frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^2} + \frac{z}{u_0^3} = 2$.

3549. $A(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$; $B(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$; $C(\pm 4, \mp 2, 0)$. **3550.** $x = \pm\frac{a^2}{d}$, $y = \pm\frac{b^2}{d}$, $z = \pm\frac{c^2}{d}$, donde $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **3551.** $x + 4y + 6z = \pm 21$.
3556. $x^2 + y^2 - xy = 1$, $z = 0$; $3y^2 + 4z^2 = 4$, $x = 0$; $3x^2 + 4z^2 = 4$, $y = 0$.
3557. $\delta < 0{,}003$. **3559.** $\cos\varphi = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$. **3563.** $\frac{\partial u}{\partial n} = x_0 + y_0 + z_0$;

a) $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) en la circunferencia $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}$.

3621. $z_{min} = 0$ para $x = 0, y = 1$. 3622. No hay puntos de extremo. 3623. Mínimo no estricto $z = 0$ en los puntos de la recta $x - y + 1 = 0$. 3624. $z_{min} = -1$ para $x = 1, y = 0$. 3625. $z_{max} = 108$ para $x = 2, y = 3$; mínimo no estricto $z = 0$ para $x = 0, 0 < y < 6$; máximo no estricto $z = 0$ para $x = 0, -\infty < y < 0$ y $6 < y < +\infty$. 3626. $z_{min} = -1$ para $x = 1, y = 1$. 3627. $z_{min} = -2$ para $x_1 = -1, y_1 = -1$ y $x_2 = 1, y_2 = 1$; no hay extremo para $x = 0, y = 0$. 3627.1. Máximo $z = 0$ para $x = 0, y = 0$; mínimo $z = -1\frac{1}{8}$ para $x = \pm\frac{1}{2}, y = \pm 1$; punto de ensilladura $z = -1$ para $x = 0, y = \pm 1$, y punto de ensilladura $z = -\frac{1}{8}$ para $x = \pm\frac{1}{2}, y = 0$. 3628. Mínimo $z = 30$ para $x = 5, y = 2$. 3629. $z_{min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $z_{max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3630. $z_{max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ para $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, si $c > 0$; $z_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ para $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ si $c < 0$; no hay extremo si $c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$. 3631. $z_{max} = 1$ para $x = 0, y = 0$. 3632. Mínimo $z = 0$ para $x = 0, y = 0$; punto de ensilladura $z = \frac{1}{2}e^{-2}$ para $x = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$. 3633. Punto de ensilladura $z = e^3$ para $x = 1, y = -2$. 3634. Máximo $z = e^{-13} \approx 2{,}26 \cdot 10^{-6}$ para $x = 1$, $y = 3$; mínimo $z = -26 \cdot e^{-\frac{1}{52}} \approx -25{,}51$ para $x = -\frac{1}{26}$, $y = -\frac{3}{26}$. 3635 Mínimo $z = 7 - 10 \ln 2 \approx 0{,}0685$ para $x = 1, y = 2$.

3636. $z_{max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ para $x = \frac{\pi}{3}$

$y=\frac{\pi}{6}$. 3637. $z_{\min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ para $x=y=\frac{2\pi}{3}$; $z_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ para $x=y=\frac{\pi}{3}$. 3638. Punto de ensilladura $z=-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi\approx 1{,}70$ para $x=1$, $y=1$. 3639. Mínimo $z=-\frac{1}{2e}\approx-0{,}184$ para $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx\pm 0{,}43$; máximo $z=\frac{1}{2e}$ para $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$; no hay extremos en los puntos estacionarios $x=0$, $y=\pm 1$ y $x=\pm 1$, $y=0$. 3640. Puntos estacionarios: $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$ ($m, n=0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$). Extremo $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2\cdot(-1)^{n}$, si m y n son de paridad distinta (máximo si m es impar y n es par, mínimo si m es par y n es impar); no hay extremo si m y n son de igual paridad. 3641. $z_{\min}=0$ para $x=0$; $y=0$; máximo no estricto $z=e^{-1}$ para $x^2+y^2=1$. 3642. $u_{\min}=-14$ para $x=-1$, $y=-2$, $z=3$. 3643. Mínimo $u=-6913$ para $x=24$, $y=-144$, $z=-1$. 3644. Mínimo $u=4$ para $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$. 3645. $u_{\max}=\frac{a^7}{7^7}$ para $x=y=z=\frac{a}{7}$; extremo no estricto $u=0$ para $y=0$, $x\neq 0$, $z\neq 0$, $x+2y+3z\neq a$. 3646. Mínimo $u=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ para $x=\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}$, $y=\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5b^7}{4}}$. 3647. Máximo $u=4$ para $x=y=z=\frac{\pi}{2}$; mínimo en la frontera $u=0$ para $x=y=z=0$ y $x=y=z=\pi$. 3648. $u_{\max}=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ para $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$. 3649. Mínimo $u=(n+1)\,2^{\frac{1}{n+1}}$ para $x_1=2^{\frac{1}{n+1}}$, $x_2=x_1^2$, $\ldots$, $x_n=x_1^n$. 3650. Los números $a, x_1, x_2, \ldots, x_n\ b$ forman una progresión geométrica de razón $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. 3151. Mínimo $z_1=-2$ y máximo $z_2=6$ para $x=1$, $y=-1$. 3652. $z_{\min}=-(4+2\sqrt{6})$ para $x=y=-(3+\sqrt{6})$; $z_{\max}=2\sqrt{6}-4$ para $x=y=-(3-\sqrt{6})$. 3653. Mínimo no estricto $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ para $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z<0$; máximo no estricto $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ para $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z>0$. 3654. $z_{\max}=\frac{1}{4}$ para

