SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

CALCULO
diferencial e integral

FRANK AYRES, JR., Ph. D.

Formerly Professor and Head,
Department of Mathematics
Dickinson College

•

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ
Ingeniero de Armamento

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
Ingeniero de Armamento
Licenciado en Ciencias Físicas
Diplomado en Ingeniería Nuclear

SELECCIÓN
ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Capítulo 56

Derivadas parciales

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. Si a cada punto (x, y) de una región del plano xy se le hace corresponder un número real z, diremos que z es una función, $z = f(x, y)$, de las variables independientes x e y. El lugar geométrico de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ es una superficie. Análogamente se definen las funciones $w = f(x, y, z, \ldots)$ de varias variables independientes aunque, por el momento, no tengan una interpretación geométrica sencilla.

El estudio de las funciones de dos variables difiere notablemente del de las funciones de una variable. Sin embargo, el cálculo de las funciones de tres o más variables es muy similar al caso de dos variables. En este libro trataremos, fundamentalmente, de las funciones de dos variables.

Una función $f(x, y)$ tiende al límite A cuando $x \to x_0$ e $y \to y_0$, si dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existe un $\delta > 0$ tal que, para todos los pares de valores (x, y) que cumplan la desigualdad

(i) $$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

se verifica: $|f(x, y) - A| < \epsilon$. La condición (i) representa un intervalo reducido del punto (x_0, y_0), es decir, todos los puntos excepto el propio (x_0, y_0), situados en un círculo de radio δ y centro (x_0, y_0).

Una función $f(x, y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) siempre que $f(x_0, y_0)$ esté definida y, además, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

(Ver Problemas 1-2.)

DERIVADAS PARCIALES. Sea $z = f(x, y)$ una función de las variables independientes x e y. Como x e y son independientes, podremos **(i)** variar x manteniendo constante y, **(ii)** variar y manteniendo constante x, **(iii)** variar x e y simultáneamente. En los dos primeros casos, z es una función de una sola variable y se puede hallar su derivada de acuerdo con las expresiones clásicas que ya hemos visto.

Si x varía permaneciendo constante y, z es una función de x y su derivada con respecto a esta variable x,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se denomina *primera derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* x.

Si lo que varía es y permaneciendo constante x, z es una función de y y su derivada con respecto a y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

recibe el nombre de *primera derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* y.

(Ver Problemas 3-8.)

Si z está definida implícitamente como función de x e y mediante la relación $F(x, y, z) = 0$, para hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ no hay más que aplicar las fórmulas de la derivación implícita dadas en el Capítulo 6.

(Ver Problemas 9-12.)

Las derivadas parciales anteriores admiten una interpretación geométrica muy sencilla. Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ de la Fig. 56-1, y sean APB y CPD las intersecciones con dicha superficie de los planos que pasando por P sean paralelos a los xOz e yOz, respectivamente. Si hacemos variar a x permaneciendo constante y, el punto P se desplazará a lo largo de la curva APB y el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en el punto P es la pendiente de la curva APB en P.

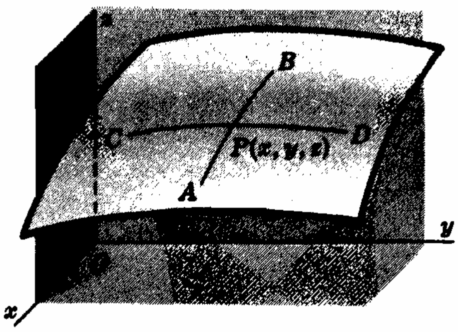

Fig. 56-1

Análogamente, si hacemos variar y permaneciendo constante x, P se moverá a lo largo de la curva CPD, y el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en P es la pendiente de la curva CPD en P.

(Ver Problema 13.)

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR. La derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ de $z = f(x, y)$ se puede a su vez derivar parcialmente con respecto a x y a y, dando lugar a las segundas derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f_{yx}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Análogamente, de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se obtienen $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f_{xy}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Si $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales son continuas es indiferente el orden de derivación, es decir, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

(Ver Problemas 14-15.)

Problemas resueltos

1. Estudiar la continuidad de la función $z = x^2 + y^2$.

   Para cualquier conjunto de valores finitos $(x, y) = (a, b)$, $z = a^2 + b^2$.
   Cuando $x \to a$ e $y \to b$, $x^2 + y^2 \to a^2 + b^2$.
   Por tanto, la función es continua para todos los valores de las variables.

2. Las funciones siguientes, son continuas en todos los puntos salvo en el origen (0,0), en el que no están definidas. ¿Cómo se puede hacer que sean también continuas en dicho punto?

   (*a*) $z = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$.

   Supongamos que $(x, y) \to (0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$; tendremos $z = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} = \dfrac{\operatorname{sen}(1 + m)x}{(1 + m)x} \to 1$,

   Se puede hacer que la función sea continua en todos los puntos definiéndola como sigue: $z = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$, $(x,y) \neq (0, 0)$; $z = 1$, $(x, y) = (0, 0)$.

   (*b*) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

   Supongamos que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$; el valor límite de $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{m}{1 + m^2}$ depende de la recta que se elija. Por tanto, la función no se puede hacer continua en (0, 0).

Hallar las derivadas parciales de primer orden en los Problemas 3-7.

3. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$.

   Considerando y constante y derivando con respecto a x, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$.

   Considerando x constante y derivando con respecto a y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}, = -3x + 8y$.

4. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.

Considerando y constante y derivando con respecto a x, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}$.

Considerando x constante y derivando con respecto a y, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$.

5. $z = \text{sen}\,(2x + 3y)$. $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+3y),\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x+3y)$

6. $z = \text{arc tag}\; x^2y + \text{arc tag}\; xy^2$. $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{1+x^4y^2} + \dfrac{y^2}{1+x^2y^4},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{1+x^4y^2} + \dfrac{2xy}{1+x^2y^4}$

7. $z = e^{x^2+xy}$. $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+xy}(2x+y) = z(2x+y),\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+xy}(x) = xz$

8. El área de un triángulo viene dada por $K = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C$. Si $a = 20$, $b = 30$ y $C = 30°$, hallar las variaciones:

(*a*) de K con respecto a a, suponiendo b y C constantes.
(*b*) de K con respecto a C, suponiendo a y b constantes.
(*c*) de b con respecto a a, suponiendo K y C constantes.

(*a*) $\dfrac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b\,\text{sen}\,C = \frac{1}{2}(30)(\text{sen}\,30°) = \dfrac{15}{2}$,

(*b*) $\dfrac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30°) = 150\sqrt{3}$

(*c*) $b = \dfrac{2K}{a\,\text{sen}\,C}$; $\dfrac{\partial b}{\partial a} = \dfrac{2K}{a^2\,\text{sen}\,C} = -\dfrac{2(\frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C)}{a^2\,\text{sen}\,C} = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$

Hallar, en los Problemas 9-11, las derivadas parciales de primer orden de z con respecto a las variables independientes x e y.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

***Solución* 1.** Despejando z obtenemos $z = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm\sqrt{25-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z} \quad\text{y}\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm\sqrt{25-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$$

***Solución* 2.** Derivando implícitamente con respecto a x, tomando y constante.

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad\text{y}\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

Derivando implícitamente con respecto a y, tomando x constante.

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad\text{y}\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

10. $x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz$.

En este caso, sería muy complicado seguir el procedimiento de la solución 1 del Problema 9.

Derivando inplícitamente con respecto a x,

$$2x(2y+3z) + 3x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

Derivando implícitamente con respecto a y,

$$2x^2 + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x-4z) - 4y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial y} - 2z^2 = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2z^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

11. $xy + yz + zx = 1.$

Derivando con respecto a x, $y + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + z = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y+z}{x+y}.$

Derivando con respecto a y, $x + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + z + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+z}{x+y}$

12. Considerando x e y como variables independientes, calcular $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ siendo $x = e^{2r}, \cos\theta$, $y = e^{3r}$, sen θ.

Derivando las relaciones parcialmente con respecto a x:

$$1 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \text{y} \quad 0 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} + e^{3r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}.$

Derivando las relaciones parcialmente con respecto a y:

$$0 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{y} \quad 1 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} + e^{3r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{2\cos\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}.$

13. Hallar la pendiente de las tangentes a las curvas intersección de la superficie $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ con los planos que pasan por el punto (1, 1, 1) y son paralelos a los planos coordenados xOz e yOz.

El plano $x = 1$, paralelo al yOz, corta a la superficie según la curva $z = 4y^2 - 3$, $x = 1$. Por tanto, la pendiente pedida es $\partial z/\partial y = 8y = 8 \cdot 1 = 8$.

El plano $y = 1$, paralelo al xOz, corta a la superficie según la curva $z = 3x^2 - 2$, $y = 1$. Por tanto, la pendiente pedida es $\partial z/\partial x = 6x = 6$.

Hallar, en los Problemas 14-15, las segundas derivadas parciales de z.

14. $z = x^2 + 3xy + y^2.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

15. $z = x\cos y - y\cos x.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\operatorname{sen}x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\operatorname{sen}y - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y\cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\operatorname{sen}y + \operatorname{sen}x = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -x\cos y$$

Problemas propuestos

16. Estudiar la continuidad en el punto (0,0) de las funciones siguientes:

(*a*) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, (*b*) $\dfrac{x-y}{x+y}$, (*c*) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (*d*) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ *Sol.* (*a*) No, (*b*) No, (*c*) Sí, (*d*) No.

17. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en las funciones siguientes:

(*a*) $z = x^2 + 3xy + y^2$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

(*b*) $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2y}{x^3},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^3} - \dfrac{1}{x^2}$

(*c*) $z = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3\cos 3x \cos 4y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 4y$

(*d*) $z = \operatorname{arc\,tag} \dfrac{y}{x}$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

(*e*) $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{9z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4y}{9z}$

(*f*) $z^3 - 3x^2y + 6xyz = 0$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2y(x - z)}{z^2 + 2xy},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x(x - 2z)}{z^2 + 2xy}$

(*g*) $yz + xz + xy = 0$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y + z}{x + y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x + y}$

18. (*a*) Si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

(*b*) Si $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

(*c*) Si $z = e^{x/y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y} + e^{y/x} \cos \dfrac{y}{x}$, demostrar que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(*d*) Si $z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \operatorname{sen}(ax + by)$, demostrar que $b \dfrac{\partial z}{\partial x} = a \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

19. Hallar la ecuación de la tangente

(*a*) a la parábola $z = 2x^2 - 3y^2$, $y = 1$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $8x + z + 11 = 0, y = 1$

(*b*) a la parábola $z = 2x^2 - 3y^2$, $x = -2$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $6y + z - 11 = 0, x = -2$

(*c*) a la hipérbola $z = 2x^2 - 3y^2$, $z = 5$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $4x + 3y + 5 = 0, z = 5$

Demostrar que las tres rectas están situadas en el plano $8x + 6y + z + 5 = 0$.

20. Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, en las funciones siguientes:

(*a*) $z = 2x^2 - 5xy + y^2$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -5,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

(*b*) $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{6y}{x^4},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2\left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{y^3}\right),\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{6x}{y^4}$

(*c*) $z = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -12 \cos 3x \operatorname{sen} 4y,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z$

(*d*) $z = \operatorname{arc\,tag} \dfrac{y}{x}$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

21. (*a*) Si $z = \dfrac{xy}{x - y}$, demostrar que $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(*b*) Si $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ y $\beta = \pm\alpha$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(*c*) Si $z = e^{-t}(\operatorname{sen} x + \cos y)$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$

(*d*) Si $z = \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} by \operatorname{sen} kt\sqrt{a^2 + b^2}$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\}$.

22. En la fórmula de los gases reales $\left(p + \dfrac{a}{v^2}\right)(v - b) = ct$, siendo a, b y c constantes, demostrar que

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v - b) - (p + a/v^2)v^3}{v^3(v - b)},\quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^3}{(p + a/v^2)v^3 - 2a(v - b)},\quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v - b}{c},\quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right) = -1$$

Capítulo 57

Diferenciales y derivadas totales

DIFERENCIALES TOTALES. Las diferenciales, dx y dy de la función $y = f(x)$ de una sola variable independiente, según vimos en el Capítulo 23, vienen dadas por

$$dx = \Delta x, \qquad dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}dx$$

Consideremos la función $z = f(x, y)$ de las dos variables independientes x e y, y sean $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. Al variar x permaneciendo constante y, z resulta una función de x solamente y *la diferencial parcial de z con respecto a x* será $d_x z = f_x(x, y)dx = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx$. Análogamente, *la diferencial parcial de z con respecto a y* viene dada por $d_y z = f_y(x, y)\,dy = \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$. Pues bien, *la diferencial total de z* es la suma de las diferenciales parciales anteriores, es decir,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{1}$$

Para una función $w = F(x, y, z, \ldots t)$, la diferencial total dw se define por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial w}{\partial t}dt \tag{1'}$$

(Ver Problemas 1-2.)

Como ocurre con las funciones de una sola variable, la diferencial total de una función de varias variables es un valor muy próximo al incremento total de la función cuando las variables independientes experimentan un incremento pequeño.

Ejemplo:

Sea $z = xy$; $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy = y\,dx + x\,dy$; si se incrementan x e y en $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, respectivamente, el incremento Δz de z será

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \\ &= x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y \\ &= x\,dy + y\,dx + dx\,dy\end{aligned}$$

En la Fig. 57-1, se hace una interpretación geométrica. Como se puede observar, dz y Δz difieren en un rectángulo de área $\Delta x\ \Delta y = dx\,dy$.

(Ver Problemas 3-9.)

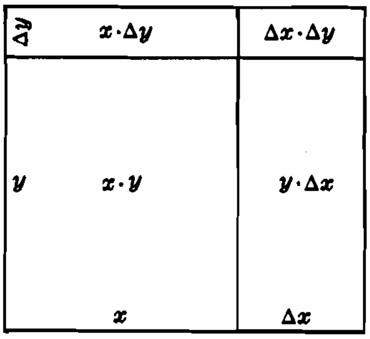

Fig. 57-1

DERIVADA TOTAL DE UNA FUNCION DE FUNCION. Sea $z = f(x, y)$ una función continua de las variables x, y con derivadas parciales, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, continuas y x e y funciones derivables $x = g(t)$, $y = h(t)$ de una variable t; en estas condiciones, z es una función de t y su derivada total, dz/dt, con respecto a t viene dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2}$$

Análogamente, sea $w = f(x, y, z, \ldots)$ una función continua de las variables $x, y, z, \ldots$, con derivadas parciales continuas, y $x, y, z, \ldots$, funciones derivables de una variable t; la derivada total de w con respecto a t viene dada por

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots \qquad (2')$$

(Ver problemas 10-16)

Si $z = f(x, y)$ es una función continua de las variables x e y y sus derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son continuas, y x e y son, a su vez, funciones continuas, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, de las variables independientes r y s, z es una función de t, siendo

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (3)$$

Análogamente, si $w = f(x, y, z, \ldots)$ es una función continua de n variables $x, y, z, \ldots$ y sus derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial z, \ldots$, y $x, y, z, \ldots$ son funciones continuas de m variables independientes $r, s, t, \ldots$, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \cdots \quad \text{etc.} \end{aligned} \qquad (3')$$

(Ver problemas 17-19)

Problemas resueltos

Hallar la diferencial total en los problemas 1-2.

1. $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

Por tanto $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (3x^2y + 2xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)\,dy$$

2. $z = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} y - y\cos x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y - \operatorname{sen} x$$

Por tanto $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (\operatorname{sen} y - y\cos x)\,dx + (x\cos y - \operatorname{sen} x)\,dy$$

3. Comparar dz y Δz, en la función $z = x^2 + 2xy - 3y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \qquad dz = 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x+dx)^2 + 2(x+dx)(y+dy) - 3(y+dy)^2] - (x^2 + 2xy - 3y^2) \\ &= 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy + (dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2 \end{aligned}$$

Así, pues, dz y Δz difieren en $(dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2$.

4. Hallar un valor aproximado del área de un rectángulo de dimensiones 35,02 por 24,97 unidades.

Llamando x e y a los lados del rectángulo, el área es $A = xy$, con lo cual $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy$.

Para $x = 35$, $dx = 0{,}02$, $y = 25$, $dy = -0{,}03$, resulta $A = 35 \times 25 = 875$ y $dA = 25(0{,}02) + 35(-0{,}03) = -0{,}55$
El área es, aproximadamente, $A + dA = 874{,}45$ unidades de superficie.

5. Hallar, aproximadamente, la variación de longitud que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 centímetros, cuando el primero se alarga $\frac{1}{4}$ centímetros y el segundo lo hace en $\frac{1}{8}$ centímetros.

Sean x, y, z los catetos menor, mayor y la hipotenusa del triángulo, respectivamente. Tendremos

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Para $x = 6$, $y = 8$, $dx = 1/4$, y $dy = -1/8$, de donde $dz = \dfrac{6(1/4) + 8(-1/8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = 1/20$ cm. Por tanto, la hipotenusa se alarga aproximadamente 1/20 centímetros.

6. La potencia calorífica disipada en una resistencia eléctrica viene dada por $P = E^2/R$ vatios. Siendo $E = 200$ voltios y $R = 8$ ohmios, hallar la disminución que experimenta la potencia cuando E disminuye en 5 voltios y R lo hace en 0,2 ohmios.

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$$

Para $E = 200$, $R = 8$, $dE = -5$, y $dR = -0{,}2$, por tanto,

$$dP = \frac{2\cdot 200}{8}(-5) - \left(\frac{200}{8}\right)^2(-0{,}2) = -250 + 125 = -125 \text{ watts}$$

La potencia disminuye aproximadamente 125 vatios.

7. Al medir un bloque paralelepipédico de madera, han resultado, para sus dimensiones, los valores 10, 12 y 20 centímetros con un error probable de 0,05 centímetros en cada una. Hallar, aproximadamente, el máximo error que se puede cometer al evaluar el área total del bloque y el porcentaje de error respecto del área como consecuencia de los errores en las medidas individuales.

El área total es $S = 2(xy + yz + zx)$; luego

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 2(y+z)\,dx + 2(x+z)\,dy + 2(y+x)\,dz$$

El máximo error en S tendrá lugar cuando los errores en las longitudes sean del mismo signo, por ejemplo, positivos.

$$dS = 2(12 + 20)(0{,}05) + 2(10 + 20)(0{,}05) + 2(12 + 10)(0{,}05) = 8{,}4 \text{ cm}^2$$

El porcentaje de error es (error/área)(100) = (8,4/1120)(100) = 0,75 %.

8. En la fórmula $R = E/C$, hallar el error máximo y el porcentaje de error si $C = 20$ con un error probable de 0,1 y $E = 120$ con un error probable de 0,05.

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E}dE + \frac{\partial R}{\partial C}dC = \frac{1}{C}dE - \frac{E}{C^2}dC$$

El error máximo se dará cuando $dE = 0{,}05$ y $dC = -0{,}1$; luego

$$dR = \frac{0{,}05}{20} - \frac{120}{400}(-0{,}1) = 0{,}0325 \text{ es aproximadamente el error máximo}$$

El porcentaje de error es $\dfrac{dR}{R}(100) = \dfrac{0{,}0325}{8}(100) = 0{,}40625 = 0{,}41\ \%$.

9. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 metros y el ángulo que forman es de 60°. Sabiendo que los errores probables en la medición son de 0,2 metros en la medida de los lados y de 1° en la del ángulo, hallar el máximo error probable que se puede cometer al evaluar su área.

$$A = \tfrac{1}{2}xy \operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial x = \tfrac{1}{2}y\operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial y = \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial\theta = \tfrac{1}{2}xy\cos\theta$$

y

$$dA = \tfrac{1}{2}y\operatorname{sen}\theta\,dx + \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}\theta\,dy + \tfrac{1}{2}xy\cos\theta\,d\theta$$

Para $x = 150$, $y = 200$, $\theta = 60°$, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$, y $d\theta = 1° = \pi/180$, luego

$$dA = \tfrac{1}{2}(200)(\operatorname{sen}60°)(0{,}2) + \tfrac{1}{2}(150)(\operatorname{sen}60°)(0{,}2) + \tfrac{1}{2}(150)(200)(\cos 60°)(\pi/180) = 161{,}21 \text{ m}^2.$$

10. Hallar dz/dt, siendo $z = x^2 + 3xy + 5y^2$; $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t$$

luego

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x + 3y)\cos t - (3x + 10y)\operatorname{sen} t$$

11. Hallar dz/dt, siendo: $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = e^{-t}$, $y = e^t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

Luego
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2+y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2+y^2}(e^t) = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2+y^2}$$

12. Sea $z = f(x,y)$ una función continua de x e y cuyas derivadas parciales, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, son continuas, y sea y una función derivable de x. En estas condiciones, z es una función derivable de x y, según (2),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Hemos puesto f en lugar de z, para evitar la confusión entre dz/dx y $\partial z/\partial x$ en la misma expresión.

13. Hallar dz/dx, siendo: $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $y = e^{ax}$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (2x+2y) + (2x+8y)ae^{ax} = 2(x+y) + 2a(x+4y)e^{ax}$$

14. Hallar (*a*) dz/dx y (*b*) dz/dy, siendo: $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y$, $y = \ln x$.

(*a*) En este caso x es la variable independiente.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (y^2+2xy) + (2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 + 2xy + 2y + x$$

(*b*) Aquí y es la variable independiente.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2+2xy)x + (2xy+x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$

15. La altura de un cono recto circular mide 15 centímetros y disminuye a razón de 0,2 centímetros cada minuto. El radio de la base mide 10 centímetros y disminuye a razón de 0,3 centímetros cada minuto. Hallar la variación de volumen que experimenta en la unidad de tiempo.

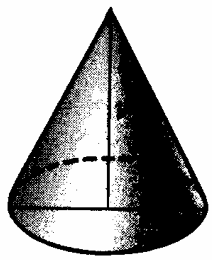

Fig. 57-2

Sea x = radio e y = altura del cono. De $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, tomando a x e y como funciones del tiempo t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi[2\cdot 10\cdot 15\cdot(-0{,}3) + 10^2\cdot(0{,}2)] = -70\pi/3 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

16. Un punto P se mueve a lo largo de la curva de intersección del paraboloide $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = z$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 5$, en donde x, y y z se expresan en centímetros. Si x aumenta a razón de 0,2 centímetros por minuto, hallar la variación de z en la unidad de tiempo cuando $x = 2$.

De $z = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9}$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{8}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{2y}{9}\dfrac{dy}{dt}$

Como $x^2 + y^2 = 5$, $y = \pm 1$ para $x = 2$; también, $x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} = 0$.

Para $y = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2}{1}(0{,}2) = -0{,}4$ y $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2}{8}(0{,}2) - \dfrac{2}{9}(-0{,}4) = \dfrac{5}{36}$ cm/min.

Para $y = -1$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt} = 0{,}4$ y $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2}{8}(0{,}2) - \dfrac{2}{9}(-1)(0{,}4) = \dfrac{5}{36}$ cm/min.

17. Hallar $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$, siendo: $z = x^2 + xy + y^2$; $x = 2r + s$, $y = r - 2s$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

Luego
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x+y)(2) + (x+2y)(1) = 5x + 4y$$

y
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)(1) + (x+2y)(-2) = -3y$$

18. Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \beta}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$, siendo: $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2$, $x = \varrho \operatorname{sen}\beta\cos\theta$, $y = \varrho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta$, $z = \varrho\cos\beta$.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x\operatorname{sen}\beta\cos\theta + 4y\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta + 4z\cos\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x\,\varrho\cos\beta\cos\theta + 4y\,\varrho\cos\beta\operatorname{sen}\theta - 4z\,\varrho\operatorname{sen}\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x\,\varrho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta + 4y\,\varrho\operatorname{sen}\beta\cos\theta$$

19. Hallar du/dx, siendo: $u = f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $y = 1/x$, $z = x^2$.

Aplicando (3'),

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = (y+z) + (x+z)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + (y+x)2x = y + z + 2x(x+y) - \frac{x+z}{x^2}$$

20. Sea $z = f(x, y)$ una función continua de x e y, cuyas primeras derivadas parciales son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$. Deducir la expresión

$$\text{(A)} \qquad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

en donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx e $\Delta y \to 0$.

Cuando x e y se incrementan en Δx y Δy, respectivamente, el incremento experimentado por z vale

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \end{aligned}$$

En la primera expresión entre corchetes, la única variable es x, y en la segunda, solo varía y. Aplicando a cada uno de ellos el teorema del valor medio [(V) del Capítulo 21]:

$$\text{(ii)} \qquad f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x\cdot f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)$$

$$\text{(iii)} \qquad f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y\cdot f_y(x, y+\theta_2\Delta y)$$

siendo $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$. Obsérvese que aquí las derivadas consideradas son derivadas parciales.

Como $\partial z/\partial x = f_x(x, y)$ y $\partial z/\partial y = f_y(x, y)$ son, por hipótesis, funciones continuas de x e y,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y)$$

Luego $\qquad f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \epsilon_1, \quad f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \epsilon_2$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx e $\Delta y \to 0$.

Efectuando estas sustituciones en (ii) y (iii), y sustituyendo después en (i), resulta:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \{f_x(x,y) + \epsilon_1\}\Delta x + \{f_y(x,y) + \epsilon_2\}\Delta y \\ &= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \end{aligned}$$

Obsérvese que la diferencial total, dz, es un valor muy próximo al del incremento total, Δz, cuando $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$ sean muy pequeños.

Problemas propuestos

21. Hallar la diferencial total de:

(*a*) $z = x^3y + 2xy^3$ *Sol.* $dz = (3x^2 + 2y^2)y\,dx + (x^2 + 6y^2)x\,dy$

(*b*) $\theta = \text{arc tag } y/x$ *Sol.* $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

(*c*) $z = e^{x^2 - y^2}$ *Sol.* $dz = 2z(x\,dx - y\,dy)$

(*d*) $z = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ *Sol.* $dz = \dfrac{y(y\,dx - x\,dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

22. La frecuencia fundamental de vibración de un hilo o una varilla de sección circular sometidos a una tensión T viene dada por $n = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi d}}$, siendo l la longitud, r el radio y d la densidad. Calcular, aproximadamente, la variación de la frecuencia, cuando (*a*) l aumenta en dl, (*b*) T aumenta en dT, (*c*) l y T se modifican, simultáneamente, en las cantidades citadas.

Sol. (*a*) $-\dfrac{n}{l}\,dl$, (*b*) $\dfrac{n}{2T}\,dT$, (*c*) $n\left(-\dfrac{dl}{l} + \dfrac{dT}{2T}\right)$

23. Hallar, mediante el cálculo diferencial:

(*a*) el volumen de un prisma recto de base cuadrada de lado 8,005 y de altura 9,996 centímetros. *Sol.* 640,544 cm³.

(*b*) la diagonal de un prisma rectangular de dimensiones 3,03 por 5,98 por 6,01 metros. *Sol.* 9,003 m.

24. Calcular, aproximadamente, el máximo error probable y el porcentaje de error cuando se halla z mediante las fórmulas:

(*a*) $z = \pi r^2 h$; $r = 5 \pm 0{,}05$, $h = 12 \pm 0{,}1$. *Sol.* $8{,}5\pi$; 2,8 %

(*b*) $1/z = 1/f + 1/g$; $f = 4 \pm 0{,}01$. $g = 8 \pm 0{,}02$. *Sol.* 0,0067; 0,25 %

(*c*) $z = y/x$; $x = 1{,}8 \pm 0{,}1$, $y = 2{,}4 \pm 0{,}1$. *Sol.* 0,13; 10 %

25. Calcular, aproximadamente, el máximo porcentaje de error en:

(*a*) $\omega = \sqrt[3]{g/b}$ sabiendo que el error probable en la medida de g es del 1 %, y el correspondiente en la medida de b, ½ %

Ind. $\ln \omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b)$; $\dfrac{\partial\omega}{\omega} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{dg}{g} - \dfrac{db}{b}\right)$, $\left|\dfrac{dg}{g}\right| = 0{,}01$, $\left|\dfrac{db}{b}\right| = 0{,}005$. *Sol.* 0,005

(*b*) $g = 2s/t^2$ sabiendo que el error probable en la medida de s es del 1 %, y el de la medida de t, del ½ %.
Sol. 0,015.

26. Hallar du/dt, siendo:

(*a*) $u = x^2y^3$, $x = 2t^3$, $y = 3t^2$. *Sol.* $6xy^2t(2yt + 3x)$.

(*b*) $u = x\cos y + y \operatorname{sen} x$, $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$.
Sol. $2(\cos y + y\cos x)\cos 2t - 2(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} 2t$.

(*c*) $u = xy + yz + zx$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^t + e^{-t}$. *Sol.* $(x + 2y + z)e^t - (2x + y + z)e^{-t}$.

27. En un instante dado, el radio de un cilindro recto circular mide 6 centímetros y aumenta a razón de 0,2 centímetros por segundo, mientras que su altura, que mide 8 centímetros, disminuye a razón de 0,4 centímetros por segundo. Hallar la variación, con respecto al tiempo, del (*a*) volumen, (*b*) área total, en el instante considerado.
Sol. (*a*) $4{,}8\pi$ cm³/s, (*b*) $3{,}2\pi$ cm²/s.

28. Una partícula se mueve en un plano de forma que su abscisa y su ordenada vienen dadas, en función del tiempo, por $x = 2 + 3t$, $y = t^2 + 4$, en donde x e y se expresan en metros y t en minutos. Hallar la variación de la distancia al origen en la unidad de tiempo en el instante $t = 1$. *Sol.* $5/\sqrt{2}$ m/min.

29. Un punto se mueve a lo largo de la curva de intersección de la superficie $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ con el plano $x - 2y + 4 = 0$. Cuando $x = 2$ y aumenta a razón de 3 unidades por segundo, hallar (*a*) la variación de y en la unidad de tiempo, (*b*) la variación de z en la unidad de tiempo, (*c*) la velocidad del punto móvil.
Sol. (*a*) inc. 3/2 unidades/seg. (*b*) inc. 75/14 unidades/seg. en (2, 3, 7) y dec. 75/14 unidades/seg en (2, 3, —7), (*c*) 6,3 unidades/seg

30. Hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$, siendo:

(*a*) $z = x^2 - 2y^2,\ x = 3s + 2t,\ y = 3s - 2t.$ *Sol.* $6(x - 2y),\ 4(x + 2y)$

(*b*) $z = x^2 + 3xy + y^2,\ x = \operatorname{sen} s + \cos t,\ y = \operatorname{sen} s - \cos t.$ *Sol.* $5(x + y)\cos s,\ (x - y)\operatorname{sen} t$

(*c*) $z = x^2 + 2y^2,\ x = e^s - e^t,\ y = e^s + e^t.$ *Sol.* $2(x + 2y)e^s,\ 2(2y - x)e^t$

(*d*) $z = \operatorname{sen}(4x + 5y),\ x = s + t,\ y = s - t.$ *Sol.* $9\cos(4x + 5y),\ -\cos(4x + 5y)$

(*e*) $z = e^{xy},\ x = s^2 + 2st,\ y = 2st + t^2.$ *Sol.* $2e^{xy}\{tx + (s + t)y\},$ $2e^{xy}\{(s + t)x + sy\}$

31. (*a*) Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

(*b*) Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cosh s,\ y = r\operatorname{senh} s$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

32. (*a*) Si $z = f(x + ay) + g(x - ay)$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ind. Hacer $z = f(u) + g(v),\ u = x + ay,\ v = x - ay.$

(*b*) Si $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz.$

(*c*) Si $z = f(x, y),\ x = g(t),\ y = h(t)$, demostrar que si se cumplen las condiciones de continuidad (Pág. 259).

$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g'h' + f_{yy}(h')^2 + f_x g'' + f_y h''$$

(*d*) Si $z = f(x, y),\ x = g(r, s),\ y = h(r, s)$, demostrar que si se cumplen las condiciones de continuidad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g_r)^2 + 2f_{xy}g_r h_r + f_{yy}(h_r)^2 + f_x g_{rr} + f_y h_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = f_{xx}g_r g_s + f_{xy}(g_r h_s + g_s h_r) + f_{yy}h_r h_s + f_x g_{rs} + f_y h_{rs}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g_s)^2 + 2f_{xy}g_s h_s + f_{yy}(h_s)^2 + f_x g_{ss} + f_y h_{ss}$$

33. Una función, $f(x, y)$, es homogénea de orden n, si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. [Por ejemplo, $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ es homogénea de segundo orden; $f(x, y) = x\operatorname{sen} y/x + y\cos y/x$ es homogénea de primer orden.] Derivar $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ con respecto a t, y sustituir t por 1 para demostrar que $xf_x + yf_y = nf$. Comprobar esta fórmula aplicándola a las funciones de los dos ejemplos. Véase, también, el Problema 32 (*b*).

34. Si $z = \phi(u, v)$ siendo $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y si $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, demostrar que

$$(a)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$(b)\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\right)$$

35. Aplicar (A) del Problema 20 para deducir las fórmulas de derivación (*2*) y (*3*). *Ind.* Para la (*2*), dividir por Δt.

Capítulo 58

Funciones implícitas

LA DERIVADA de una función de una variable, definida implícitamente mediante una relación $f(x, y) = 0$, se trató en el Capítulo 6. Ahora, vamos a enunciar sin demostración, los teoremas siguientes:

I. Si $f(x, y)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto (x_0, y_0) para el cual $f(x_0 y_0) = 0$, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en dicha región y $\partial f/\partial y \neq 0$ en (x_0, y_0), existe un intervalo en torno de (x_0, y_0) en el que se puede despejar y de la ecuación $f(x, y) = 0$, siendo y una función continua y derivable con respecto a x: $y = \phi(x)$ con $y_0 = \phi(x_0)$ y $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$.

(Ver Problemas 1-3.)

En el caso de tres variables, se verifica

II. Si $f(x, y, z)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto (x_0, y_0, z_0) para el cual $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ son continuas en dicha región, y $\partial F/\partial z \neq 0$ en (x_0, y_0, z_0), existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, z_0) en el que se puede despejar z de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, siendo z una función continua y derivable de x e y: $z = \phi(x, y)$ con $z_0 = \phi(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$.

(Ver Problemas 4-5.)

Problemas resueltos

1. Aplicando el teorema I, demostrar que $x^2 + y^2 - 13 = 0$ define a y como función derivable de x en un intervalo del punto (2, 3) que no comprenda a ningún punto del eje x. Hallar la derivada en dicho punto.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13$. Tendremos, $f(2, 3) = 0$, mientras que en el intervalo de (2, 3) anterior, la función está definida, sus derivadas parciales $\partial f/\partial x = 2x$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas y $\partial f/\partial y \neq 0$. Por consiguiente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \quad \text{en } (2, 3)$$

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, siendo $f(x, y) = y^2 + xy - 12 = 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$, y $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\dfrac{y}{3y^2 + x}$.

3. Hallar dy/dx, siendo $e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x = 1$.

Haciendo $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x - 1$. Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\dfrac{e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x}$.

4. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$.

Tomando z como una función de x e y definida por la relación y derivando parcialmente con respecto a x y de nuevo con respecto a y, tenemos

(i) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y}$$

(ii) $$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

De (i), $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\dfrac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}$; de (ii), $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\dfrac{3x - 4y}{3x + 2z}$.

5. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx = 1$.

Sea $F(x, y, z) = \operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx - 1$; tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy + z \cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + z \cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y \cos yz + x \cos zx$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x \cos xy + z \cos yz}{y \cos yz + x \cos zx}$$

Problemas propuestos

8. Hallar dy/dx, siendo:

(a) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1$ (b) $xy - e^x \operatorname{sen} y = 0$ (c) $\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arc\,tag} y/x = 0$

Sol. (a) $\dfrac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + 3y^2}$ (b) $\dfrac{e^x \operatorname{sen} y - y}{x - e^x \cos y}$ (c) $\dfrac{2x + y}{x - 2y}$

9. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo:

(a) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 60$ *Sol.* $\partial z/\partial x = \dfrac{3x}{5z}$, $\partial z/\partial y = \dfrac{4y}{5z}$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8zx = 20$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x + y + 4z}{4x + 2y + z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + y + 2z}{4x + 2y + z}$

(c) $x + 3y + 2z = \ln z$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{1 - 2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3z}{1 - 2z}$

(d) $z = e^x \cos(y + z)$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{1 + e^x \operatorname{sen}(y + z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-e^x \operatorname{sen}(y + z)}{1 + e^x \operatorname{sen}(y + z)}$

(e) $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(y + z) + \operatorname{sen}(z + x) = 1$

Sol. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos(x + y) + \cos(z + x)}{\cos(y + z) + \cos(z + x)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos(x + y) + \cos(y + z)}{\cos(y + z) + \cos(z + x)}$

10. Hallar las primeras y segundas derivadas parciales de z, siendo: $x^2 + 2yz + 2zx = 1$.

Sol. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x + z}{x + y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{x + y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{x - y + 2z}{(x + y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x + 2z}{(x + y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2z}{(x + y)^2}$

11. Si $F(x, y, z) = 0$ demostrar que $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

Capítulo 59

Curvas y superficies en el espacio

TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA. Una curva en el espacio, se expresa en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \qquad (1)$$

La ecuación de la *tangente* a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (determinado por $t = t_0$) es

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{dz}{dt}} \qquad (2)$$

y la ecuación del *plano normal* (pasa por P_0 y es perpendicular a la tangente) es

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

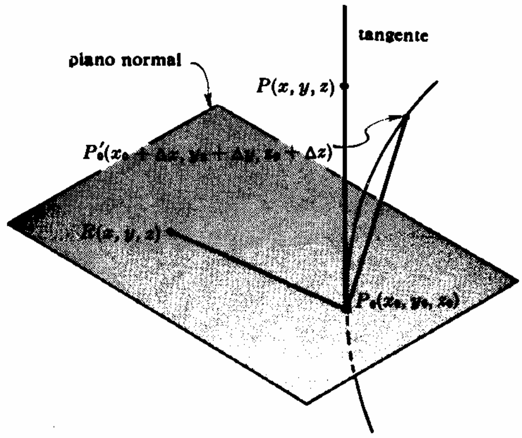

Fig. 59-1

En (2) y (3), las derivadas están particularizadas en el punto P_0.

(Ver Problemas 1-2.)

PLANO TANGENTE Y NORMAL A UNA SUPERFICIE. La ecuación del *plano tangente* a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \qquad (4)$$

y la ecuación de la normal

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad (5)$$

Las derivadas parciales están particularizadas en el punto P_0. (Fig. 59-2.)

(Ver Problemas 3-9.)

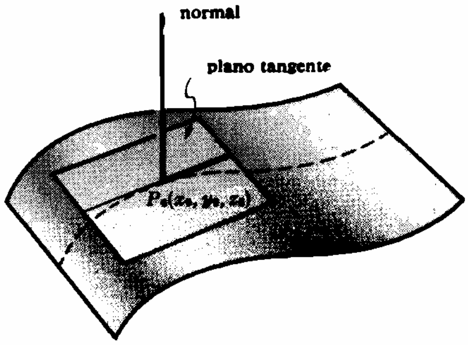

Fig. 59-2

UNA CURVA EN EL ESPACIO también se puede definir por las ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \qquad (6)$$

Las ecuaciones de la tangente a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0 \qquad (8)$$

En (*7*) y (*8*), las derivadas parciales están particularizadas en el punto P_0.