$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. **3655.** $z_{\min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ para $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z_{\max}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ para $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, donde $\varepsilon=\operatorname{sgn} ab\neq 0$. **3656.** $z_{\max}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ para $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$. **3657.** $z_{\min}=\lambda_1$, $z_{\max}=\lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ y $\lambda_1<\lambda_2$. **3657.1.** Máximo $z=106\frac{1}{4}$ para $x=\pm 1\frac{1}{2}$, $y=\pm 4$; mínimo $z=-50$ para $x=\pm 2$, $y=\mp 3$. **3658.** Extremo $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ para $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (máximo si k es par, y mínimo si k es impar). **3659.** $u_{\max}=3$ para $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. $u_{\min}=-3$ para $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$; **3660.** $u_{\max}=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ para $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$. **3661.** $u_{\min}=c^2$ para $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$; $u_{\max}=a^2$ para $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. **3662.** $u_{\max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ para $x=y=z=\frac{a}{6}$. **3663.** $u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ para $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$ para $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3663.1.** Máximo condicionado $u=2$ para $x=1$, $y=1$, $z=1$. **3664.** $u_{\max}=\frac{1}{8}$ para $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. **3665.** $u_{\min}=\lambda_1$ y $u_{\max}=\lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\right.$ $\left.+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ $(\lambda_1<\lambda_2)$.

3666. $u_{\min}=\frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}$; $u_{\max}=R^2$. **3667.** $u_{\min}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ para $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. **3668.** $u_{\min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$

para $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. 3669. $u_{\min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$ para $x_i=$ $=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. 3670. $u_{\max}=$ $=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\dots\alpha_n^{\alpha_n}$ para $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\dots=\frac{x_n}{\alpha_n}=$ $=\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$. 3671. Los extremos $u=\lambda$ se determinan por las ecuaciones $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$, donde $\delta_{ij}=0$ para $i\neq j$ y $\delta_{ii}=1$.

3675. $\inf z=-5$, $\sup z=-2$.
3676. $\inf z=-75$; $\sup z=125$. 3677. $\inf z=0$; $\sup z=1$. 3678. $\inf u=0$; $\sup u=300$. 3679. $\inf u=-\frac{1}{2}$; $\sup u=1+\sqrt{2}$. 3680. $\inf u=0$; $\sup u= = e^{-1}\approx 0{,}37$. 3682. No. 3683. El mínimo es igual a $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$. 3684. Los sumandos son iguales. 3685. Los factores son iguales a

$$x_i=\frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\dots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_1}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$$

$(i=1, 2, \dots, n)$ donde α_i $(i=1, 2, \dots, n)$ son los exponentes respectivos de las potencias; el valor mínimo de la suma es

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\dots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}}}.$$

3686. $x=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$, $y=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$, donde $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$. 3687. Las dimensiones de la bañera son $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. 3688. $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, donde R es el radio de la superficie cilíndrica y H es su generatriz.

3689. $x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$, donde

$$N=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}.$$

La suma mínima de los cuadrados de las distancias es igual a $n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$. 3690.

El ángulo de inclinación de las generatrices del cono respecto de la base es igual a $\arcsin\frac{2}{3}$. **3691**. El ángulo de inclinación de las caras laterales de las pirámides respecto de sus bases es igual a $\arcsin\frac{2}{3}$. **3692**. Los lados del rectángulo son $\frac{2p}{3}$ y $\frac{p}{3}$. **3693**. Los lados del triángulo son $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ y $\frac{3p}{4}$. **3694**. Las dimensiones del paralelepípedo son $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ y $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **3695**. La altura del paralelepípedo es igual a $\frac{1}{3}$ de la altura del cono. **3696**. Las dimensiones del paralelepípedo son $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. **3697**. La altura del parapelepípedo es $h = l \sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}$, si $\alpha \geqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, y $h = 0$ si $0 < \alpha < \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **3698**. Las dimensiones del paralelepípedo son a, b y $\frac{c}{2}$. **3699**. $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. **3700**. $d = \frac{1}{\pm\Delta}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$,

donde $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$. **3701**. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702**. Los cuadrados de los semiejes $a^2 = \lambda_1$ y $b^2 = \lambda_2$ son raíces de la ecuación $(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0$. **3703**. Los cuadrados de los semiejes $a^2 = \lambda_1$, $b^2 = \lambda_2$ y $c^2 = \lambda_3$ son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3704. $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

3705. $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}}$.

3707. El ángulo de incidencia es igual a $\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; la desviación del rayo es igual a $2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$. **3708**. Los coeficientes buscados a y b se determinan por las ecuaciones $a[xx] + b[x1] = [xy]$, $a[x1] + bn = [y1]$, donde $[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ etc. El problema tiene solución determinada si $\sum_{i \neq j}(x_i - x_j)^2 \neq 0$. **3709**. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{xy})}{[\overline{x^2} - (\overline{x})^2] - [\overline{y^2} - (\overline{y})^2]}$, $p = \overline{x}\cos\alpha + \overline{y}\sin\alpha$, donde $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ etc., son los valores medios.

3710. $4x - \frac{7}{2}$; $\Delta_{\min} = \frac{1}{2}$.

Capítulo VIII

3901. $\frac{1}{4}$. 3902. $\underline{S}=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\bar{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$: $13\frac{1}{3}$.

3903. 9,88. El valor exacto es $2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13,20$. 3904. 0,402. El valor exacto es 0,4.

3905. $\delta<0,00022$. 3906. 1. 3907. $\frac{1}{40}$. 3908. $\frac{\pi a^3}{3}$. 3910. $I=F(A,\ B)-F(A,\ b)-$ $-F(a,\ B)+F(a,\ b)$. 3912. a) Negativo; b) negativo; c) positivo.

3913. $\frac{1}{4}$. 3914. $1,96<I<2$. 3915. $a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$.

3916. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,\ y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,\ y)\,dx$. 3917. $\int\limits_{-2}^{2} dx\int\limits_{\frac{|x|}{2}}^{1} f(x,\ y)\,dy=$ $=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{2y} f(x,\ y)\,dx$. 3918. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x+1} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,\ y)\,dx+$ $+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-1}^{1} f(x,\ y)\,dx$. 3919. $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_{-1}^{1} dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx$.

3920. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,\ y)\,dx$.

3921. $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{x^2}^{1} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx$,

3922. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \left\{ \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy \right\} + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **3924.** $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\,dx.$ **3925.** $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\,dx.$ **3926.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx.$

3927. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\,dx.$

3928. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3929. $\int\limits_{0}^{a} dy \left\{ \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx \right\} + \int\limits_{a}^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\,dx.$

3930. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\,dx.$ **3931.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\,dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x, y)\,dx.$

3932. $\frac{p^5}{21}$. **3933.** $\left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a\sqrt{a}$. **3934.** $\frac{a^4}{2}$. **3935.** $14a^4$. **3936.** $\frac{35\pi a^4}{12}$.

3937. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$ **3938.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$

3939. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{|a|}^{|b|} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$ **3940.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$

3941. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr +$

$$+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a \sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr.$$

3942. Cuando el recinto de integración está limitado por dos circunferencias concéntricas con el centro en el origen de coordenadas y por dos rayos que parten del origen de coordenadas.

3943. $$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} r\,dr \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3944. $$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r\,dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3945. $$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\,dr = \frac{\pi}{12}\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} rf(r)\,dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,dr.$$

3946. $$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{1} r\,dr \int\limits_{0}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3947. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3948. $\int\limits_0^a dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\, d\varphi$. **3949.** $\int\limits_0^a dr \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\, d\varphi$.

3950. $\int\limits_0^a dr \int\limits_r^a f(\varphi, r)\, d\varphi$. **3951.** $2\pi \int\limits_0^1 rf(r)\, dr$. **3952.** $\pi \int\limits_0^1 rf(r)\, dr +$

$+ \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\, dr$. **3953.** $\frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi) \cos^2\varphi\, d\varphi$. **3954.** $\frac{2\pi a^3}{3}$.

3955. $-6\pi^2$.

3965. $\frac{\pi}{2}$. **3966.** $\frac{4}{3}$ **3967.** $\frac{2}{3}\pi ab$. **3968.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **3969.** $543\,\frac{11}{15}$. **3970.** $1\,\frac{37}{128} - \ln 2$.

3971. 2π. **3972.** $\frac{9}{16}\pi$. **3973.** $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{4}$. **3974.** $\frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

3975. 6. **3976.** $\frac{4}{3}(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$. **3978.** $f(0, 0)$. **3979.** $\frac{2}{t}F(t)$,

si $t > 0$. **3980.** $2 \iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$. **3981.** $F'(t) =$

$= \int\limits_0^{2\pi} tf(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\, d\varphi$. **3984.** $\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right) a^2$. **3985.** $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.

3986. πa^2. **3987.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} a^2$. **3988.** $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. **3989.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

3990. $a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$.

4007. $\frac{5}{6}$. 4008. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3} R^3$. 4009. $\frac{88}{105}$. 4010. π. 4011. π. 4012. $\frac{17}{12} - 2 \ln 2$.

4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \left(\frac{3}{4}\right) a^3$. 4014. $\frac{\pi}{8}$. 4015. $\frac{45}{32}\pi$. 4016. $\frac{16}{9} a^8$. 4017. $\frac{\pi a^4}{8}$.

4018. $\pi (1 - e^{-R^2})$. 4019. $2a^2 c \cdot \frac{(\beta - \alpha)(\pi - 2)}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{8}$. 4021. $\frac{1}{3} \pi abc (2 - \sqrt{2})$.

4022. $\frac{4}{3} \pi abc (2\sqrt{2} - 1)$. 4023. $\frac{3\pi abc}{8}$. 4024. $\frac{2}{3} \pi abc$. 4025. $\frac{abc}{3}$.

4026. $\frac{2}{9} abc (3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$. 4027. $\frac{\pi (b^3 - a^3)}{12}$. 4028. $\frac{9}{2} a^4$. 4029. $\frac{3}{4}$.

4030. $\frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 4031. $\frac{8}{35}$. 4032. $\frac{75}{256} \pi abc$. 4033. $\frac{\pi^4 a^2 c}{128}$. 4033.1. $(n - m) \times$ $\times (e^{-1} - e^{-2}) a^2$. 4034. $\frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. 4035. $\frac{abc}{2m+n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)}$.