(Ver Problemas 10-11.)

Problemas resueltos

1. Deducir las ecuaciones (*2*) y (*3*) de la tangente y del plano normal a la superficie $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ determinado por el valor del parámetro $t = t_0$ (ver Fig. 59-1).

Sea $P'_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ otro punto de la curva correspondiente al valor $t = t_0 + \Delta t$. Cuando $P'_0 \to P_0$ a lo largo de la curva, la cuerda $P_0P'_0$ tiende a la tangente en P_0 como posición límite.

Las componentes de la cuerda $P_0P'_0$ son $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$. Dividiendo cada una de ellas por el incremento del parámetro resulta, $\left[\dfrac{\Delta x}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y}{\Delta t}, \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right]$. Ahora bien, cuando $P'_0 \to P_0$, $\Delta t \to 0$ y $\left[\dfrac{\Delta x}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y}{\Delta t}, \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right] \to \left[\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right]$, que serán las componentes de un vector diferencial sobre la tangente en P_0. Por consiguiente, llamando $P(x, y, z)$ un punto genérico de la tangente, $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ serán las componentes del vector P_0P. En resumen, la ecuación de la tangente pedida será:

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

Sea $R(x, y, z)$ un punto genérico del plano normal en P_0; como P_0R y P_0P son perpendiculares, la ecuación del plano normal en el punto P_0 es:

$$(x - x_0)\frac{dx}{dt} + (y - y_0)\frac{dy}{dt} + (z - z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a:

(*a*) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto $t = 1$,
(*b*) la curva $x = t - 2$, $y = 3t^2 + 1$, $z = 2t^3$ en el punto donde corta al plano *yz*.

(*a*) En el punto $t = 1$ o sea $(1, 1, 1)$, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t = 2$, y $dz/dt = 3t^2 = 3$. Aplicando (*2*), la ecuación de la tangente es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ y, aplicando (*3*), la ecuación del plano normal es $(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = x + 2y + 3z - 6 = 0$.

(*b*) La curva dada corta el plano *yz* en el punto en el que $x = t - 2 = 0$, es decir, en el punto $t = 2$, o sea $(0, 13, 16)$. En este punto, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 6t = 12$, y $dz/dt = 6t^2 = 24$. La ecuación de la tangente es $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-13}{12} = \dfrac{z-16}{24}$ y la ecuación del plano normal es $x + 12(y - 13) + 24(z - 16) = x + 12y + 24z - 540 = 0$.

3. Deducir las ecuaciones (4) y (5) del plano tangente y de la normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. (Ver Fig. 59-2).

Sean $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, las ecuaciones paramétricas de una curva de la superficie $F(x, y, z) = 0$ que pasa por el punto P_0. En este punto tendremos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$$

en donde las derivadas están particularizadas en dicho punto P_0.

Esta relación expresa que la recta que pasa por P_0 de componentes (i) $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ es perpendicular a la recta que, pasando también por P_0, tiene de componentes (ii) $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$. Las componentes (i) pertenecen a la tangente a la curva situada en el plano tangente a la superficie, y las componentes (ii) son las de la normal a la superficie en el punto P_0. La ecuación de esta normal es

$$\frac{x - x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F/\partial z}$$

y la ecuación del plano tangente en P_0 es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

En los Problemas 4-5, hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies dadas en los puntos indicados.

4. $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$; $(2, 1, 3)$.

Ponemos $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$. En $(2, 1, 3)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4$, y $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

La ecuación del plano tangente es $12(x - 2) + 4(y - 1) - (z - 3) = 0$, o sea $12x + 4y - z = 25$.

La ecuación de la normal es $\frac{x - 2}{12} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 3}{-1}$.

5. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$; $(1, -2, 1)$.

En $(1, -2, 1)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + 4 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7$.

La ecuación del plano tangente es $0(x - 1) - 19(y + 2) + 7(z - 1) = 0$, o sea $19y - 7z + 45 = 0$.

La ecuación de la normal es $\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 2}{-19} = \frac{z - 1}{7}$, o sea $x = 1$, $7y + 19z - 5 = 0$.

6. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

En P_0: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y_0}{b^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z_0}{c^2}$.

La ecuación del plano tangente es $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$.

que se reduce a $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, ya que P_0 pertenece a la superficie.

7. Demostrar que las superficies

$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ son tangentes en el punto $(2, 1, 1)$.

Tendremos que demostrar que las dos superficies tienen el mismo plano tangente en el punto dado.

En $(2, 1, 1)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 4$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y = 8$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z = -8$ y

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 6 = -2$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6 = -4$, $\frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2 = 4$.

Como las componentes $[4, 8, -8]$ y $[-2, -4, 4]$ de las normales a las dos superficies son proporcionales, ambas tienen el mismo plano tangente,

$$1(x - 2) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2y - 2z = 2$$

8. Demostrar que las superficies $F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$ y $G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ se cortan ortogonalmente en el punto (1, 2, 1).

Hemos de demostrar que los planos tangentes a las superficies, en dicho punto, son perpendiculares, o bien, que las normales a las superficies, en ese punto, son perpendiculares

En (1, 2, 1): $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y - 4z = -2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + z = 2$, y $\dfrac{\partial F}{\partial z} = y - 4x = -2$. Las componentes de la normal a $F(x, y, z) = 0$ son $[l_1, m_1, n_1] = [1, -1, 1]$.

En (1, 2, 1): $\dfrac{\partial G}{\partial x} = -5$, $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 1$, y $\dfrac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6$. Las componentes de la normal a $G(x, y, z) = 0$ son $[l_2, m_2, n_2] = [-5, 1, 6]$.

Como $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0$, dichas rectas son perpendiculares.

9. Demostrar que las superficies $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$ se cortan en ángulo recto.

En un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ común a las dos superficies:

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 6x_0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 8y_0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 16z_0$, y $[3x_0, 4y_0, 8z_0]$ son las componentes de la normal a la superficie en P_0. Análogamente, $[x_0\ 2y_0, -4z_0]$ son las componentes de la normal a $G(x, y, z) = 0$ en P_0.

Como
$$3x_0(x_0) + 4y_0(2y_0) + 8z_0(-4z_0) = 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2$$
$$= 6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(6) - 36 = 0,$$
dichas direcciones son perpendiculares.

10. Deducir las ecuaciones (7) y (8) de la tangente y del plano normal a la curva alabeada C: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

En P_0 las direcciones $\left[\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right]$ y $\left[\dfrac{\partial G}{\partial x}, \dfrac{\partial G}{\partial y}, \dfrac{\partial G}{\partial z}\right]$ son, respectivamente, perpendiculares a los planos tangentes a las superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Como la dirección

$$\left[\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}\right]$$

es perpendicular a dichas direcciones, será la de la tangente a C en P_0. Por tanto, la ecuación de la tangente es

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}}$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

11. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x + y + z = 6$ en el punto (1, 2, 3).

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ y $G(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$. En (1, 2, 3):

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Como $[1, -2, 1]$ son componentes de la tangente, su ecuación es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ y la ecuación del plano normal es $(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = x - 2y + z = 0$.

Problemas propuestos

12. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas dadas en el punto indicado:

(*a*) $x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ t = 1$ *Sol.* $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3};\ 2x + 2y + 3z - 9 = 0$

(*b*) $x = te^t,\ y = e^t,\ z = t;\ t = 0$ *Sol.* $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1};\ x + y + z - 1 = 0$

(*c*) $x = t\cos t,\ y = t\,\text{sen}\,t,\ z = t;\ t = 0$ *Sol.* $x = z,\ y = 0;\ x + z = 0$

13. Demostrar que las curvas (i) $x = 2 - t,\ y = -1/t,\ z = 2t^2$ y (ii) $x = 1 + \theta,\ y = \text{sen}\,\theta - 1,\ z = 2\cos\theta$ se cortan en ángulo recto en $P(1, -1, 2)$. Obtener las ecuaciones de la tangente y del plano normal a cada curva en P.

Sol. (i) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{4};\ x - y - 4z + 6 = 0$ (ii) $x - y = 2,\ z = 2;\ x + y = 0$

14. Demostrar que las tangentes a la hélice $x = a\cos t,\ y = a\,\text{sen}\,t,\ z = bt$ cortan al plano xy formando el mismo ángulo.

15. Demostrar que la longitud de la curva (1) desde el punto $t = t_0$ hasta el $t = t_1$ viene dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

Calcular la longitud de la hélice del Problema 14 desde $t = 0$ a $t = t_1$. *Sol.* $\sqrt{a^2 + b^2}\,t_1$.

16. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas dadas en el punto indicado:

(*a*) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5,\ 3x - 2y - z = 0;\ (1, 1, 1)$

(*b*) $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0,\ 3x + y + z - z^2 - 1 = 0;\ (2, -3, 2)$ (*c*) $4z^2 = xy,\ x^2 + y^2 = 8z;\ (2, 2, 1)$

Sol. (*a*) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-1}{-8};\ 2x + 7y - 8z - 1 = 0$

(*b*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{z-2}{1},\ y + 3 = 0;\ x + z - 4 = 0$ (*c*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1},\ z - 1 = 0;\ x - y = 0$

17. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies dadas en el punto indicado:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 14;\ (1, -2, 3)$ *Sol.* $x - 2y + 3z = 14;\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2;\ (x_1, y_1, z_1)$ *Sol.* $x_1x + y_1y + z_1z = r^2;\ \dfrac{x-x_1}{x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_1}$

(*c*) $x^2 + 2z^2 = 3y^2;\ (2, -2, -2)$ *Sol.* $x + 3y - 2z = 0;\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$

(*d*) $2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0;\ (1, -2, -3)$ *Sol.* $z - 2y = 1;\ x - 1 = 0,\ \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$

(*e*) $z = xy;\ (3, -4, -12)$ *Sol.* $4x - 3y + z = 12;\ \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z+12}{1}$

18. (*a*) Demostrar que la suma de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2}$ en uno de sus puntos es igual a a.

(*b*) Demostrar que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ en uno de sus puntos es a.

19. Demostrar que las superficies dadas son tangentes en los puntos indicados:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 18,\ xy = 9;\ (3, 3, 0)$.

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0,\ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9;\ (2, 1, 1)$.

20. Demostrar que las superficies dadas son perpendiculares en los puntos indicados:

(*a*) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8,\ 4x^2 - y^2 + 2z^2 = 14;\ (2, 2, 1)$.

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 = 50,\ x^2 + y^2 - 10z + 25 = 0;\ (3, 4, 5)$.

21. Demostrar que cada una de las superficies (i) $14x^2 + 11y^2 + 8z^2 = 66$, (ii) $3z^2 - 5x + y = 0$, (iii) $xy + yz - 4zx = 0$ es perpendicular a las otras dos en el punto $(1, 2, 1)$.

Capítulo 60

Derivadas según una dirección
Máximos y mínimos

DERIVADAS SEGUN UNA DIRECCION. Sea la superficie $z = f(x, y)$ y $P(x, y, z)$ un punto de la misma. Trazando por este punto (Fig. 60-1) planos paralelos a los coordenados xOz e yOz, cortarán a la superficie según las curvas PR y PS, y al plano xOy según las rectas $P'M$ y $P'N$.

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ particularizadas en el punto P, o bien en $P'(x, y)$, representan la variación de $z = P'P$ cuando permanecen constantes y y x respectivamente, es decir, la variación de z según las direcciones de los ejes x e y, o sea, las pendientes de las curvas PR y PS en el punto P.

Consideremos, ahora, un plano que pase por P y sea perpendicular al plano xOy formando un ángulo θ con el eje x. Si PQ y $P'L$ son las intersecciones de este plano con la superficie, la *derivada según la dirección* θ de $f(x, y)$ en P (o en P') viene dada por

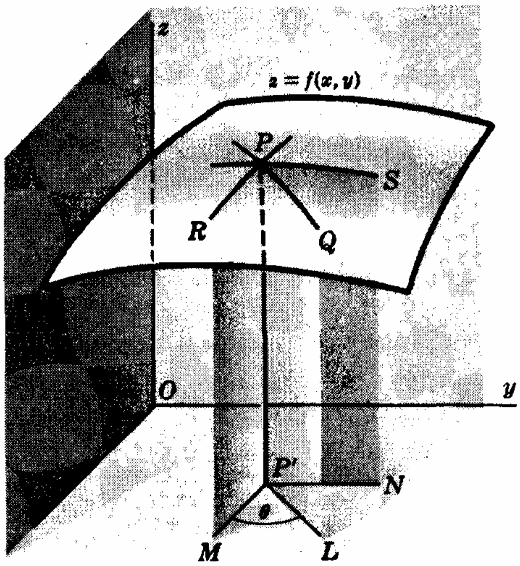

Fig. 60-1

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

La derivada según la dirección representa la variación de $z = P'P$ en la dirección de $P'L$, esto es, la pendiente de la curva PQ en P.

La derivada según una dirección en un punto P es una función de θ. Si existe una dirección según la cual la derivada en P tiene un máximo relativo, este valor recibe el nombre de *gradiente* de la función $f(x, y)$ en P. El gradiente, pues, es la pendiente de la tangente más inclinada que se puede trazar a la superficie en el punto P.

(Ver Problemas 1-8.)

Dada la función $w = F(x, y, z)$, la derivada en un punto $P(x, y, z)$ según la dirección (α, β, γ), viene dada por

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2)$$

(Ver Problema 9.)

MAXIMOS Y MINIMOS. Supongamos que $z = f(x, y)$ tiene un máximo (o un mínimo) en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Cualquier plano que pase por P_0 y sea perpendicular al plano xOy, corta a la superficie según una curva que tendrá un máximo (o un mínimo) en el punto P_0, es decir, la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$, de $z = f(x, y)$ debe ser igual a 0 en P_0 cualquiera que sea el valor de θ. Por tanto, en P_0, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$.

Los puntos en los cuales $z = f(x, y)$ tiene un máximo (o un mínimo) son aquellos (x_0, y_0) en los que se verifiquen simultáneamente las ecuaciones $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$. Veamos los distintos casos que se pueden presentar:

Supongamos que $z = f(x, y)$ tengan primera y segunda derivadas parciales en una cierta región en torno al punto (x_0, y_0, z_0) en el que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son nulas. Si $\Delta = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$ en P_0, $z = f(x, y)$ tiene

$$\text{un mínimo relativo en } P_0 \text{ si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

y

$$\text{un máximo relativo en } P_0 \text{ si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Si $\Delta > 0$, no habrá en P_0 ni máximo ni mínimo; si $\Delta = 0$ la naturaleza del punto crítico P_0 es indeterminada.

(Ver Problemas 10-15.)

Problemas resueltos

1. En la Fig. 60-1, sea $P''(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un segundo punto de $P'L$, y representemos por Δs la distancia $P'P''$. Suponiendo que las primeras derivadas parciales de $z = f(x, y)$ sean continuas, según el Problema 20 del Capítulo 57, tendremos

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx y $\Delta y \to 0$. El valor medio de la variación de z entre los puntos P' y P'' es

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta + \epsilon_1 \cos\theta + \epsilon_2 \operatorname{sen}\theta$$

siendo θ el ángulo que la recta $P'P''$ forma con el eje x. Ahora bien, como $P'' \to P'$ a lo largo de $P'L$, la variación instantánea de z, es decir, la derivada direccional en P', es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

2. Hallar la derivada de $z = x^2 - 6y^2$ en el punto $P'(7,2)$ según la dirección (*a*) $\theta = 45°$, (*b*) $\theta = 135°$.

La derivada en un punto $P'(x, y)$ según la dirección θ es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = 2x\cos\theta - 12y\operatorname{sen}\theta$$

(*a*) En $P'(7,2)$ en la dirección $\theta = 45°$: $dz/ds = 2\cdot 7(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$.
(*b*) En $P'(7,2)$ en la dirección $\theta = 135°$: $dz/ds = 2\cdot 7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}$.

3. Calcular la derivada de $z = ye^x$ en el punto $P'(0, 3)$ en la dirección (*a*) $\theta = 30°$, (*b*) $\theta = 120°$.

$$\frac{dz}{ds} = ye^x\cos\theta + e^x\operatorname{sen}\theta$$

(*a*) En el punto (0, 3) en la dirección $\theta = 30°$: $dz/ds = 3\cdot 1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)$.
(*b*) En el punto (0, 3) en la dirección $\theta = 120°$ $dz/ds = 3\cdot 1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})$.

4. La temperatura T de un disco circular en uno de sus puntos (x, y) viene dada por $T = \dfrac{64}{x^2 + y^2 + 2}$, siendo el origen de coordenadas el centro del disco. Hallar, en el punto(1, 2), la variación de T con respecto a s según la dirección $\theta = \pi/3$.

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\cos\theta - \frac{64(2y)}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\operatorname{sen}\theta$$

En el punto (1, 2) en la dirección $\theta = \pi/3$: $\quad \dfrac{dT}{ds} = -\dfrac{128}{49}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{256}{49}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{64}{49}(1 + 2\sqrt{3})$.

5. El potencial eléctrico V en un punto (x, y) viene dado por $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Hallar la variación de V con respecto a s en el punto (3, 4) según la dirección del punto (2, 6).

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2 + y^2}\cos\theta + \frac{y}{x^2 + y^2}\operatorname{sen}\theta$$

Como θ es un ángulo del segundo cuadrante $\operatorname{tag}\theta = \dfrac{6-4}{2-3} = -2$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Por tanto, en (3, 4) en la dirección indicada, $\dfrac{dV}{ds} = \dfrac{3}{25}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{4}{25}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{25}$.

6. Calcular el gradiente de la superficie del Problema 2 en el punto indicado.

En el punto (7, 2) en la dirección θ, $dz/ds = 14\cos\theta - 24\operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\dfrac{dz}{ds}$ es máxima, tenemos $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = -14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta = 0$.

Por tanto, $\operatorname{tag}\theta = -24/14 = -12/7$ y θ es un ángulo del segundo o del cuarto cuadrante. Si es del segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\theta = 12/\sqrt{193}$ y $\cos\theta = -7/\sqrt{193}$. Si fuera del cuarto, $\operatorname{sen}\theta = -12/\sqrt{193}$ y $\cos\theta = 7/\sqrt{193}$.

Como $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = \dfrac{d}{d\theta}(-14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta) = -14\cos\theta + 24\operatorname{sen}\theta$ es negativo para un ángulo del cuarto cuadrante, el gradiente es $\dfrac{dz}{ds} = 14\left(\dfrac{7}{\sqrt{193}}\right) - 24\left(-\dfrac{12}{\sqrt{193}}\right) = 2\sqrt{193}$ y la dirección es $\theta = 300^\circ\ 15'$.

7. Hallar el gradiente de la superficie del Problema 3 en el punto indicado.

En el punto (0, 3) en la dirección θ, $dz/ds = 3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\dfrac{dz}{ds}$ es máxima, tenemos $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = -3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$.

Luego $\operatorname{tag}\theta = 1/3$ y θ es un ángulo del primero o tercer cuadrante.

Como $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = \dfrac{d}{d\theta}(-3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = -3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ es negativo para un ángulo del primer cuadrante, el gradiente es $\dfrac{dz}{ds} = 3\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y la dirección es $\theta = 18^\circ\ 26'$

8. En el Problema 5, demostrar que la variación del potencial V con respecto a s es máxima a lo largo de rectas que pasan por el origen.

En un punto (x_1, y_1) en la dirección θ, $\dfrac{dV}{ds} = \dfrac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta + \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\operatorname{sen}\theta$.