4036. $\frac{2}{3} \pi a^2 (2\sqrt{2} - 1)$. 4037. $16a^2$. 4038. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 4039. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4040. $8a^2$. 4041. $\pi\sqrt{2}$. 4042. $\frac{\pi a^2}{2}$. 4043. $-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) +$ $+ \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$. 4044. $\frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$. 4045. $2a^2$. 4045.1. $\frac{\pi}{6} [3\sqrt{10} + \ln (3 + \sqrt{10})]$.

4045.2. $\frac{1}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^3}\right]$. 4045.3. $\frac{4}{3} ab (2\sqrt{2} - 1) \times$ $\times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}}$. 4045.4. $\frac{\pi}{2} \ln (e + e^{-1})$. 4046. $S = 4\pi (3 + 2\sqrt{3}) a^2$; $V = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} a^3$.

4047. $(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin \psi_2 - \sin \psi_1) R^2$, donde φ_1, φ_2 son las longitudes de los meridianos, ψ_1, ψ_2 son las latitudes de los paralelos, R es el radio de la esfera.

4048. $\pi \left\{a \sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}\right\}$.

4049. $S = a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)]$; $4\pi^2 ab$. 4050. $\omega =$

$= \arcsin \dfrac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega \approx \dfrac{bc}{a^2}$. **4051.** $\dfrac{\varrho_0 a^2}{3}\,[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$.

4052. $x_0 = -\dfrac{a}{2}$; $y_0 = \dfrac{8}{5}a$. **4053.** $x_0 = y_0 = \dfrac{a}{5}$. **4054.** $x_0 = y_0 = \dfrac{256}{315\pi}a$.

4055. $x_0 = \dfrac{a^2 b}{14c^2}$; $y_0 = \dfrac{ab^2}{14c^2}$. **4056.** $x_0 = y_0 = \dfrac{\pi a}{8}$. **4057.** $x_0 = \dfrac{5}{6}a$; $y_0 = \dfrac{16}{9\pi}a$.

4058. $x_0 = \pi a$; $y_0 = \dfrac{5}{6}a$. **4059.** $x_0 = -\dfrac{a}{5}$; $y_0 = 0$. **4060.** La parábola $y_0 =$ $= \dfrac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. **4061.** $I_x = \dfrac{bh^3}{12}$; $I_y = \dfrac{h\,|\,b_1^3 - b_2^3\,|}{12}$ $(b = |\,b_1 - b_2\,|)$. **4062.** $I_x =$ $= I_y = \dfrac{a^4}{16}(16-5\pi)$. **4063.** $I_x = \dfrac{21\pi a^4}{32}$; $I_y = \dfrac{49\pi a^4}{32}$. **4064.** $I_x = I_y = \dfrac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$.

4065. $I_x = I_y = \dfrac{9}{8}a^4$. **4066.** $I_0 = \dfrac{\pi a^4}{8}$. **4066.1.** $\dfrac{a^4}{12}$. **4069.** $I_a = \dfrac{a^4}{32\sqrt{3}}$.

4070. $X = ah^2$, $Y = 0$, donde X, Y, son las proyecciones de la presión sobre los ejes de coordenadas Ox y Oy.

4071. $P_1 = \pi a^2\delta\left(h - \dfrac{2}{3}a\right)$; $P_2 = \pi a^2\delta\left(h + \dfrac{2}{3}a\right)$.

4072. Las proyecciones de la presión sobre los ejes Ox y Oz, situados en el plano vertical que pasa por el eje del cilindro, donde el eje Ox es horizontal y el eje Oz es vertical, son respectivamente iguales a:

$$X_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha, \qquad Z_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha;$$

$$X_2 = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha, \qquad Z_2 = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

4073. Las proyecciones de la fuerza de atracción sobre los ejes Ox, Oy, Oz, son respectivamente iguales a: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\dfrac{2kmM}{a^2 h}\{|\,b\,| -$ $- |\,b - h\,| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2+b^2}\}$, donde k es la constante de gravitación.

4074. $p_m = \dfrac{1}{2}p_0$. **4075.** $A = \dfrac{kp}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2+b^2} + a^3\ln\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} + \right.$ $\left. + b^3\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$. **4076.** $\dfrac{1}{364}$. **4077.** $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{5}{16}$. **4078.** $\dfrac{1}{48}$.

4079. $\dfrac{4}{5}\pi abc$. **4080** $\dfrac{\pi}{6}$. **4081.** $\displaystyle\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x, y, z)\,dy + \right.$

$$\left.+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z)\,dy\right\} = \int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z)\,dx + \int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dx\right\}.$$

4082. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx\int_{|x|}^{1} dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z)\,dy = \int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\,dx.$

4083. $\int\limits_0^1 dx \left\{ \int\limits_0^{x^2} dz \int\limits_0^1 f(x,\ y,\ z)\, dy + \int\limits_{x^2}^{x^2+1} dz \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,\ y,\ z)\, dy \right\} =$

$= \int\limits_0^1 dz \left\{ \int\limits_0^{\sqrt{z}} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,\ y,\ z)\, dx + \int\limits_{\sqrt{z}}^{1} dy \int\limits_0^1 f(x,\ y,\ z)\, dx \right\} +$

$+ \int\limits_1^2 dz \int\limits_{\sqrt{z-1}}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,\ y,\ z)\, dx.$

4084. $\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta)\, d\zeta$. **4085.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2-z^2) f(z)\, dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\, dz$.

4086. $F(A,\ B,\ C) - F(A,\ B,\ c) - F(A,\ b,\ C) - F(a,\ B,\ C) + F(A,\ b,\ c) + F(a,\ B,\ c) + F(a,\ b,\ C) - F(a,\ b,\ c)$. **4087.** $\frac{\pi}{10}$, **4088.** $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

4089. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi\, d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r)\, dr$. **4090.** $\frac{\pi^2 abc}{4}$.

4091. $\frac{16\pi}{3}$. **4092.** $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$.

4093. $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$. **4094.** $\frac{6}{5}$.

4095. $3(e-2)$. **4096.** $u=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\theta R}}$, donde $|\theta|<1$. **4098.** a) $F'(t)= 4\pi t^2 f(t^2)$; b) $F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyz\, f'(xyz)\, dx\, dy\, dz\right]$, donde $t>0$ y $V=\{0\leqslant x\leqslant t,\ 0\leqslant y\leqslant t,\ 0\leqslant z\leqslant t\}$. **4099.** 0, si uno de los números m, n y p es impar; $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\cdot\frac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, si los números m, n y p son pares. **4101.** $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$.

4103. $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **4105.** $\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$. **4106.** $\frac{32}{3}\pi$. **4107.** πa^3.

4108. $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **4109.** $\frac{1}{2}$. **4110.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$.

4116. $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **4116.1.** $\frac{abc}{60}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **4117.** $\frac{abc}{554\,400}$.

4118. $\frac{abc}{3}$. 4118.1. $\frac{abc}{90}$. 4118.2. $\frac{abc}{1680}$. 4118.3. $\frac{4\pi}{35}abc$. 4119. $\frac{9}{4}a^2$.
4120. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. 4121. $\frac{4\pi}{3}a^3$. 4122. $\frac{\pi abc^2}{3h}(1 - e^{-1})$.
4123. $\frac{3}{2}abc$. 4124. $5abc\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right)$. 4125. 37:27. 4126. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$; $S = \frac{\pi a^2}{6} \times$ $\times (6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1)$. 4127. $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$. 4128. $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$ 4129. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{abc^2}{h}$.
4130. $\frac{abc}{mn + mp + np} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}$. 4131. $\frac{3}{2}$. 4132. $4\pi\varrho_0\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$. 4133. $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}c\right)$. 4134. $x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a$; $z_0 = \frac{7}{30}a^2$.
4135. $x_0 = \frac{7}{18}p$. $y_0 = 0$; $z_0 = \frac{7}{176}p$. 4136. $x_0 = \frac{3}{8}a$; $y_0 = \frac{3}{8}b$; $z_0 = \frac{3}{8}c$.
4137. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = \frac{3a}{8}$. 4138. $x_0 = y_0 = 1$; $z_0 = \frac{5}{3}$. 4139. $x_0 = \frac{9\pi}{448}a$; $y_0 = \frac{9\pi}{448}b$; $z_0 = \frac{9\pi}{448}c$. 4140. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = \frac{7}{20}$. 4141. $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} =$ $= \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. 4142. $x_0 = \alpha$; $y_0 = \beta$; $z_0 = \gamma$. 4143. $I_{xy} = \frac{abc^3}{60}$; $I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$. 4144. $I_{xy} = \frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx} = \frac{4}{15}\pi ab^3c$. 4145. $I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz} = \frac{\pi a^3bc}{20}$; $I_{xz} = \frac{\pi ab^3c}{20}$. 4146. $I_{xy} = \frac{2abc^3}{225}(15\pi - 16)$; $I_{xz} = \frac{2ab^3c}{1575}(105\pi - 272)$; $I_{yz} = \frac{2a^3bc}{1575}(105\pi - 92)$. 4147. $I_{xy} = \frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz} = \frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz} = \frac{4}{3}\pi a^3bc$.
4147.1. $I_{yz} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}a^3bc$; $I_{zx} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}ab^3c$; $I_{xy} = \frac{\pi^2}{128\sqrt{2}}abc^3$. 4147.2. $I_{yz} = \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot a^3bc$; $I_{zx} = \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot ab^3c$; $I_{xy} = \frac{1}{5n^2} \times$ $\times \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot abc^3$. 4148. $I_z = \frac{14}{15}$. 4149. $I_z = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)$. 4149.1. $\frac{\pi}{5}a^5$.

4150. $\frac{4}{9}MR^2$. 4153. $I = \frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right)$, donde $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ es la masa del cilindro.

4154. $I_0 = \frac{\pi^2 a^5 \varrho_0}{8}$. 4155. $u = 2\pi\varrho_0\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$, si $r \leqslant R$; $u = \frac{4\pi R^3 \varrho_0}{3r}$, si

$r > R$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 4156. $u = 4\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} f(\varrho) \min\left(\frac{\varrho^2}{r}, \varrho\right) d\varrho$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 4157. $u = \pi\varrho_0 \left\{ (h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2} + z\sqrt{a^2+z^2} - [(h-z) \times |h-z| + z|z|] + a^2 \ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\right| \right\}$. 4158. $X=0$; $Y=0$; $Z = -\frac{kMm}{a|a|}$, si $|a| \geq R$, $Z = -\frac{kMm}{R^3}a$, si $|a| < R$. 4159. $X=0$; $Y=0$; $Z = -2\pi\varrho_0 k\{\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{a^2+(h-z)^2} - (|z| - |h-z|)\}$. 4160. $X=0$; $Y=0$; $Z = -\pi k\varrho_0 R \sin^2\alpha$.