Cuando $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dV}{ds}\right) = -\dfrac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta = 0$, $\operatorname{tag}\theta = \dfrac{y_1/(x_1^2 + y_1^2)}{x_1/(x_1^2 + y_1^2)} = \dfrac{y_1}{x_1}$.

Por tanto, θ es el ángulo de inclinación de la recta que une el origen con el punto (x_1, y_1).

9. Hallar la derivada de $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ en el punto (1, —2, 1) a lo largo de la curva $x = t$, $y = t - 3$, $z = t^2$ en la dirección creciente de z.

Las componentes de la tangente a la curva en (1, —2, 1) son [1, 1, 2] y los cosenos directores son $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$. La derivada en esa dirección es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

10. Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

Las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$ se satisfacen cuando $x = 2$, $y = -3$.

Como $f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 12$, es evidente que $f(2, -3) = 12$ es un mínimo de la función.

Geométricamente, (2, —3, 12) es el mínimo de la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

11. Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$ se satisfacen cuando $x = 0$, $y = 0$ y cuando $x = -1$, $y = -1$.

En (0, 0): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$, y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$. Luego $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 > 0$, y en (0, 0) no hay máximo ni mínimo.

En (—1, —1): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$. Luego $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -27 < 0$, y

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$. Por tanto, $f(-1, -1) = 1$ es el máximo de la función.

12. Dividir 120 en tres partes de manera que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

Sean x, y y $120 - (x + y)$ las tres partes.

Tendremos que hallar el máximo de $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$.

$\dfrac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y$, $\dfrac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y$.

Cuando $\dfrac{\partial S}{\partial x} = \dfrac{\partial S}{\partial y} = 0$, tenemos $2x + y = 120$ y $x + 2y = 120$.

Luego $x = 40$, $y = 40$, $120 - (x + y) = 40$ son las tres partes, y $S = 3 \cdot 40^2 = 4\,800$.

Para la solución 1, 1, 118, $S = 237$; evidentemente, $S = 4\,800$ es el valor máximo.

13. Determinar el punto del plano $2x - y + 2z = 16$ más próximo al origen.

Sea (x, y, z) el punto buscado; el cuadrado de su distancia al origen es $D = x^2 + y^2 + z^2$. Como $2x - y + 2z = 16$, $y = 2x + 2z - 16$ será $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$.

Las condiciones $\partial D/\partial x = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$ y $\partial D/\partial z = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$ son equivalentes a $5x + 4z = 32$, $4x + 5z = 32$ y $x = z = 32/9$. Como sabemos que existe un punto para el cual D es mínimo (32/9, —16/9, 32/9) es el punto buscado.

14. Demostrar que el paralelepípedo de área total S constante de volumen V máximo es un cubo.

Sean las dimensiones x, y y z. Será $V = xyz$ y $S = 2(xy + yz + zx)$.

De la segunda ecuación se despeja z y se sustituye en la primera, con lo cual, resulta V en función de x e y. Todavía se puede resolver más fácilmente, si se considera a z como una función de x e y. Tendremos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

De las dos últimas, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y + z}{x + y}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x + y}$.

Luego las condiciones $\dfrac{\partial V}{\partial x} = yz - \dfrac{xy(y + z)}{x + y} = 0$ y $\dfrac{\partial V}{\partial y} = xz - \dfrac{xy(x + z}{x + y} = 0$ se reducen a $y^2(z - x) = 0$ y $x^2(z - y) = 0$. Por tanto, $x = y = z$, como queríamos demostrar.

15. Calcular el volumen V del paralelepípedo recto de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sea $P(x, y, z)$ un vértice, en el primer octante. Tendremos $V = 8xyz$.

Consideremos a z como una función, de las variables independientes x e y, dada por la ecuación del elipsoide. Las condiciones necesarias para un máximo son:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

De la ecuación del elipsoide obtenemos $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2z}{c^2} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{2y}{b^2} + \dfrac{2z}{c^2} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Eliminando $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ entre estas relaciones y (*1*) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2x^2y}{a^2z}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2xy^2}{b^2z}\right) = 0$$

y finalmente
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \qquad (2)$$

Combinando (*2*) con la ecuación del elipsoide llegamos a $x = a\sqrt{3}/3$, $y = b\sqrt{3}/3$, y $z = c\sqrt{3}/3$. Luego $V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$ unidades de volumen.

Problemas propuestos

16. Hallar las derivadas de las funciones siguientes en los puntos dados y en las direcciones indicadas: (*a*) $z = x^2 + xy + y^2$, $(3, 1)$, $\theta = \pi/3$. (*b*) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $(2, 1)$, $\theta = \text{arc tag } 2/3$. (*c*) $z = y + x\cos xy$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/3$. (*d*) $z = 2x^2 + 3xy - y^2$, $(1, -1)$, en la dirección del punto $(2, 1)$. *Sol.* (*a*) $\frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{3})$, (*b*) $21\sqrt{13}/13$, (*c*) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$, (*d*) $11\sqrt{5}/5$.

17. Determinar el gradiente de las funciones del Problema 16 en los puntos dados.
Sol. (*a*) $\sqrt{74}$, (*b*) $3\sqrt{10}$, (*c*) $\sqrt{2}$, (*d*) $\sqrt{26}$.

18. Demostrar que el gradiente de $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ del Problema 8 es constante a lo largo de un círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

19. Dada la superficie $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$, hallar (*a*) la dirección de la máxima pendiente en el punto $(1, 1, 2)$ y (*b*) la dirección de la tangente a la curva de nivel $z =$ constante. Obsérvese que ambas direcciones son perpendiculares.
Sol. (*a*) arc tag $\frac{1}{2}$, tercer cuadrante; (*b*) arc tag -2.

20. Demostrar que la suma de los cuadrados de las derivadas de $z = f(x, y)$ en uno cualquiera de sus puntos y en dos direcciones perpendiculares, es igual al cuadrado del gradiente.

21. Sean las funciones $z = f(x, y)$ y $w = g(x, y)$ de forma que $\partial z/\partial x = \partial w/\partial y$ y $\partial z/\partial y = -\partial w/\partial x$. Si θ_1 y θ_2 son dos direcciones perpendiculares, demostrar que, en un punto cualquiera $P(x, y)$, $\partial z/\partial s_1 = \partial w/\partial s_2$ y $\partial z/\partial s_2 = -\partial w/\partial s_1$.

22. Hallar la derivada de las funciones siguientes en los puntos dados y en las direcciones indicadas: (*a*) xy^2z, $(2, 1, 3)$, $[1, -2, 2]$. (*b*) $x^2 + y^2 + z^2$, $(1, 1, 1)$, en la dirección del punto $(2, 3, 4)$. (*c*) $x^2 + y^2 - 2xz$, $(1, 3, 2)$, a lo largo de $x^2 + y^2 - 2xz = 6$, $3x^2 - y^2 + 3z = 0$ en la dirección creciente de z.
Sol. (*a*) $-17/3$ (*b*) $6\sqrt{14}/7$ (*c*) 0

23. Hallar los máximos y mínimos de las funciones:

(*a*) $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$	*Sol.* Máx. $= 2$ para $x = 1$, $y = 2$
(*b*) $z = x^3 + y^3 - 3xy$	*Sol.* Mín. $= -1$ para $x = 1$, $y = 1$
(*c*) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$	*Sol.* Mín. $= 0$ para $x = 0$, $y = 0$
(*d*) $z = (x - y)(1 - xy)$	*Sol.* No tiene máx. ni mín.
(*e*) $z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$	*Sol.* No tiene máx. ni mín.
(*f*) $z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$	*Sol.* Mín. $= -\sqrt{6}$ para $x = -\sqrt{6}/6$, $y = \sqrt{6}/3$; máx. $= \sqrt{6}$ para $x = \sqrt{6}/6$, $y = -\sqrt{6}/3$
(*g*) $z = xy(2x + 4y + 1)$	*Sol.* Máx. $= 1/216$ para $x = -1/6$, $y = -1/12$

24. Determinar tres números positivos x, y, z tales que:

(*a*) $x + y + z = 18$ y xyz sea máximo.
(*b*) $xyz = 27$ y $x + y + z$ sea mínimo.
(*c*) $x + y + z = 20$ y xyz^2 sea máximo.
(*d*) $x + y + z = 12$ y xy^2z^3 sea máximo.
Sol. (*a*) $x = y = z = 6$, (*b*) $x = y = z = 3$, (*c*) $x = y = 5$, $z = 10$, (*d*) $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$

25. Calcular el mínimo valor del cuadrado de la distancia del origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.
Sol. $D^2/(A^2 + B^2 + C^2)$

26. (*a*) Hallar el máximo volumen de una caja paralelepipédica sin tapa superior cuya área total es de 108 metros cuadrados.
(*b*) Hallar la mínima área total de una caja paralelepipédica sin tapa superior de 500 metros cúbicos de volumen.
Sol. (*a*) 108 m³, (*b*) 300 m².

27. Determinar el punto de $z = xy - 1$ más próximo al origen. *Sol.* $(0, 0, -1)$.

28. Hallar la ecuación del plano que pase por el punto $(1, 1, 2)$ y determine, en el primer octante, un volumen mínimo.
Sol. $2x + 2y + z = 6$.

29. Determinar los valores de p y q de tal forma que la suma S de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos $(0, 2)$, $(1, 3)$, y $(2, 5)$ a la recta $y = px + q$ sea mínima.
Ind. $S = (q - 2)^2 + (p + q - 3)^2 + (2p + q - 5)^2$. *Sol.* $p = 3/2$, $q = 11/6$.

Capítulo 63

Integrales doble e iterada

LA INTEGRAL SIMPLE, $\int_a^b f(x)\,dx$, de una función $y = f(x)$ continua en el intervalo finito $a \leq x \leq b$ del eje x, se definió en el Capítulo 33 de la forma siguiente:

(*a*) se divide el intervalo dado, $a \leq x \leq b$, en n subintervalos, $h_1, h_2, \ldots, h_n$, de amplitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$, respectivamente, siendo λ_n el mayor de los $\Delta_k x$.

(*b*) se eligen los puntos x_1 en h_1, x_2 en $h_2, \ldots, x_n$ en h_n y se forma la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$

(*c*) se hace crecer el número de subintervalos de forma que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$,

(*d*) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x.$

INTEGRAL DOBLE. Consideremos una función $z = f(x, y)$ continua en una región finita R del plano xOy. Dividamos esta región (ver Fig. 63-1) en n subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$, de áreas $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \ldots, \Delta_n A$, respectivamente; en cada subregión R_k tomemos un punto $P_k(x_k, y_k)$ y formemos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A = f(x_1, y_1)\,\Delta_1 A + f(x_2, y_2)\,\Delta_2 A + \cdots + f(x_n, y_n)\,\Delta_n A \qquad (1)$$

Definimos el diámetro de una subregión como la mayor de las distancias entre dos puntos cualesquiera, interiores o en la periferia, de ella y llamemos λ_n al máximo diámetro de las subregiones. Si suponemos que el número de subregiones crece de forma que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se define la *integral doble* de la función $f(x, y)$ en la región R, por

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A \qquad (2)$$

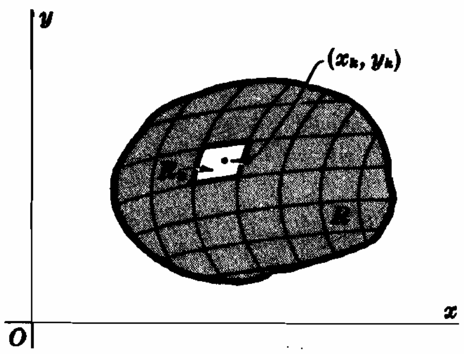

Fig. 63-1

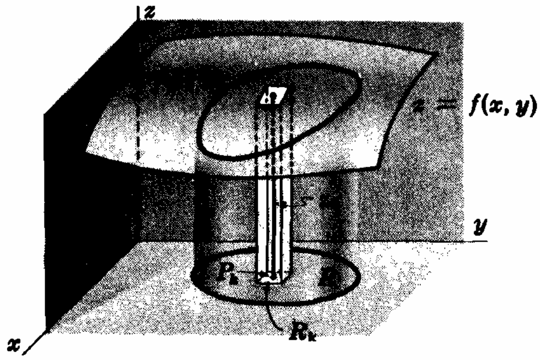

Fig. 63-2

Si $z = f(x, y)$ no se hace negativo en ningún punto de R (ver Fig. 63-2), la integral doble (*2*) se puede interpretar como un volumen. Un término cualquiera, $f(x_k, y_k)\,\Delta_k A$ de (*1*), representa el volumen de una columna vertical de bases paralelas de área $\Delta_k A$ y altura z_k, medida sobre la ver tical levantada desde el punto elegido P_k hasta la superficie $z = f(x, y)$. También representa, aproximadamente el volumen de una columna vertical cuyas bases son, la inferior, la subregión R_k y la superior, la proyección de R_k sobre la superficie. Así, pues, (*1*) es una aproximación del volumen «limitado por la superficie» (es decir, el volumen cuya base inferior está situada en el plano xOy y la superior es la superficie generada al mover una recta paralelamente al eje z que se apoya en el contorno de R) y (*2*) es una medida de dicho volumen.

El cálculo de una integral doble, por simple que sea, a base de ir realizando sumas presenta muchas dificultades y no lo emplearemos en este libro.

INTEGRAL ITERADA. Consideremos un volumen, definido como en la sección anterior, y supongamos que el contorno de R es tal, que toda recta paralela al eje x, o al eje y, no corta a la superficie en más de dos puntos. Tracemos (ver Fig. 63-3) las tangentes $x = a$ y $x = b$ al contorno y sean K y L los puntos de tangencia, y las tangentes $y = c$ e $y = d$ siendo M y N los puntos de contacto o respectivos. Supongamos que la ecuación del arco LMK sea $y = g_1(x)$, y la correspondiente al LNK, $y = g_2(x)$.

Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ en m subintervalos, $h_1, h_2, \ldots, h_m$, de longitudes, $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x, \ldots, \Delta_m x$, y tomemos en ellos los puntos $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ (como se hizo en el Capítulo 33). Asimismo, dividamos el intervalo $c \leq y \leq d$ en n subintervalos, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, de longitudes, $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_n y$, y tomemos en ellos los puntos, $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots, y = \eta_{n-1}$. Sean λ_m y μ_n las longitudes de los mayores intervalos $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$ respectivamente. Trazando las series de paralelas $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ e $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots, y = \eta_{n-1}$, habremos dividido la región R en un conjunto de rectángulos R_{ij} de áreas $\Delta_i x \cdot \Delta_j y$ y en otro conjunto de rectángulos incompletos que ignoramos. Si en cada subintervalo h_i elegimos un punto $x = x_i$, y en cada uno de los k_j otro $y = y_j$, en cada subregión R_{ij} quedará determinado un punto $P_{ij}(x_i, y_j)$. A cada subregión R_{ij} se le puede asociar, mediante la ecuación de la superficie, un número $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ con lo que formamos la suma

$$\sum_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} f(x_i, y_j)\, \Delta_i x \cdot \Delta_j y \tag{3}$$

Esta expresión (*3*) es un caso particular de la (*1*), ya que si se aumenta indefinidamente el número de rectángulos de forma que, tanto λ_m como μ_n tienden a cero, el límite de (*3*) coincide con la integral doble (*2*).

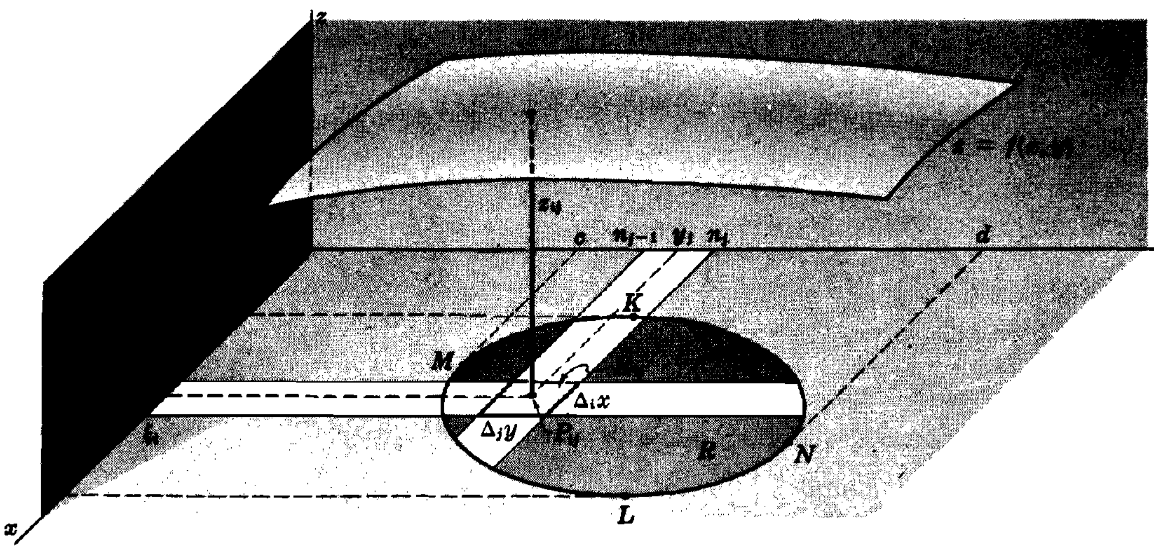

Fig. 63-3

Para hallar el límite anterior se elige uno de los intervalos, por ejemplo h_i, y se considera la suma

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\} \Delta_i x\,, \qquad (i \text{ fijo})$$

que es la contribución a la suma total de todos los rectángulos en los que una de las dimensiones es igual a h_i, es decir, la contribución de todos los rectángulos situados en la iésima columna. Cuando $n \to +\infty$, $\mu_n \to 0$ y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\} \Delta_i x \;=\; \left\{\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy\right\} \Delta_i x \;=\; \phi(x_i)\,\Delta_i x$$

Sumando ahora las m columnas y haciendo tender a $m \to +\infty$, tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{m} \phi(x_i)\,\Delta_i x &= \int_a^b \phi(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx \;=\; \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \end{aligned} \tag{4}$$

Aunque en lo sucesivo no emplearemos el corchete, se debe sobrentender siempre que la fórmula (*4*) indica que hay que calcular dos integrales simples definidas, en un orden determinado: primero, la integral de $f(x, y)$ con respecto a y (considerando x constante) entre los límites $y = g_1(x)$, contorno inferior de R, e $y = g_2(x)$, contorno superior de R y, a continuación, se halla la integral de este resultado con respecto a x entre los límites $x = a$, punto extremo izquierdo de R y $x = b$, punto extremo derecho de R. La integral (*4*) recibe el nombre de *integral iterada* o *integral repetida.*

Se deja como ejercicio el cálculo de la suma planteando, en primer lugar, la contribución de los rectángulos de cada columna y, después, la de los rectángulos de todas las columnas, obteniéndose la integral iterada equivalente

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{5}$$

siendo $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$ las ecuaciones de los arcos MKN y MLN respectivamente.

En el Problema 1 se demuestra, por otro procedimiento, que la integral iterada (*4*) es una medida del volumen. Para el cálculo de integrales iteradas véanse los Problemas 2-6.

La mayor dificultad en el planteamiento de las integrales iteradas de los capítulos posteriores es hallar los límites de integración correspondientes a la región R. Aquí hemos considerado para el razonamiento una región muy sencilla; las regiones de los Problemas 7-9 son más complicadas.

Problemas resueltos

1. Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función continua no negativa en la región R del plano xOy cuyo contorno está formado por los arcos de dos curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ que se cortan en los puntos K y L indicados en la Fig. 63-4. Se trata de hallar el volumen V limitado por esta superficie.