4221. $1+\sqrt{2}$. 4222. $\frac{256}{15}a^3$. 4223. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$. 4224. $\frac{a^3}{6}(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}2t_0-1)$.

4225. $4a^{\frac{7}{3}}$. 4226. $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$. 4227. $2a^2(2-\sqrt{2})$. 4228. $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.

4229. $2a^2$. 4230. $\frac{\pi}{a}$. 4231. 5. 4232. $\sqrt{3}$. 4233. $|x_0|+|z_0|$, donde $|x_0|<a$.

4234. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. 4235. $\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. 4236. $a\sqrt{2}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$. 4237. $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. 4238. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

4239. $\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$. 4240. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$.

4241. $2b\left(b+a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, donde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es la excentricidad de la elipse.

4241.1. $\frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1)$. 4242. $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. 4243. $x_0=$ $=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. 4244. $x_0=y_0=\frac{4}{3}a$. 4244.1. $S_x=$ $=S_y=\frac{3}{5}a^2$. 4244.2. πa^3. 4244.3. a) $\frac{32}{3}a^3$; b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. 4244.4. $r_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

4245. $x_0=y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}$. 4246. $x_0=\frac{2}{5}$; $y_0=-\frac{1}{5}$; $z_0=\frac{1}{2}$. 4247. $I_x=I_y=$ $=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. 4248. a) 0; b) $\frac{2}{3}$; c) 2

4249. a) 2; b) 2; c) 2. 4250. $-\frac{14}{15}$. 4251. $\frac{4}{3}$. 4252. 0. 4253. $-2\pi a^2$. 4254. -2π.

4255. 0. 4256. 0. 4257. $\frac{\pi}{4}-1$. 4258. 8. 4259. 12. 4260. 4. 4261. -2.

4262. $\int_0^{a+b}f(u)\,du$. 4263. $-\frac{3}{2}$. 4264. 9. 4265. $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. 4266. 62.

4267. 1. 4268. $\pi+1$. 4269. $e^a\cos b-1$. 4271. $z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$.

4272. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$. 4273. $z=-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+\ln|x+y|+C$. 4274. $z=$

$= e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$. **4275.** $z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\,\partial y^m}+C$. **4276.** $z=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\,\partial y^m}\times$ $\times\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)+C$. **4278.** $|I_R|\leqslant\frac{8\pi}{R^2}$. **4279.** $\frac{1}{35}$. **4280.** $-\pi a^2$. **4281.** $2\pi\sqrt{2}a^2\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$. **4282.** $-\frac{\pi a^3}{4}$. **4283.** -4. **4284.** $-53\frac{7}{12}$. **4285.** 0. **4286.** $b-a$.

4287. $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy+\int\limits_{z_1}^{z_2}\chi(z)\,dz$. **4288.** $\int\limits_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2}f(u)\,du$.

4289. $\int\limits_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}uf(u)\,du$. **4290.** $u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$. **4291.** $u=$ $=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$. **4292.** $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\operatorname{arctg}\frac{z}{x+y}+C$. **4293.** $A=$ $=-mg(z_2-z_1)$. **4294.** $A=-\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. **4295.** $A=k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$, donde $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1, 2)$. **4296.** $I=\iint\limits_S y^2\,dx\,dy$. **4297.** $-46\frac{2}{3}$. **4298.** $\frac{\pi a^4}{2}$.

4299. $-2\pi ab$. **4300.** $-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$. **4301.** 0. **4302.** $I_1-I_2=2$. **4303.** $\frac{\pi ma^2}{8}$.

4304. $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$. **4305.** $P=$ $=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$, donde u es una función dos veces diferenciable y k es una constante. **4306.** $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$. **4307.** 1) $I=0$; 2) $I=2\pi$.

4308. πab. **4309.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **4310.** $\frac{a^2}{6}$. **4311.** $\frac{3}{2}a^2$. **4312.** a^2. **4313.** $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

4314. $\frac{a^2}{2}\mathrm{B}(2m+1,\ 2n+1)$. **4315.** $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **4316.** $\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$.

4317. $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. **4318.** $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. **4319.** $\pi(n-1)(n-2)r^2$; $6\pi r^2$.

4320. $4a^2$. **4321.** $\operatorname{sgn}(ad-bc)$. **4322.** $I=\sum\operatorname{sgn}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$, donde la suma se extiende a todos los puntos de intersección de las curvas: $\varphi(x, y)=0$ y $\psi(x, y)=0$, situados en la parte interior del circuito C. **4324.** $I=2S$, donde S es el área de la figura limitada por el circuito C. **4325.** $X'_x(x_0, y_0)+$ $+Y'_y(x_0, y_0)$. **4326.** Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes de coordenadas son iguales a: $X=0$; $Y=\frac{2kmM}{\pi a^2}$, donde k es la constante de gravitación. **4327.** $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{R}$, si

$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R$; $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{\varrho}$, si $\varrho>R$. **4328.** $I_1=\frac{\pi}{m}\varrho^m\cos m\varphi$, $I_2=$ $=\frac{\pi}{m}\varrho^m\sin m\varphi$, si $0\leqslant\varrho\leqslant 1$; $I_1=\frac{\pi}{m}\varrho^{-m}\cos m\varphi$, $I_2=\frac{\pi}{m}\varrho^{-m}\sin m\varphi$, si $\rho>1$. 4329. $u=2\pi$ si el punto A (x, y) está situado en el interior del circuito C; $u=\pi$ si el punto A (x, y) está situado en el circuito C; $u=0$ si el punto A (x, y) está situado en el exterior al circuito C. **4330.** $K_1=\pi\varrho^m\cos m\varphi$, $K_2=\pi\varrho^m\sin m\varphi$, si $0\leqslant\varrho<1$; $K_1=0$, $K_2=0$, si $\varrho=1$; $K_1=-\frac{\pi}{\varrho^m}\cos m\varphi$, $K_2=-\frac{\pi}{\varrho^m}\sin m\varphi$, si $\varrho>1$. **4339.** $Q=$ $=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$. **4340.** $H_x=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)\,dz-(\zeta-z)\,dy]$; $H_y=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)\,dx-(\xi-x)\,dz]$; $H_z=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)\,dy-(\eta-y)\,dx]$.

4341. $I_1-I_2=(4\pi-2\sqrt{3})\,a^4$. **4342.** $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}\,a^3$. **4343.** πa^3. **4344.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. **4345.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. **4346.** $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **4347.** $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. **4348.** $\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]$. **4349.** $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ **4350.** $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$. **4352.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **4352.1.** πa^2. **4352.2.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **4353.** $\frac{4}{3}\pi\varrho_0 a^4$. **4354.** $\frac{\pi\varrho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. **4355.** $x_0=\frac{a}{2}$; $y_0=0$; $z_0=\frac{16}{9\pi}a$. **4356.** $x_0=y_0=\frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$. **4356.1.** a) $40\,a^4$; b) $\pi R\left[R(R+H)^2+\frac{2}{3}H^2\right]$. **4356.2.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 4375. Las proyecciones de la fuerza de atracción sobre los ejes de coordenadas son: $X=0$; $Y=0$; $Z=\pi km\rho_0\ln\frac{a}{b}$. **4358.** $u=4\pi\varrho_0\min\left(a,\frac{a^2}{r_0}\right)$, donde $r_0=$ $=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **4359.** $F(t)=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$, si $|t|\leqslant\sqrt{3}$; $F(t)=0$, si $|t|>\sqrt{3}$. **4360.** $F(t)=\frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. **4361.** $F=0$, si $t\leqslant r-a$; $F=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2]$, si $r-a<t<r+a$; $F=0$, si $t>r+a$ $(t\geqslant 0)$. **4362.** $4\pi a^3$. **4363.** $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$. **4364.** 0. **4365.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. **4366.** $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$. **4367.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **4368.** $\frac{h^3}{3}$. **4369.** 2 пл.S. **4370.** 0. **4371.** $-2\pi a(a+h)$. **4372.** $2\pi Rr^2$. **4373.** $-\frac{9}{2}a^3$. **4374.** 0.

4376. $3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. **4377.** 0. **4378.** $2\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4379. $\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz$, donde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4380.** 0. **4384.** $\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|$.

4385. $\frac{2}{9}a^3$. **4385.1.** $2\pi^2a^2b$. **4387.** $3a^4$. **4388.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4389.** 1. **4390.** $-\frac{\pi h^4}{2}$.

4392. a) $I=0$; b) $I=4\pi$. **4401.** a) $\operatorname{grad} u(0)=3i-2j-6k$, $|\operatorname{grad} u(0)|=7$, $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$; b) $\operatorname{grad} u(A)=6i+3j$, $|\operatorname{grad} u(A)|=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$; c) $\operatorname{grad} u(B)=7i$, $|\operatorname{grad} u(B)|=7$, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$; $\operatorname{grad} u=0$ en el punto $M(-2,1,1)$.

4401.1. $\operatorname{grad} u(M)=12i-9j-20k$, $|\operatorname{grad} u(M)|=25$, $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. **4402.** a) $xy=z^2$; b) $x=y=0$ y $x=y=z$; c) $x=y=z$. **4403.** $r=1$ **4404.** $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1$ $(u\geqslant 16)$; $\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1$; $\max u=20$. **4405.** $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$. **4406.** Las superficies de nivel son las hojas de conos; las superficies de nivel del módulo del gradiente son toros; $\inf u=0$,
$\sup u=1$; $\inf|\operatorname{grad} u|=0$, $\sup|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{2}$. **4407.** $\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0,y_0,z_0)|}$.

4409. a) $\frac{r}{r}$; b) $2r$; c) $-\frac{r}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\frac{r}{r}$. **4411.** c. **4412.** $2r(c\cdot c)-2c(c\cdot r)$.

4415.1. a) $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}e_z$, donde $e_r=i\cos\varphi+j\sin\varphi$, $e_\varphi=-i\sin\varphi+j\cos\varphi$, $e_z=k$ son los vectores unitarios, tangentes a las curvas coordenadas correspondientes;
b) $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi$, donde $e_r=i\cos\varphi\sin\theta+j\sin\varphi\sin\theta+k\cos\theta$, $e_\theta=i\cos\varphi\cos\theta+j\sin\varphi\cos\theta-k\sin\theta$, $e_\varphi=-i\sin\varphi+j\cos\varphi$ son los vectores unitarios, tangentes a las curvas coordenadas correspondientes.