Sea $x = x_i$, siendo $a < x_i < b$, un plano que corta al contorno de R en los puntos $S[x_i, g_1(x_i)]$ y $T[x_i, g_2(x_i)]$, y a la superficie $z = f(x, y)$ según el arco UV a lo largo del cual $z = f(x_i, y)$. El área de la sección $STUV$ es

$$A(x_i) \;=\; \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy$$

Así, pues, el área de las secciones determinadas en el volumen por planos paralelos al yOz son funciones conocidas

$$A(x) \quad = \quad \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

de x, distancia del plano de sección al origen. Según lo dicho en el Capítulo 36, el volumen pedido será,

$$V \quad = \quad \int_a^b A(x)\,dx$$

$$= \quad \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

Esta es la integral iterada de la ecuación (4).

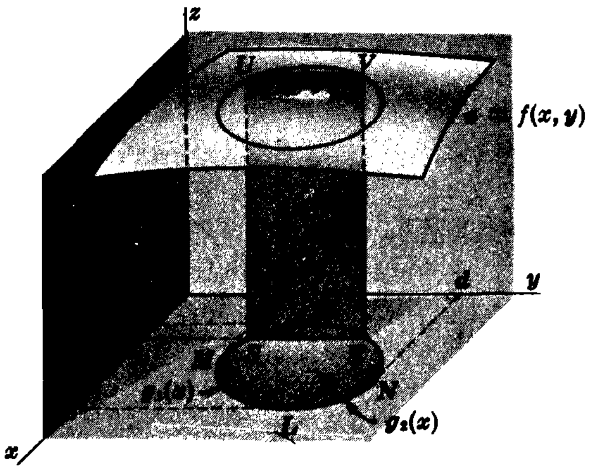

Fig. 63-4

2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx \quad = \quad \int_0^1 \Big[\, y \,\Big]_{x^2}^{x} dx \quad = \quad \int_0^1 (x - x^2)\,dx \quad = \quad \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \quad = \quad \frac{1}{6}$

3. $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\Big]_y^{3y} dy \quad = \quad \int_1^2 6y^2\,dy \quad = \quad 2y^3\Big]_1^2 \quad = \quad 14$

4. $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\,dy\,dx \quad = \quad \int_{-1}^2 (xy)\Big]_{2x^2-2}^{x^2+x} dx \quad = \quad \int_{-1}^2 (x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x)\,dx \quad = \quad \frac{9}{4}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\cos\theta} \rho \operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\rho^2 \operatorname{sen}\theta\right)\Big]_0^{\cos\theta} d\theta \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$$= \quad \left(-\frac{1}{6}\cos^3\theta\right)\Big]_0^{\pi} \quad = \quad \frac{1}{3}$$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_2^{4\cos\theta} \rho^3\,d\rho\,d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big]_2^{4\cos\theta} d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi/2} (64\cos^4\theta - 4)\,d\theta$

$$= \quad \left[64\left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{32}\right) - 4\theta\right]_0^{\pi/2} \quad = \quad 10\pi$$

7. Hallar $\displaystyle\iint_R dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la parábola cúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$.

La recta y la parábola se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1), que son los valores extremos de x e y en la región R.

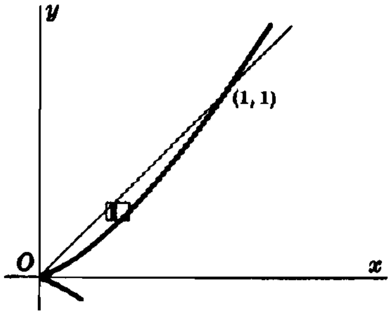

Fig. 63-5

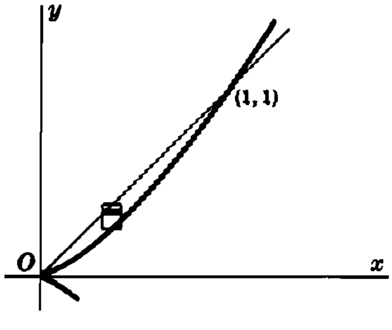

Fig. 63-6

Solución 1. Integrando primero por franjas horizontales (ver Fig. 63-5), es decir, con respecto a x, desde $x = y$ (la recta) hasta $x = y^{2/3}$ (la parábola), y después con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$, resulta:

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx\,dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y)\,dy = \left[\frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

Solución 2. Integrando primero por franjas verticales (ver Fig. 63-6), es decir, con respecto a y, desde $y = x^{3/2}$ (la parábola) hasta $y = x$ (la recta), y después con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, se obtiene

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x - x^{3/2})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

8. Hallar $\iint_R dA$ siendo R la región comprendida entre $y = 2x$ e $y = x^2$, situada a la izquierda de $x = 1$.

Integrando primero por franjas verticales (ver Fig. 63-7), tendremos

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^1 (2x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

Si integramos por franjas horizontales (ver Fig. 63-8), se necesita calcular dos integrales iteradas. Llamando R_1 a la parte de R situada por debajo de AB y R_2 la situada por encima de AB, tendremos

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\,dy = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

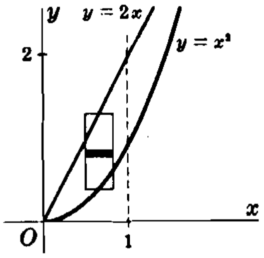

Fig. 63-7

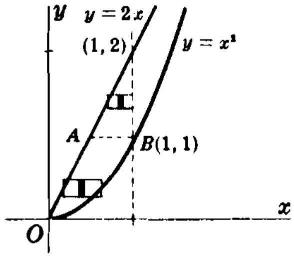

Fig. 63-8

9. Hallar $\iint_R x^2\,dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 16$ y las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 8$ (Fig. 63-9).

De la Fig. 63-9 se deduce la conveniencia de dividir R en dos regiones y calcular una integral iterada en cada una de ellas. Llamando R_1 a la parte de R situada por encima de la recta $y = 2$ y R_2 la situada por debajo, tendremos

$$\iint_R x^2\,dA = \iint_{R_1} x^2\,dA + \iint_{R_2} x^2\,dA = \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2\,dx\,dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} - y^3\right) dy + \frac{1}{3}\int_0^2 (8^3 - y^3)\,dy = 448$$

Se deja como ejercicio dividir R por la recta $x = 4$ y obtener

$$\iint_R x^2\,dA = \int_0^4 \int_0^x x^2\,dy\,dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2\,dy\,dx$$

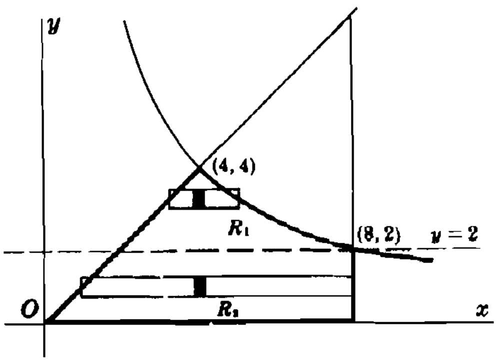

Fig. 63-9

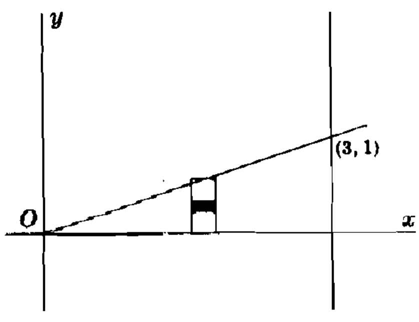

Fig. 63-10

10. Hallar $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ invertiendo, previamente, el orden de integración.

La integral dada no se puede hallar directamente porque $\int e^{x^2}\,dx$ no es una función elemental.

La región de integración R está limitada por las rectas $x = 3y$, $x = 3$ e $y = 0$. Para invertir el orden de integración, integramos primero con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = x/3$, y después con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 3$. Así pues,

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 e^{x^2} y \Big]_0^{x/3} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{6}e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{1}{6}(e^9 - 1)$$

Problemas propuestos

11. Hallar las integrales iteradas:

(*a*) $\int_0^1 \int_1^2 dx\,dy = 1$

(*b*) $\int_1^2 \int_0^3 (x+y)\,dx\,dy = 9$

(*c*) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{70}{3}$

(*d*) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx = \frac{1}{40}$

(*e*) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2\,dx\,dy = \frac{3}{4}$

(*f*) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\,dy\,dx = \frac{7}{60}$

(*g*) $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\,dy\,dx = \frac{1}{2}e - 1$

(*h*) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\,dx\,dy = \frac{32}{3}$

(*i*) $\int_0^{\text{Arc tag } 3/2} \int_0^{2\sec\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = 3$

(*j*) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}$

(*k*) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\text{tag}\,\theta\sec\theta} \rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{20}$

(*l*) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} \rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{49}{32}\pi$

12. Hallar, mediante integrales iteradas, las siguientes integrales dobles, efectuando la integración en los dos órdenes en los casos que sean posibles.

(*a*) de x, en la región limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$. *Sol.* 1/20

(*b*) de y, en la región de (*a*). *Sol.* 1/35

(*c*) de x^2, en la región limitada por $y = x$, $y = 2x$ y $x = 2$. *Sol.* 4

(*d*) de 1, en la región del primer cuadrante limitada por $2y = x^2$, $y = 3x$ y $x + y = 4$. *Sol.* 8/3; 46/3

(*e*) de y, en la región por encima de $y = 0$ limitada por $y^2 = 4x$ e $y^2 = 5 - x$. *Sol.* 5

(*f*) de $\frac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ en la región del primer cuadrante limitada por $x^2 = 4 - 2y$. *Sol.* 4

13. En los Problemas 11 (*a*)-(*h*), invertir el orden de integración y hallar las integrales iteradas que resultan.

Capítulo 64

Centro geométrico y momentos de inercia de areas planas

AREA PLANA MEDIANTE UNA INTEGRAL DOBLE. En el caso de que $f(x, y) = 1$, la integral definida en el Capítulo 63 adquiere la forma $\iint\limits_R dA$, que, en unidades de volumen, es el correspondiente a un cilindro de altura unidad y, en unidades de superficie, representa el área de la región R.

(Ver Problemas 1-2.)

En coordenadas polares, $A = \iint\limits_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta$, donde $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $\varrho_1(\theta)$, y $\varrho_2(\theta)$ se toman de forma que quede reconida la región R.

(Ver Problemas 3-5.)

CENTRO GEOMETRICO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de una región plana R de área $A = \iint\limits_R dA$ satisfacen las relaciones

$$A \cdot \bar{x} = M_2 \quad \text{y} \quad A \cdot \bar{y} = M_2$$

o

$$\bar{x} \cdot \iint\limits_R dA = \iint\limits_R x\, dA \quad \text{y} \quad \bar{y} \cdot \iint\limits_R dA = \iint\limits_R y\, dA$$

(Ver Problemas 6-9.)

EL MOMENTO DE INERCIA de una región plana R con respecto a los ejes coordenados viene dado por

$$I_x = \iint\limits_R y^2\, dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint\limits_R x^2\, dA$$

El momento de inercia polar (momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano del área) de una región plana R viene dada por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_R (x^2 + y^2)\, dA$$

(Ver Problemas 10-12.)

Problemas resueltos

1. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$.

Trazando franjas verticales (ver Fig. 64-1), tenemos

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\, dx = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\, dx = 32/3 \text{ unidades de superficie}$$

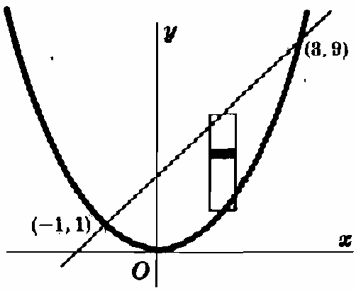

Fig. 64-1

2. Hallar el área comprendida entre las parábolas $y^2 = 4 - x$ e $y^2 = 4 - 4x$.

Integrando por franjas horizontales (ver Fig. 64-2) y teniendo en cuenta la simetría que se observa en la figura,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\, dy \\ &= 2\int_0^2 [(4-y^2) - (1-\tfrac{1}{4}y^2)]\, dy \\ &= 6\int_0^2 (1-\tfrac{1}{4}y^2)\, dy \\ &= 8 \text{ unidades de superficie.} \end{aligned}$$

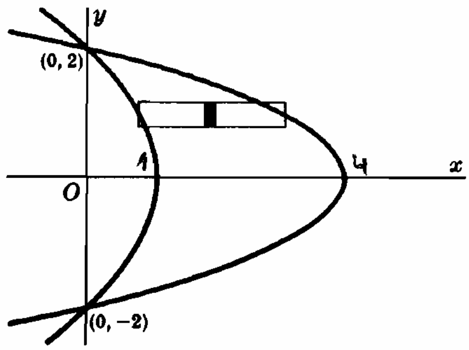

Fig. 64-2

3. Hallar el área exterior a la circunferencia $\varrho = 2$, e interior a la cardioide $\varrho = 2(1 + \cos\theta)$.

Dada la simetría, el área pedida es igual al doble del área barrida al variar θ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así pues,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\rho^2 \Big]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= 4\left[2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2} = (\pi + 8)\,\text{unid.de sup.} \end{aligned}$$

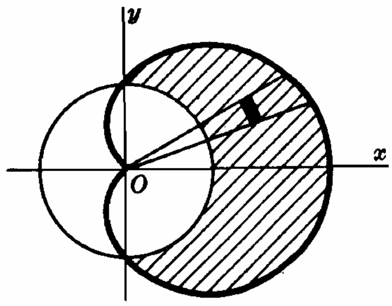

Fig. 64-3

4. Hallar el área interior a la circunferencia $\varrho = 4\,\text{sen}\,\theta$ y exterior a la lemniscata $\varrho^2 = 8\cos 2\theta$.

El área pedida es igual al doble de la correspondiente del primer cuadrante limitada por las dos curvas y la recta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Obsérvese que el arco AO de la lemniscata se genera al variar θ desde $\theta = \pi/6$ hasta $\theta = \pi/4$, mientras que el arco AB de la circunferencia lo hace al variar θ desde $\theta = \pi/6$ hasta $\theta = \pi/2$. Este área conviene dividirla en dos partes, una por debajo y otra por encima de la recta $\theta = \pi/4$. Así, pues,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{2\sqrt{2\cos 2\theta}}^{4\,\text{sen}\,\theta} \rho\, d\rho\, d\theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{4\,\text{sen}\,\theta} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16\,\text{sen}^2\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\,\text{sen}^2\theta\, d\theta \\ &= (\tfrac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4) \text{ unidades de superficie} \end{aligned}$$

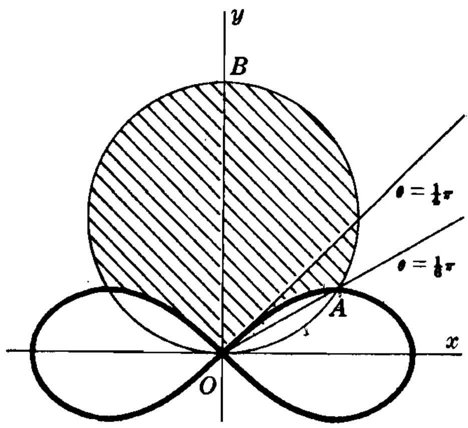

Fig. 64-4

5. Hallar $N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Como $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy$,

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dA \end{aligned}$$

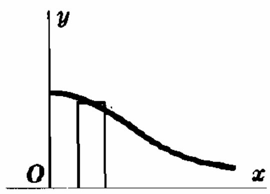

Fig. 64-5

Pasando a coordenadas polares ($x^2 + y^2 = \varrho^2$, $dA = \varrho\, d\varrho\, d\theta$),

$$N^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \lim_{a \to +\infty} (-\tfrac{1}{2}e^{-\rho^2})\Big]_0^a \right\} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

y $N = \sqrt{\pi}/2$.

6. Hallar el centro geométrico del área plana limitada por la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = x$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\,dx = \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \frac{125}{6}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx = \frac{625}{12}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \{(6x - x^2)^2 - x^2\}\,dx = \frac{625}{6}$$

Luego, $\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = \dfrac{5}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} = 5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(\frac{5}{2}, 5)$.

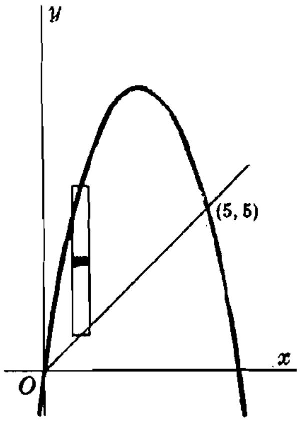

Fig. 64-6

7. Determinar el centro geométrico del área plana limitada por las parábolas $y = 2x - x^2$ e $y = 3x^2 - 6x$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 (8x - 4x^2)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \{(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2\}\,dx = -\frac{64}{15}$$

Luego, $\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = 1$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} = -\dfrac{4}{5}$, el centro geométrico es el punto $(1, -\frac{4}{5})$.

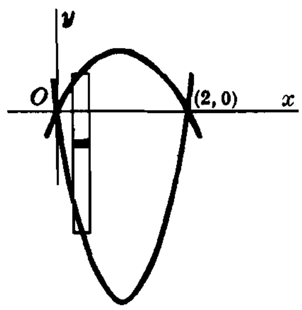

Fig. 64-7

8. Hallar el centro geométrico del área plana exterior a la circunferencia $\rho = 1$ e interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$. (Ver Fig. 64-8.)

De la figura se deduce que $y = 0$ y que es la que corresponde a la mitad situada por encima del eje polar. Para esta última área,

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \{(1 + \cos\theta)^2 - 1^2\}\,d\theta = \frac{\pi + 8}{8}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi + 32}{48}$$

Las coordenadas del centro geométrico son $\left(\dfrac{15\pi + 32}{6(\pi + 8)}, 0\right)$.

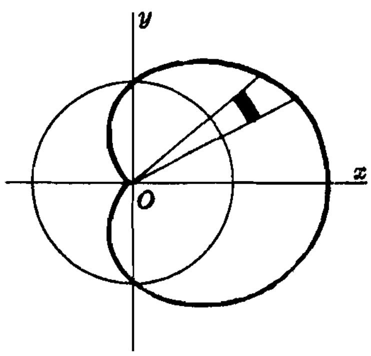

Fig. 64-8

9. Determinar el centro geométrico del área interior a $\rho = \operatorname{sen}\theta$ y exterior a $\rho = 1 - \cos\theta$. (Ver Fig. 64-9.)

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{4 - \pi}{4}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} (\rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3\pi - 4}{48}$$

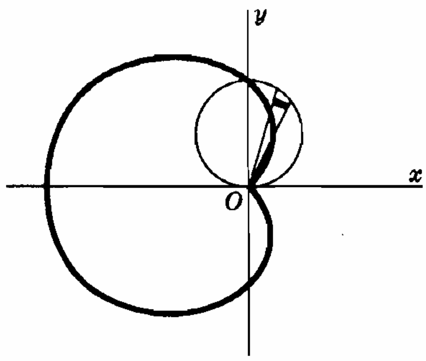

Fig. 64-9

Las coordenadas del centro geométrico son $\left(\dfrac{15\pi - 44}{12(4-\pi)}, \dfrac{3\pi - 4}{12(4-\pi)}\right)$

10. Hallar I_x, I_y e I_0 del área limitada por el lazo de $y^2 = x^2(2-x)$.

$$A = \iint_R dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4)\,dz = -4\left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

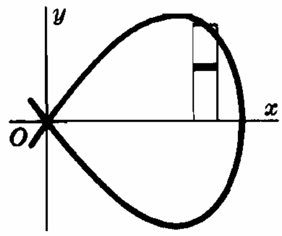

Fig. 64-10

haciendo el cambio $2 - x = z^2$.