4416. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2u}{r}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial r}=|\operatorname{grad} u|$, si $a=b=c$.

4417. $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{\cos(l,r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, si $l\perp r$. **4418.** $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\operatorname{grad} u\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, si $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$. **4419.** $a=\frac{i(\sqrt{x^2+y^2}+yz)-j(\sqrt{x^2+y^2}+xz)+k(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.

4420. $y=c_1x$, $z=c_2x^2$. **4422.1.** $\operatorname{div} a(M)=\frac{18}{125}$; $\Pi=\frac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. **4423.** 0.

4425. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\Delta u$, donde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$; $f(r)=$

$=c+\frac{c_1}{r}$, donde c y c_1 son constantes. 4427. a) 3; b) $\frac{2}{r}$. 4428. $\frac{f'(r)}{r}(c\cdot r)$.

4429. $3f(r)+rf'(r)$; $f(r)=\frac{c}{r^3}$, donde c es una constante. 4430. a) $u\,\Delta u+(\mathrm{grad}\,u)^2$, b) $u\,\Delta v+\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v$, donde Δu es el operador de Laplace. 4431. $\mathrm{div}\,v=0$; $\mathrm{div}\,w=-2\omega^2$. 4432. O, fuera de los centros de atracción.

4433. $\mathrm{div}\,a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$, donde a_r, a_φ son las proyecciones del vector a sobre las curvas coordenadas $\varphi=\mathrm{const}$ y $r=\mathrm{const}$. 4434.

4434. $\mathrm{div}\,a=\frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MN\,a_u)+\frac{\partial}{\partial v}(NLa_v)+\frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$, donde a_u, a_v, a_w son las proyecciones del vector a sobre las curvas coordenadas correspondientes y

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},\quad M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$ Si r, φ, z son las coordenadas cilíndricas, entonces $\mathrm{div}\,a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; si r, θ, φ son las coordenadas esféricas, entonces $\mathrm{div}\,a=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r\sin\theta)+r\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$.

4436. a) 0; b) 0. 4436.1. $\mathrm{rot}\,a(M)=-\frac{5}{4}i-j+\frac{5}{2}k$, $|\mathrm{rot}\,a(M)|=\frac{1}{4}\sqrt{141}$, $\cos\alpha=\frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos\gamma=\frac{10}{\sqrt{141}}$. 4437. a) $\frac{f'(r)}{r}[r\times c]$; b) $2f(r)c+\frac{f'(r)}{r}[c(r\cdot r)-r(c\cdot r)]$. 4439. a) 0; b) 0. 4440. $\mathrm{rot}\,v=2\omega$.

4440.1. $\mathrm{rot}\,a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]k$, donde a_φ y a_r son las proyecciones, del vector a sobre las curvas coordenadas respectivas $r=\mathrm{const}$ y $\varphi=\mathrm{const}$.

4440.2. a) $\mathrm{rot}\,a=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)e_r+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_\varphi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]e_z$, donde $a_r=a_x\cos\varphi+a_y\sin\varphi$, $a_\varphi=-a_x\sin\varphi+a_y\cos\varphi$, $a_z=a_z$; b) $\mathrm{rot}\,a=$
$=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]e_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right]e_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]e_\varphi$, donde $a_r=a_x\cos\varphi\sin\theta+a_y\sin\varphi\sin\theta+a_z\cos\theta$, $a_\theta=a_x\cos\varphi\cos\theta+a_y\sin\varphi\cos\theta-a_z\sin\theta$, $a_\varphi=-a_x\sin\varphi+a_y\cos\varphi$. 4441. a) 0; b) πh^3. 4442. a) 0; b) 0. 4443. π. 4444. $\frac{3\pi}{8}$. 4445. 0. 4445.1. $\frac{\pi}{5}$. 4447. $4\pi m$.

4448. $\sum_{i=1}^{n} e_i$. 4450. $c\varrho\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\,u)$, donde c es la capacidad calorífica específica y ρ es la densidad del cuerpo.

4452. $2\pi^2 b^2$. **4452.1.** $8\dfrac{20}{21}\cdot\ln 2$. **4452.2.** $\dfrac{3}{4}(3+e^4-12e^{-2})$. **4453.** $\int\limits_{r_A}^{r_B} f(r)\,r\,dr$.

4454. a) 2π; b) 2π. **4455.** a) $\Gamma=0$; b) $\Gamma=2\pi n$, donde n es el número de vueltas del circuito C en torno del eje Oz. **4455.1.** $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\Gamma=-\pi(\cos\beta+2\cos\gamma)\varepsilon^2$. **4456.** $Q=\iint\limits_S\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$; $\Gamma=\iint\limits_S\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$. **4457.** $u=xyz\,(x+y+z)+C$.

4457.1. $\dfrac{1}{3}$. **4458.** $u=\dfrac{m}{r}$. **4459.** $u(x,y,z)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{m_i}{r_i}$, donde r_i es la distancia del punto variable $M(x,y,z)$ al punto M_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

4660. $u(x,y,z)=\int\limits_{r_0}^{r} tf(t)\,dt$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.