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 x^3(2-x)^{3/2}\,dx$$
$$= -\frac{4}{3}\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^4\,dz = -\frac{4}{3}\left[\frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{2}{3}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231}A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2\,dy\,dx = 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^2\,dz = -4\left[\frac{8}{3}z^3 - \frac{12}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21}A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231}A.$$

11. Hallar I_x, I_y e I_0 del área del primer cuadrante exterior a la circunferencia $\rho = 2a$ e interior a la circunferencia $\rho = 4a\cos\theta$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \{(4a\cos\theta)^2 - (2a)^2\}\,d\theta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}a^2$$

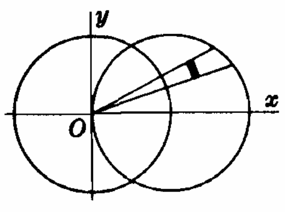

Fig. 64-11

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\operatorname{sen}\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\{(4a\cos\theta)^4 - (2a)^4\}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$
$$= 4a^4\int_0^{\pi/3}(16\cos^4\theta - 1)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{3}a^4 = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}a^2A$$

12. Hallar I_x, I_y e I_0 del área del círculo $\varrho = 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$.

Como $x^2 + y^2 = \varrho^2$,

$$I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\,dA = \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{2(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)} \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^4\,d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\operatorname{sen}4\theta\right]_{-1/4\,\pi}^{3/4\,\pi} = 6\pi = 3A$$

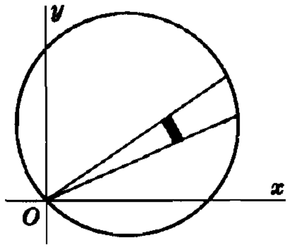

Fig. 64-12

De la Fig. 64-12, se deduce que $I_x = I_y$. Luego $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{2}A$.

Problemas propuestos

13. Hallar mediante una integral doble las áreas siguientes:

(*a*) la limitada por $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$. *Sol.* 24 un. sup.
(*b*) la limitada por $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$. *Sol.* 6 un. sup.
(*c*) la limitada por $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$. *Sol.* 32/3 un. sup.
(*d*) la interior a $\varrho = 2(1 - \cos\theta)$. *Sol.* 6π un. sup.
(*e*) la limitada por $\varrho = \operatorname{tag}\theta\sec\theta$ y $\theta = \pi/3$. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ un. sup.
(*f*) la exterior a $\varrho = 4$ e interior a $\varrho = 8\cos\theta$. *Sol.* $8(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3})$ un. sup.

14. Determinar el centro geométrico de las áreas siguientes:

(*a*) la del Problema 13(*a*). *Sol.* (8/3, 2)
(*b*) la del primer cuadrante del Problema 13(*c*). *Sol.* (3/2, 8/5)
(*c*) la del primer cuadrante limitada por $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 6$. *Sol.* (18/5, 9/4)
(*d*) la limitada por $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$, $x = 0$. *Sol.* (13/40, 26/15)
(*e*) la del primer cuadrante limitada por $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, $x = 0$. *Sol.* (3/4, 2/5)
(*f*) la del Problema 13(*e*). *Sol.* $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 6/5)$
(*g*) la del primer cuadrante del Problema 13(*f*). *Sol.* $\left(\dfrac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \dfrac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)$

15. Demostrar que si $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta [g_2^2(\theta) - g_1^2(\theta)]\,d\theta = \int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta = \iint_R dA$, se verifica

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

16. Hallar I_x e I_y de las áreas siguientes:

(*a*) la del Problema 13(*a*). *Sol.* $I_x = 6A$, $I_y = \frac{32}{3}A$
(*b*) la limitada por $y^2 = 8x$ y la ordenada del punto $x = 2$. *Sol.* $I_x = \frac{16}{5}A$, $I_y = \frac{12}{7}A$
(*c*) la limitada por $y = x^2$ e $y = x$. *Sol.* $I_x = \frac{3}{14}A$, $I_y = \frac{3}{10}A$
(*d*) la limitada por $y = 4x - x^2$ e $y = x$. *Sol.* $I_x = \frac{459}{70}A$, $I_y = \frac{27}{10}A$

17. Hallar I_x e I_y de un lazo de $\varrho^2 = \cos 2\theta$. *Sol.* $I_x = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{1}{6}\right)A$, $I_y = \left(\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{1}{6}\right)A$

18. Hallar I_0 de las áreas siguientes:

(*a*) un lazo de $\varrho = \operatorname{sen}2\theta$. *Sol.* $\frac{3}{8}A$
(*b*) la limitada por $\varrho = 1 + \cos\theta$. *Sol.* $\frac{35}{24}A$

Capítulo 65

Volumen limitado por una superficie

Integral doble

EL VOLUMEN LIMITADO POR UNA SUPERFICIE de ecuación $z = f(x, y)$, o bien $z = f(\varrho, \theta)$, es decir, el volumen de una columna vertical cuya base superior está en la superficie y la base inferior en el plano xOy, viene definido por la integral doble $V = \iint_R z\,dA$, siendo R la región que constituye la base inferior de la columna.

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen en el primer octante comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

De la Fig. 65-1 se deduce que hemos de integrar $z = x + y + 2$ según el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x + y + 2)\,dy\,dx = \int_0^4 (x\sqrt{16-x^2} + 8 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16-x^2})\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16-x^2} + 16 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4}x\right]_0^4 = \left(\frac{128}{3} + 8\pi\right) \text{unidades de volumen}$$

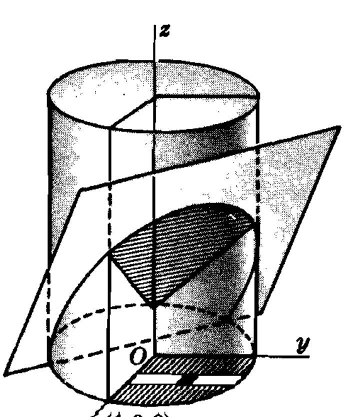

Fig. 65-1

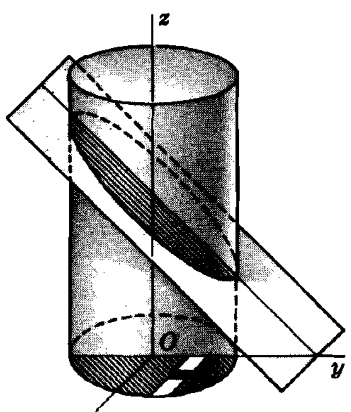

Fig. 65-2

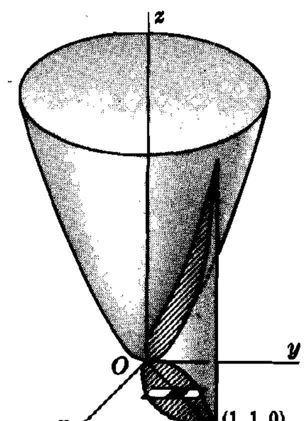

Fig. 65-3

2. Hallar el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

De la Fig. 65-2 se deduce que hemos de integrar $z = 4 - y$ según el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy = 2\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$

3. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, el plano $z = 0$ y los cilindros $y^2 = x$ y $x^2 = y$ (ver Fig. 65-3).

El volumen pedido se obtiene por integración de $z = x^2 + 4y^2$ en la región R común a las parábolas $y^2 = x$ y $x^2 = y$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{4}{3}y^3\right)\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \text{ unidades de volumen}$$

4. Hallar el volumen de la porción de cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = my$ (ver Fig. 65-4).

El volumen se obtiene integrando $z = my$ según la mitad de la elipse $4x^2 + y^2 = a^2$. Así pues,

$$V = 2\int_0^{a/2} \int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\, dy\, dx = m\int_0^{a/2} y^2\Big]_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ unidades de volumen}$$

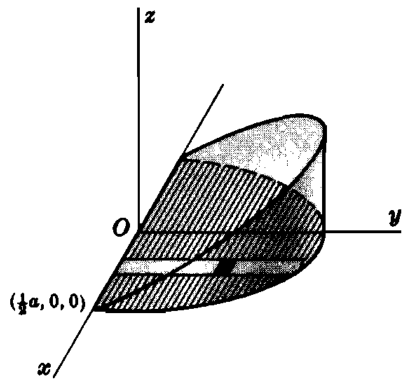

Fig. 65-4

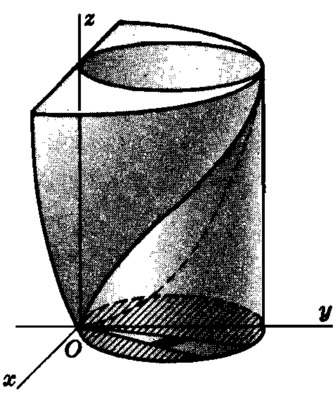

Fig. 65-5

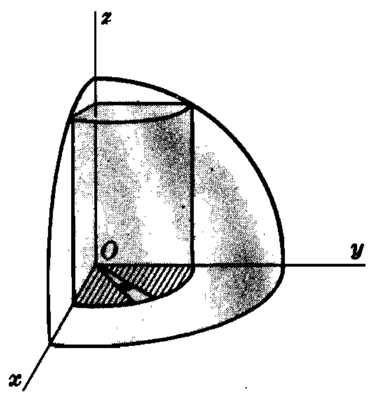

Fig. 65-6

5. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$ (ver Fig. 65-5).

El volumen pedido se obtiene integrando $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ según el círculo $x^2 + y^2 = 8y$. En coordenadas cilíndricas, el volumen se obtiene al integrar $z = \frac{1}{4}\varrho^2$ en el círculo $\varrho = 8 \operatorname{sen} \theta$. Por tanto,

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{8 \operatorname{sen} \theta} z\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \int_0^{8 \operatorname{sen} \theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\pi} \rho^4\Big]_0^{8 \operatorname{sen} \theta} d\theta = 256\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta = 96\pi \text{ unidades de volumen}$$

6. Hallar el volumen que se elimina cuando a una esfera de radio $2a$ se le practica un taladro de radio a de forma que el eje del orificio sea un diámetro de la esfera (ver Fig. 65-6).

De la figura se deduce que el volumen pedido es igual a ocho veces el correspondiente al del primer cuadrante limitado por el cilindro $\varrho^2 = a^2$, la esfera $\varrho^2 + z^2 = 4a^2$ y el plano $z = 0$. Este último volumen se obtiene integrando $z = \sqrt{4a^2 - \varrho^2}$ en un cuadrante del círculo $\varrho = a$. Por tanto,

$$V = 8\int_0^{\pi/2} \int_0^{a} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3}\, a^3)\, d\theta = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi \text{ unid. de vol.}$$

Problemas propuestos

7. Hallar el volumen limitado por $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ y el plano $z = 0$. *Sol.* 3π unidades de volumen.

8. Hallar el volumen limitado por $z = 3x$ y por encima del área del primer cuadrante limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, y $x^2 + y^2 = 25$. *Sol.* 98 unidades de volumen.

9. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + z = 9$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. *Sol.* 1 485/16 unidades de volumen.

10. Hallar el volumen del primer octante limitado por $xy = 4z$, $y = x$ y $x = 4$. *Sol.* 8 un. vol.

11. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + y^2 = 25$ y $z = y$. *Sol.* 125/3 un. vol.

12. Hallar el volumen común a los cilindros $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + z^2 = 16$. *Sol.* 1 024/3 un. vol.

13. Hallar el volumen del primer octante interior a $y^2 + z^2 = 9$ y exterior a $y^2 = 3x$. *Sol.* $27\pi/16$ un. vol.

14. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + z^2 = 16$ y $x - y = 0$. *Sol.* 64/3 un. vol.

15. Hallar el volumen delante de $x = 0$ y común a $y^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 + 2x = 16$. *Sol.* 28π un. vol.

16. Hallar el volumen interior a $\varrho = 2$ y exterior al cono $z^2 = \varrho^2$. *Sol.* $32\pi/3$ un. vol.

17. Hallar el volumen interior a $y^2 + z^2 = 2$ y exterior a $x^2 - y^2 - z^2 = 2$. *Sol.* $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$ un. vol.

18. Hallar el volumen común a $\varrho^2 + z^2 = a^2$ y $\varrho = a \operatorname{sen} \theta$. *Sol.* $2(3\pi - 4)a^3/9$ un. vol.

19. Hallar el volumen interior a $x^2 + y^2 = 9$, limitado inferiormente por $x^2 + y^2 + 4z = 16$ y superiormente por $z = 4$. *Sol.* $81\pi/8$ un. vol.

20. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $4x^2 + y^2 = 4z$ y el plano $z - y = 2$. *Sol.* 9π un. vol.

21. Hallar el volumen generado al girar la cardioide $\varrho = 2(1 - \cos \theta)$ alrededor del eje polar.
Sol. $V = 2\pi \int\int y\, \varrho\, d\varrho\, d\theta = 64\pi/3$ un. vol.

22. Hallar el volumen generado al girar un pétalo de $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$ alrededor de su eje. *Sol.* $32\pi/105$ un. vol.

23. En una esfera de radio 2 (unidades de longitud) se practica un taladro de sección cuadrada de lado igual a 2 (unidades de longitud), siendo su eje un diámetro de la esfera. Demostrar que el volumen eliminado es $\frac{4}{3}(2\sqrt{2} + 19\pi - 54 \operatorname{arc\,tag} \sqrt{2})$ unidades de volumen.

Capítulo 66

Area de una superficie

Integral doble

EN EL CALCULO DE LA LONGITUD DE UN ARCO se efectúan las operaciones siguientes: (1) Se proyecta el arco sobre uno de los ejes coordenados determinando un cierto intervalo sobre el eje y (2) se integra la función $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, si la proyección se realiza sobre el eje x, o bien $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, si la proyección se realiza sobre el eje y, en el intervalo anterior.

Para calcular el área S de una porción R' de una superficie $z = f(x, y)$ se sigue un procedimiento análogo:

(1) Se proyecta R' sobre uno de los planos coordenados determinando una región R en dicho plano.

(2) Se integra, en la región R la función

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } xOy$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } yOz$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } zOx$$

Problemas resueltos

1. Sea R' una región de área S sobre la superficie $z = f(x,y)$. Por el contorno de R' pasa un cilindro vertical (ver Fig. 66-1) que corta al plano xOy según la región R. Se divide R en n subregiones ΔA_i (de áreas ΔA_i) y sea ΔS_i el área de la proyección de ΔA_i sobre R'. Se elige un punto P_i en cada subregión ΔS_i y se traza en él, el plano tangente a la superficie, siendo ΔT_i el área de la proyección de ΔA_i sobre este plano tangente. El valor ΔT_i es una aproximación del área ΔS_i.

El ángulo formado por el plano xOy y el plano tangente en P_i es igual al ángulo γ_i formado por el eje z, $[0, 0, 1]$ y la normal, $\left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right]$ a la superficie en P_i. Es decir,

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

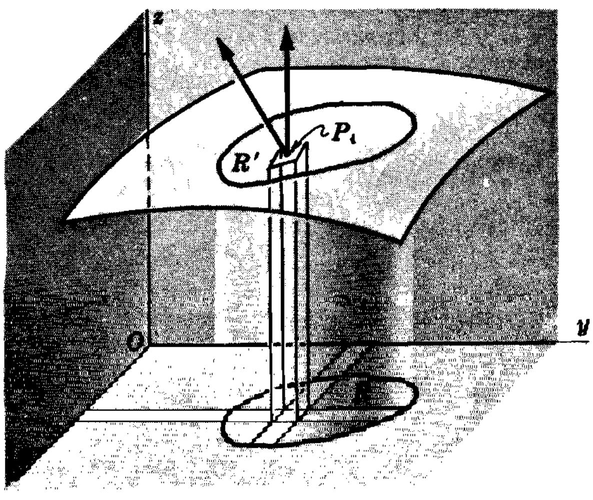

Fig. 66-1

Por tanto (ver Fig. 66-2),

$$\Delta T_i \cdot \cos \gamma_i = \Delta A_i \text{ y } \Delta T_i = \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i$$

Luego, una aproximación de S es $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i$, y

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i = \iint_R \sec \gamma \cdot dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

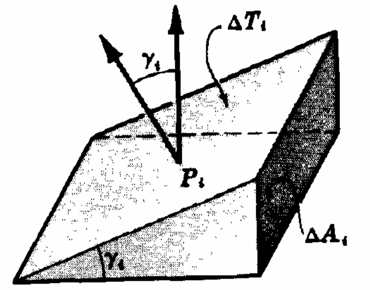

Fig. 66-2

2. Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ situada por encima del plano xOy e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

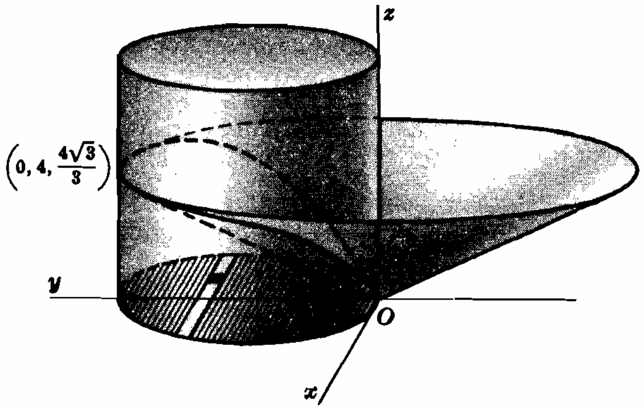

Fig. 66-3

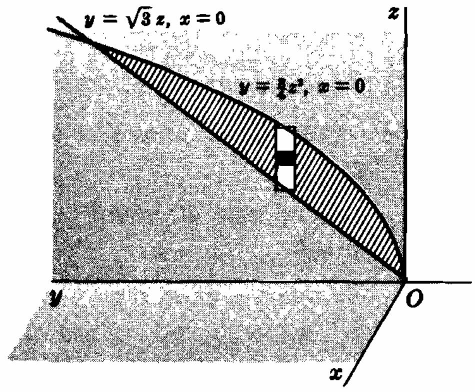

Fig. 66-4

Solución 1. La proyección del área pedida (ver Fig. 66-3) sobre el plano xOy es la región R limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 4y$. Para el cono,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{z}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

Solución 2. La proyección de la mitad del área pedida, sobre el plano yOz, es la región R limitada por la recta $y = \sqrt{3}\, z$ y la parábola $y = \frac{3}{4}z^2$; esta ecuación se obtiene eliminando x en las ecuaciones de las dos superficies. Para el cono,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2 - y^2}$$

Luego,

$$S = 2\int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}\, z}{\sqrt{3z^2 - y^2}}\, dz\, dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \Big[\sqrt{3z^2 - y^2}\Big]_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy$$

Solución 3. Empleando coordenadas cilíndricas en la *Solución 1*, hemos de integrar la función $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ a lo largo de la región R limitada por la circunferencia $\rho = 4 \operatorname{sen} \theta$. Así pues,

$$S = \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}}\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \operatorname{sen} \theta} \frac{2}{\sqrt{3}}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \Big[\rho^2\Big]_0^{4 \operatorname{sen} \theta} d\theta$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

3. Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ (Fig. 66-5).

En la figura, se representa la octava parte del área pedida, y su proyección sobre el plano xOy constituida por un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$. Para el cilindro $x^2 + z^2 = 16$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+z^2}{z^2} = \frac{16}{16-x^2}$$

Luego,

$$S = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\,dy\,dx = 32\int_0^4 dx = 128 \text{ unidades de superficie}$$

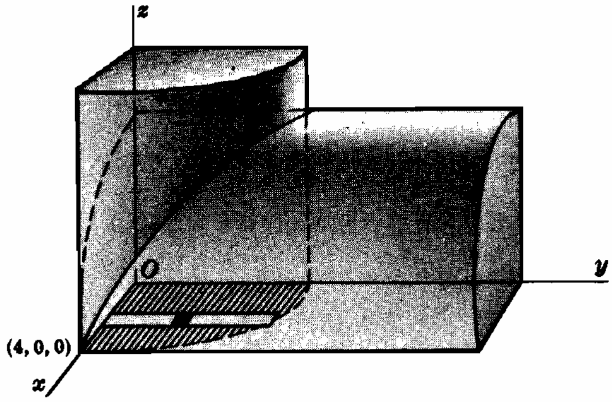

Fig. 66-5

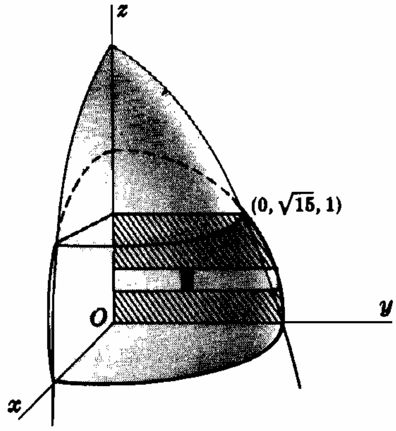

Fig. 66-6

4. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$ (Fig. 66-6).

En la figura, se representa la cuarta parte del área pedida, y su proyección sobre el plano yOz constituida por la región R limitada por la circunferencia $y^2 + z^2 = 16$, los ejes y y z y la recta $z = 1$. Para la esfera,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2} = \frac{16}{16-y^2-z^2}$$

Luego

$$S = 4\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dA = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-z^2}}\,dy\,dz$$

$$= 16\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{\sqrt{16-z^2}}\Bigg]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz = 16\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\,dz = 8\pi \text{ unidades de superficie}$$

5. Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$ situada dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ (Fig. 66-7).

En la figura, se representa la cuarta parte del área pedida, su proyección sobre el plano yOz constituida por la región R limitada por los ejes z e y y la parábola $z^2 + 6y = 36$. Esta última ecuación resulta de eliminar x en las ecuaciones de las dos superficies. Para el cilindro,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3-y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

y

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+9-6y+y^2}{x^2} = \frac{9}{6y-y^2}$$

Luego

$$S = 4\int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-6y}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}\,dz\,dy$$

$$= 12\int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}}\,dy = 144 \text{ unidades de superficie}$$

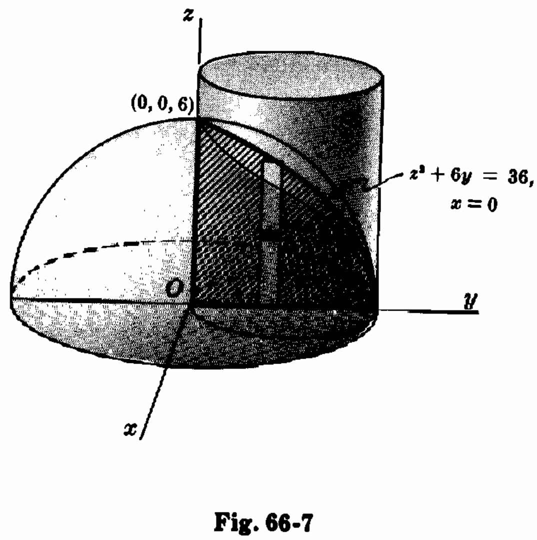

Fig. 66-7

Problemas propuestos

6. Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ interior al prisma vertical cuya base es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $x = 0$ e $y = 1$ en el plano xOy. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ unidades de superficie.

7. Hallar el área de la porción del plano $x + y + z = 6$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
Sol. $4\sqrt{3}\pi$ un. sup.

8. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.
Sol. $72(\pi - 2)$ un. sup.

9. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ interior al paraboloide $x^2 + y^2 = z$.
Sol. 4π un. sup.

10. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$.
Sol. 20π un. sup.

11. Hallar el área de la porción de la esfera $z = xy$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
Sol. $2\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$ un. sup.

12. Hallar el área de la superficie del cono $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ encima del plano $z = 0$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.
Sol. $3\sqrt{10}\pi$ un. sup.

13. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ interior al cilindro elíptico $2x^2 + y^2 = 25$.
Sol. 50π un.sup.

14. Hallar el área de la superficie de $x^2 + y^2 - az = 0$ que está situada directamente encima de la lemniscata $4\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$.
Sol. $S = \dfrac{4}{a}\displaystyle\iint \sqrt{4\rho^2 + a^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \dfrac{a^2}{3}\left\{\dfrac{5}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right\}$ un. sup.

15. Hallar el área de la superficie de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está situada directamente encima de la cardioide $\varrho = 1 - \cos\theta$.
Sol. $8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ un. sup.

Capítulo 67

Integral triple

LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ de una función de tres variables independientes extendida a una región cerrada R de puntos (x, y, z), de volumen V, en la cual la función es uniforme y continua no es más que una generalización del concepto de integral simple y doble.

En el caso de que $f(x, y, z) = 1$, la integral $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ representa la medida del volumen de la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ en coordenadas rectangulares.

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy, \quad \text{etc.}$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(\varrho, \theta, z)\, dV$ en coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_R f(\rho, \theta, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint_R f(\varrho, \phi, \theta)\, dV$ en coordenadas esféricas.

$$\iiint_R f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CENTRO GEOMETRICO Y MOMENTOS DE INERCIA. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ del *centro geométrico de un volumen* satisfacen las relaciones

$$\bar{x} \iiint_R dV = \iiint_R x\, dV, \quad \bar{y} \iiint_R dV = \iiint_R y\, dV,$$

$$\bar{z} \iiint_R dV = \iiint_R z\, dV$$

Los *momentos de inercia de un volumen* con respecto a los ejes coordenados vienen dados por

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\, dV, \quad I_y = \iiint_R (z^2 + x^2)\, dV,$$

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dV$$

Problemas resueltos

1. Consideremos la función $f(x, y, z)$, continua en una región R del espacio. Cortando a R por una serie de planos paralelos, $x = \xi_i$, $y = \eta_j$ y $z = \zeta_k$, dicha región queda dividida en paralelepípedos rectos de volumen $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$, y en cierto número de paralelepípedos incompletos que ignoramos. En cada uno de los paralelepípedos completos se elige un punto $P_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$ al que corresponde el valor $f(x_i, y_j, z_k)$, y formamos la suma

(i) $$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \Delta V_{ijk} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

La integral triple de $f(x, y, z)$ extendida a la región R es, por definición, el límite de (i) cuando el número de paralelepípedos crece indefinidamente de forma que las tres dimensiones de cada uno de ellos tiendan a cero.

Para hallar este límite, se pueden sumar, en primer lugar, todos los paralelepípedos que tienen dos dimensiones iguales a $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$ considerando i y j constantes, y calcular el límite cuando $\Delta_k z \to 0$. Así pues,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta_k z\, \Delta_i x\, \Delta_j y = \int_{z_1}^{z_2} f(x_i, y_j, z)\, dz\, \Delta_i x\, \Delta_j y$$

Ahora bien, estas son las columnas de las subregiones de la base consideradas en el Capítulo 23; por consiguiente,

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty\\ p\to+\infty}} \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \Delta V_{ijk} = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

2. Hallar.

(a) $$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{2-x} xyz\, dz \right\} dy \right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \frac{xyz^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=2-x} \right\} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{xy(2-x)^2}{2} dy \right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4} \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5)\, dx = \frac{13}{240}$$

(b) $$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^2 z\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, dz\, d\rho\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3\Bigg|_0^1 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{2}{3}\cos\theta\Bigg|_0^{\pi/2} = 2/3$$

(c) $$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \operatorname{sen} 2\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = 2\int_0^{\pi} (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\, d\theta = (2 - \sqrt{2})\pi$$

3. Hallar la integral triple de $F(x, y, z) = z$ extendida a la región R del primer octante limitada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ (ver Figura 67-1).

Integremos primero con respecto a z, desde $z = 0$ (plano xOy) hasta $z = \sqrt{4 - y^2}$ (cilindro); luego, lo hacemos con respecto a x, desde $x = 2 - y$ hasta $x = 6 - 2y$, y finalmente con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 2$. En estas condiciones,

$$\iiint_R z\, dV = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\, dz\, dx\, dy = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (\tfrac{1}{2}z^2)\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4 - y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (4 - y^2)x\Big]_{2-y}^{6-2y} dy = \frac{26}{3}$$

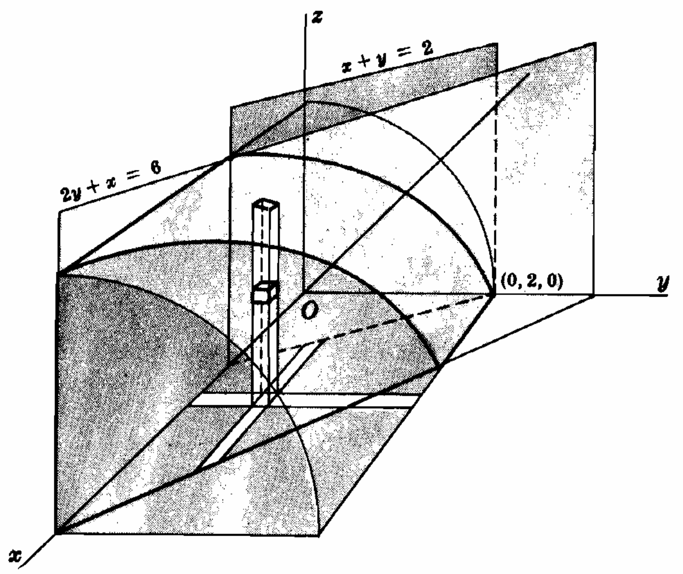

Fig. 67-1

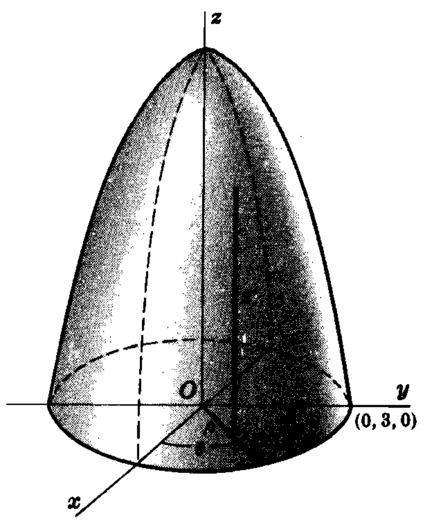

Fig. 67-2

4. Hallar la integral triple de $f(\varrho, \theta, z) = \varrho^2$ extendida a la región R limitada por el paraboloide $\varrho^2 = 9 - z$ y el plano $z = 0$ ver Figura 67-2).

Integramos primero con respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = 9 - \varrho^2$, a continuación con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = 3$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Por tanto,

$$\iiint_R \rho^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-\rho^2} \rho^2(\rho\, dz\, d\rho\, d\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^3(9-\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{9}{4}\rho^4 - \tfrac{1}{6}\rho^6\right)\Big]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{4}\, d\theta = \frac{243}{2}\pi$$

5. Demostrar que las integrales $(a)\ 4\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/4}^4 dz\, dy\, dx$, $(b)\ 4\int_0^4\int_0^{2\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy\, dx\, dz$, y $(c)\ 4\int_0^4\int_{y^2/4}^4\int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx\, dz\, dy$ representan el mismo volumen.

(*a*) En este caso, z varía entre $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ y $z = 4$; es decir, el volumen está limitado inferiormente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, y superiormente por el plano $z = 4$. Al variar y y x, se recorre un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$, la proyección de la curva de intersección del paraboloide con el plano $z = 4$ sobre el plano xOy. Por tanto, la integral proporciona el volumen limitado por el paraboloide y por el plano $z = 4$.

(*b*) En este caso, y varía desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{4z - x^2}$; es decir, el volumen está limitado a la izquierda por el plano zOx, y a la derecha por el paraboloide $y^2 = 4z - x^2$. Al variar x y z se recorre la mitad del área limitada por la parábola $x^2 = 4z$, $y = 0$, la curva de intersección del paraboloide con el plano zOx y el plano $z = 4$. La región R es la de (*a*).

(*c*) El volumen está limitado por detrás por el plano yOz y por delante por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$. Al variar z e y se recorre la mitad del área limitada por la parábola $y^2 = 4z$, $x = 0$, la curva de intersección del paraboloide y el plano yOz y por el plano $z = 4$. La región R es la de (*a*).

6. Hallar la integral triple de $F(\varrho, \phi, \theta) = 1/\varrho$ extendida a la región R del primer octante limitada por los conos $\phi = \frac{1}{4}\pi$ y $\phi = \text{arc tag } 2$ y la esfera $\varrho = \sqrt{6}$ (Figura 67-3).

Integramos primero con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = \sqrt{6}$; a continuación, lo hacemos con respecto a ϕ, desde $\phi = \frac{1}{4}\pi$ hasta $\phi = \text{arc tag } 2$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así pies,

$$\iiint_R \frac{1}{\rho}\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\text{arc tag } 2}\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\text{arc tag } 2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = -3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

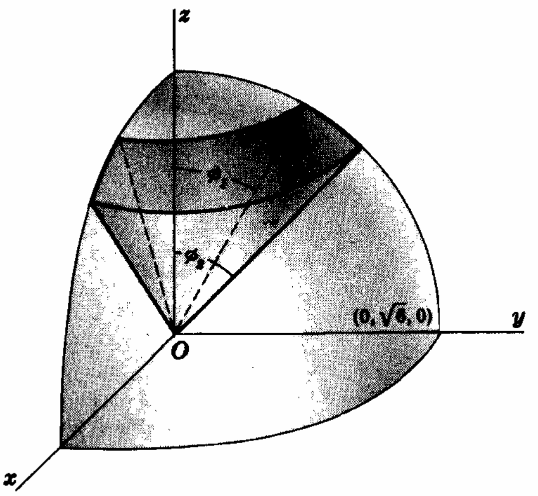

Fig. 67-3

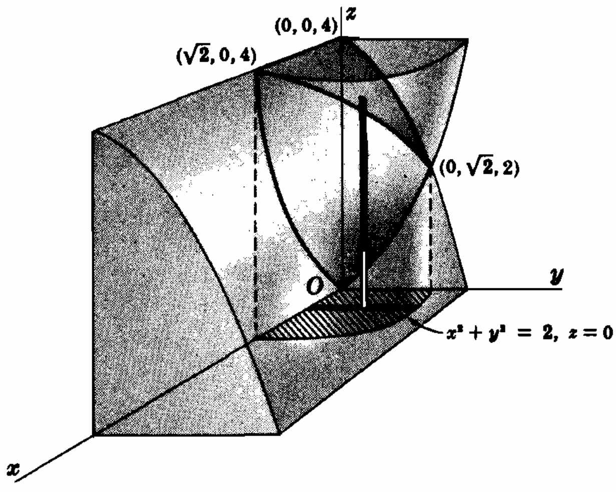

Fig. 67-4

7. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$ (Figura 67-4).

Integremos en primer lugar con respecto a z, desde $z = 2x^2 + y^2$ hasta $z = 4 - y^2$; a continuación con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{2 - x^2}$ (la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ se obtiene eliminando z en las ecuaciones de las dos superficies), y finalmente con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{2}$ (obtenido al sustituir $y = 0$ en $x^2 + y^2 = 2$) determinando así la cuarta parte del volumen pedido. Por tanto,

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\, dy\, dx = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \{(4-y^2) - (2x^2+y^2)\}\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}} \left(4y - 2x^2y - \frac{2y^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3}\int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2}\, dx = 4\pi \text{ unidades de volumen}$$

8. Hallar el volumen interior al cilindro $\varrho = 4\cos\theta$ limitado superiormente por la esfera $\varrho^2 + z^2 = 16$, e inferiormente por el plano $z = 0$ (Figura 67-5).

Integremos primero con respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = \sqrt{16 - \varrho^2}$; a continuación lo hacemos con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = 4\cos\theta$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, obteniendo así el volumen pedido. En estas condiciones,

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta}\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta} \rho\sqrt{16-\rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

$$= -\frac{64}{3}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^3\theta - 1)\, d\theta = \frac{64}{9}(3\pi - 4) \text{ unidades de volumen}$$

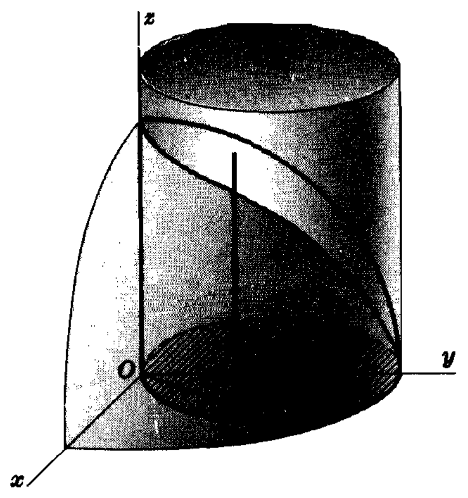

Fig. 67-5

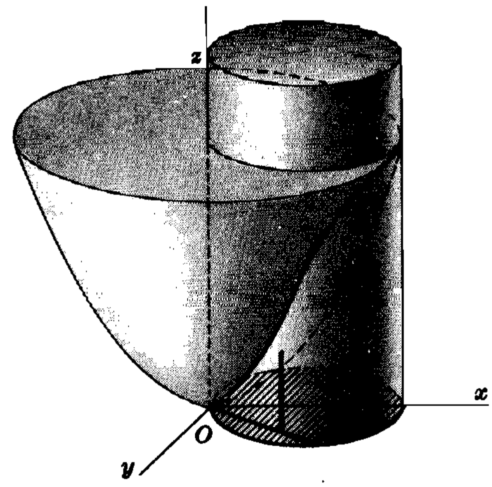

Fig. 67-6

9. Determinar las coordenadas del centro geométrico del volumen interior al cilindro $\varrho = 2\cos\theta$ limitado superiormente por el paraboloide $z = \varrho^2$, e inferiormente por el plano $z = 0$ (Fig. 67-6).

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^4\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$M_{yz} = \iiint_R x\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\cos\theta \cdot \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \cos\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{64}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta = 2\pi, \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{4}{3}$$

Por simetría, $\bar{y} = 0$.

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} z\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^5\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta = \frac{5}{3}\pi, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{10}{9}$$

Así pues, las coordenadas del centro geométrico (4/3, 0, 10/9),

10. Dado un cono recto circular de radio r y altura h, determinar (*a*) el centro geométrico, (*b*) el momento de inercia con respecto a su eje, (*c*) el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera que pase por su vértice y sea perpendicular a su eje, (*d*) el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera que pase por el centro geométrico y sea perpendicular al eje, (*e*) el momento de inercia con respecto a un diámetro de la base.

Considerando el cono como se representa en la Fig. 67-7, su ecuación es $\varrho = \frac{r}{h}z$. Por tanto,

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} \left(h\rho - \frac{h}{r}\rho^2\right) d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}hr^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

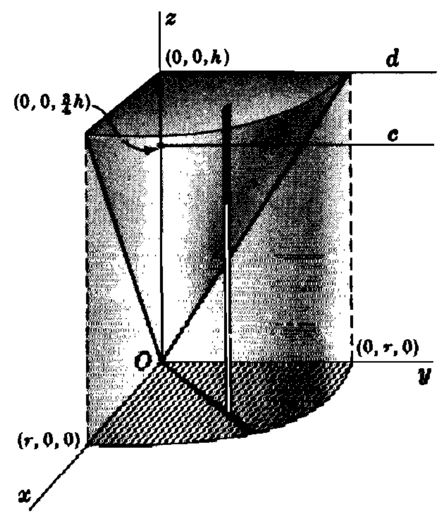

Fig. 67-7

(*a*) El centro geométrico está situado en el eje z.

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h z\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left(h^2\rho - \frac{h^2}{r^2}\rho^3\right) d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}h^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{4}\pi h^2 r^2$$

y $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{V} = \dfrac{3}{4}h$. Luego, las coordenadas del centro geométrico son $(0,0,\frac{3}{4}h)$.

(*b*) $$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h \rho^2\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{10}\pi h r^4 = \frac{3}{10}r^2V$$

(*c*) Tomando la recta como eje y.

$$I_y = \iiint_R (x^2+z^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h (\rho^2\cos^2\theta + z^2)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left\{\left(h\rho^3 - \frac{h}{r}\rho^4\right)\cos^2\theta + \frac{1}{3}\left(h^3\rho - \frac{h^3}{r^3}\rho^4\right)\right\} d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\pi h r^2\left(h^2 + \frac{1}{4}r^2\right) = \frac{3}{5}\left(h^2+\frac{1}{4}r^2\right)V$$

(*d*) Sea c la recta que pasa por el centroide y es paralela al eje y. Por el teorema de Steiner,

$$I_y = I_c + V(\tfrac{3}{4}h)^2 \quad \text{y} \quad I_c = \tfrac{3}{5}(h^2+\tfrac{1}{4}r^2)V - \tfrac{9}{16}h^2V = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V$$

(*e*) Sea d el diámetro de la base del cono, tomado paralelo al eje y. Tendremos

$$I_d = I_c + V(\tfrac{1}{4}h)^2 = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V + \tfrac{1}{16}h^2V = \tfrac{1}{20}(2h^2+3r^2)V$$

11. Hallar el volumen limitado por el cono $\phi = \frac{1}{4}\pi$ y la esfera $\rho = 2a\cos\phi$ (Ver Figura 67-8).

$$V = 4\iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\cos^3\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = 2a^3\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi a^3 \text{ unidades de volumen}$$

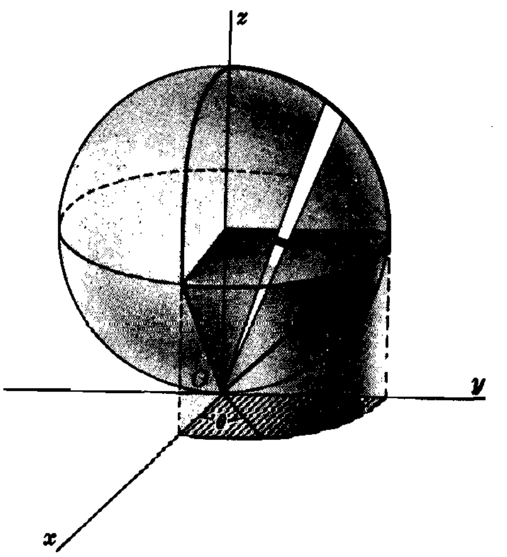

Fig. 67-8

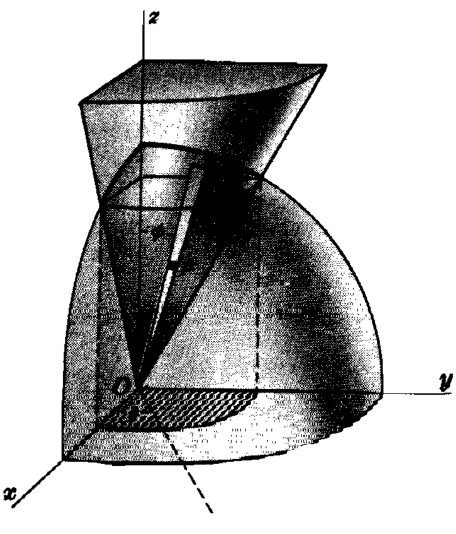

Fig. 67-9

12. Determinar el centro geométrico del volumen limitado por un cono de ángulo en el vértice igual a 60° y una esfera de radio 2 cuyo centro está en el vértice del cono. (Ver Figura 67-9.)

Tomando las superficies como se indican en la figura, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. En coordenadas esféricas, la ecuación del cono es $\phi = \pi/6$, y la correspondiente a la esfera es $\rho = 2$.

$$V = \iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z \, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2\phi \, d\phi \, d\theta = \pi, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{8}.$$

13. Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del volumen del Problema 12.

$$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{128}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{128}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{15}(16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5-2\sqrt{3}}{5}V$$

Problemas propuestos

14. Hallar las integrales triples siguientes:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2\int_2^3 dz\, dx\, dy = 1$

(*b*) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x}\int_0^{xy} dz\, dy\, dx = 1/24$

(*c*) $\displaystyle\int_0^6\int_0^{12-2y}\int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dx\, dy = 144 = \int_0^{12}\int_0^{6-x/2}\int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dy\, dx$

(*d*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{4}\int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16-\rho^2)^{1/2}\rho\, z\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{256}{5}\pi$

(*e*) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2500\pi$

15. (*a*) Hallar la integral del Problema 14(*b*) cambiando el orden a *dz dx dy*.

(*b*) Hallar la integral del Problema 14(*c*) cambiando el orden a *dx dy dz* y también a *dy dz dx*.

16. Hallar los volúmenes siguientes, por medio de una integral triple y empleando coordenadas rectangulares:

(*a*) interior a $x^2 + y^2 = 9$, encima de $z = 0$, y debajo de $x + z = 4$. *Sol.* 36π un. vol.

(*b*) limitado por planos coordenados y $6x + 4y + 3z = 12$. *Sol.* 4 un. vol.

(*c*) interior a $x^2 + y^2 = 4x$, encima de $z = 0$, y debajo de $x^2 + y^2 = 4z$. *Sol.* 6π un. vol.

17. Hallar los volúmenes siguientes, por medio de una integral triple y empleando coordenadas cilíndricas:

(*a*) Problema 5.

(*b*) Problema 16(*c*).

(*c*) inferior a $\rho^2 = 16$, encima de $z = 0$, y debajo de $2z = y$. *Sol.* 64/3 un. vol.

18. Determinar el centro geométrico de los volúmenes siguientes:

(*a*) interior a $z^2 = xy$ y encima del triángulo $y = x$, $y = 0$, $x = 4$. en el plano $z = 0$. *Sol.* $(3, 9/5, 9/8)$

(*b*) Problema 16(*b*). *Sol.* $(1/2, 3/4, 1)$

(*c*) volumen del primer octante del Problema 16(*a*). *Sol.* $\left(\dfrac{64-9\pi}{16(\pi-1)}, \dfrac{23}{8(\pi-1)}, \dfrac{73\pi-128}{32(\pi-1)}\right)$

(*d*) Problema 16(*c*). *Sol.* $(8/3, 0, 10/9)$

(*e*) Problema 17(*c*). *Sol.* $(0, 3\pi/4, 3\pi/16)$

19. Hallar los momentos de inercia I_x, I_y, I_z de los volúmenes siguientes:

(*a*) Problema 5. *Sol.* $I_x = I_y = \frac{32}{3}V$, $I_z = \frac{16}{3}V$

(*b*) Problema 16(*b*) *Sol.* $I_x = \frac{5}{2}V$, $I_y = 2V$, $I_z = \frac{13}{10}V$

(*c*) Problema 16(*c*) *Sol.* $I_x = \frac{55}{18}V$, $I_y = \frac{175}{18}V$, $I_z = \frac{80}{9}V$

(*d*) limitado por $z = \varrho^2$ y el plano $z = 2$. *Sol.* $I_x = I_y = \frac{7}{3}V$, $I_z = \frac{2}{3}V$

20. Demostrar que, en coordenadas cilíndricas, la integral triple de una función $f(\varrho, \theta, z)$ extendida a una región R se puede representar por

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

Ind. Considérese (ver Fig. 67-10) una subregión genérica de R limitada por dos cilindros cuyo eje sea Oz y de radios ϱ y $\varrho = \Delta\varrho$, dos planos horizontales que pasen por los puntos $(0, 0, z)$ y $(0, 0, z + \Delta z)$ y dos planos verticales que pasen por el eje Oz y formen con el plano xOz los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$. Tómese $\Delta v = (\varrho\Delta\theta)\,\Delta\varrho \cdot \Delta z$ como una aproximación de este volumen.

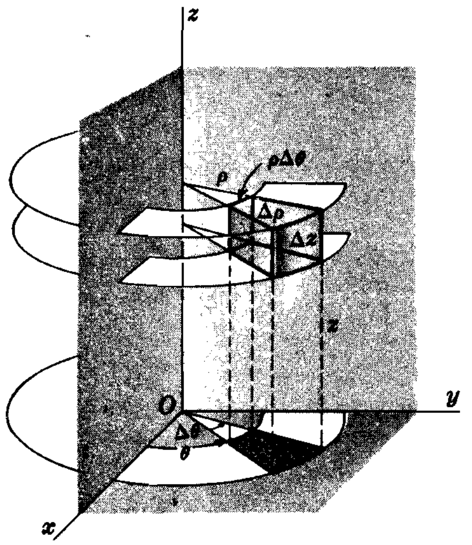

Fig. 67-10

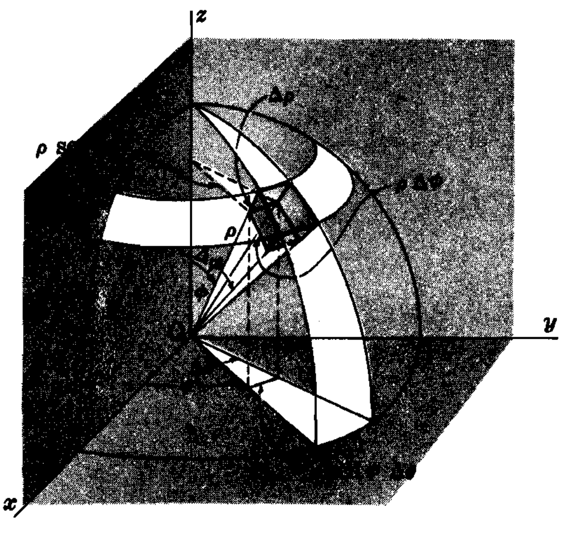

Fig. 67-11

21. Demostrar que, en coordenadas esféricas, la integral triple de una función $f(\varrho, \phi, \theta)$ extendida a una región R se puede representar por

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Ind. Considérese (ver Fig. 67-11) una subregión genérica de R limitada por dos esferas de centro O y radios ϱ y $\varrho + \Delta\varrho$, dos conos de vértices O, eje Oz y semiángulo en el vértice ϕ y $\phi + \Delta\phi$, y dos planos verticales que pasen por el eje Oz y formen con el plano zO y los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$. Tómese

$$\Delta V = (\varrho\,\Delta\phi)(\varrho \operatorname{sen}\phi\,\Delta\theta)(\Delta\varrho) = \varrho^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta\varrho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$$

como una aproximación de este volumen.

Capítulo 68

Cuerpos de densidad variable

LOS CUERPOS HOMOGENEOS con los que hemos tratado en los capítulos anteriores se consideraron como figuras geométricas de densidad $\delta = 1$. La masa de un sólido homogéneo de volumen V y densidad δ viene dada por $m = \delta V$.

La masa elemental dm de un sólido no homogéneo cuya densidad varía de punto a punto viene dada por:

$\delta(x, y)\, ds$	para una línea material (por ejemplo, una varilla fina),
$\delta(x, y)\, dA$	para una superficie material (por ejemplo, una hoja de metal delgada),
$\delta(x, y, z)\, dV$	para un sólido material.

Problemas resueltos

1. Hallar la masa de una varilla semicircular sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al diámetro que une sus extremos.

Tomando la varilla como se indica en la Fig. 68-1, $\delta(x, y) = ky$.

Por tanto, de $x^2 + y^2 = r^2$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{r}{y}\, dx$$

y

$$m = \int \delta(x, y)\, ds = \int_{-r}^{r} ky \cdot \frac{r}{y}\, dx = kr \int_{-r}^{r} dx = 2kr^2 \text{ unidades}$$

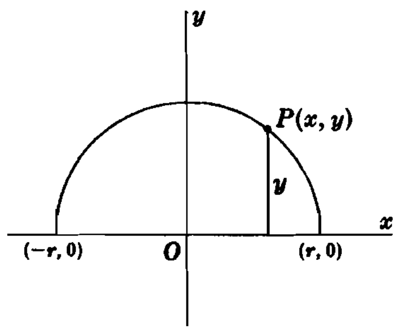

Fig. 68-1

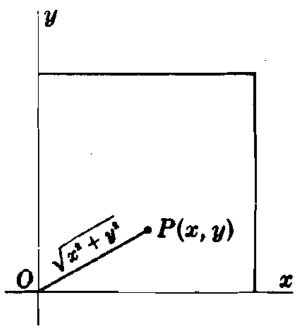

Fig. 68-2

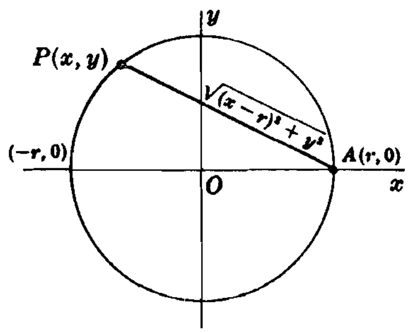

Fig. 68-3

2. Hallar la masa de una placa cuadrada de lado a sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un vértice (Fig. 68-2).

Tomando el cuadrado como se indica en la figura, de forma que uno de sus vértices coincida con el origen, $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, y

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2)\, dx\, dy = k \int_0^a \left(\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2\right) dy = \tfrac{2}{3}ka^4 \text{ unidades}$$

3. Hallar la masa de un plato circular de radio r sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un punto de la circunferencia (Fig. 68-3).

Tomando el círculo como se indica en la figura, llamando $A(r, 0)$ al punto fijo elegido sobre la circunferencia $\delta(x, y) = k\{(x - r)^2 + y^2\}$, y

$$m \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,dA \;=\; 2\int_{-r}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k\{(x-r)^2 + y^2\}\,dy\,dx \;=\; \frac{3}{2}k\pi r^4 \text{ unidades}$$

4. Determinar el centro de masas de un plato cuyo contorno es un arco de la parábola $y^2 = 8x$ limitada por la ordenada en el punto $x = 2$, sabiendo que la densidad en cada punto es igual a su distancia a dicha ordenada. Ver Fig. 68-4.

Será, $\delta(x, y) = 2 - x$ y por simetría $\bar{y} = 0$. Para la mitad superior de la placa.

$$m \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,dA \;=\; \int_0^4\int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,dx\,dy \;=\; k\int_0^4\left(2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{128}\right)dy \;=\; \frac{64}{15}k,$$

$$M_y \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,x\,dA \;=\; \int_0^4\int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,x\,dx\,dy \;=\; k\int_0^4\left(\frac{4}{3} - \frac{y^4}{64} + \frac{y^6}{24\cdot 64}\right)dy \;=\; \frac{128}{35}k$$

y $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{6}{7}$. Las coordenadas del centro de masas son $(\frac{6}{7}, 0)$

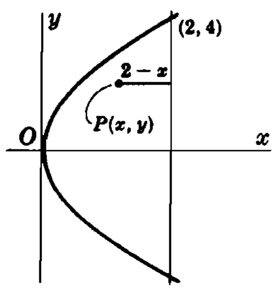

Fig. 68-4

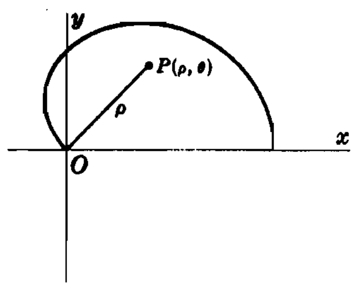

Fig. 68-5

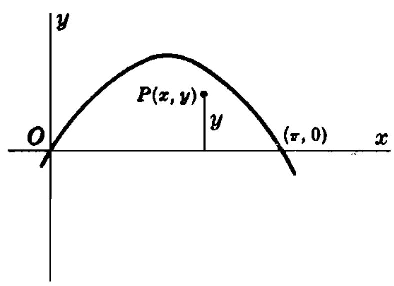

Fig. 68-6

5. Determinar el centro de masas de un plato cuyo borde presenta la forma de media cardioide de ecuación $\rho = 2(1 + \cos\theta)$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al polo (Fig. 68-5).

$$m \;=\; \iint_R \delta(\rho,\theta)\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta \;=\; \frac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\,d\theta \;=\; \frac{20}{3}k\pi,$$

$$M_x \;=\; \iint_R \delta(\rho,\theta)\,y\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,\operatorname{sen}\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\; 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\operatorname{sen}\theta\,d\theta \;=\; \frac{128}{5}k,$$

$$M_y \;=\; \iint_R \delta(\rho,\theta)\,x\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta \;=\; 14k\pi$$

Luego $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{21}{10}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{96}{25\pi}$, y las coordenadas del centro de masas son $\left(\dfrac{21}{10}, \dfrac{96}{25\pi}\right)$.

6. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje x, de un plato cuyo contorno es un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, sabiendo que la densidad de cada punto es proporcional a su distancia al eje x (Fig. 68-6).

$$m \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} ky\,dy\,dx \;=\; \frac{1}{2}k\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx \;=\; \frac{1}{4}k\pi$$

y

$$I_x \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,y^2\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} ky\cdot y^2\cdot dy\,dx \;=\; \frac{1}{4}k\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4 x\,dx \;=\; \frac{3}{32}k\pi \;=\; \frac{3}{8}m$$

7. Hallar la masa de una esfera de radio r sabiendo que la densidad en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro (Fig. 68-7).

Tomando la esfera como indica la figura, $\delta(x, y, z) = \dfrac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{k}{\rho^2}$ y

$$m = \iiint_R \delta(x,y,z)\,dV = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^r \frac{k}{\rho^2}\cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 8kr\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = 8kr\int_0^{\pi/2} d\theta = 4k\pi r \text{ unidades}$$

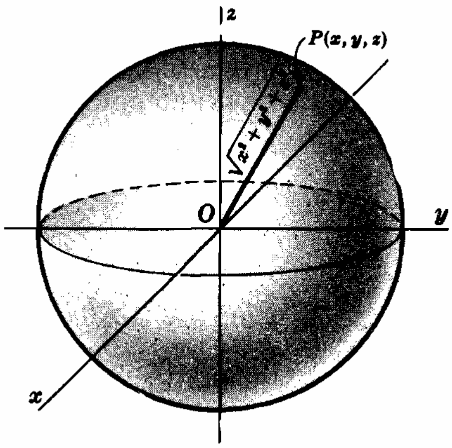

Fig. 68-7

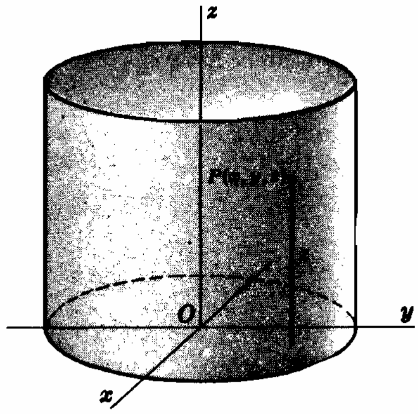

Fig. 68-8

8. Determinar el centro de masas de un cilindro circular recto de radio r y altura h sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia a la base (Fig. 68-6).

Tomando el cilindro como se indica en la figura, su ecuación es $\rho = r$, y el volumen a considerar corresponde a la porción de cilindro comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = h$. Evidentemente, el centro de masas está situado en el eje z.

$$m = \iiint_R \delta(z,\rho,\theta)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_0^h kz\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = 2kh^2\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= kh^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}k\pi h^2r^2,$$

$$M_{xy} = \iiint_R \delta(z,\rho,\theta)\,z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_0^h kz^2\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{4}{3}kh^3\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}kh^3r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}k\pi h^3r^2 \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{3}h$$

Las coordenadas del centro de masas son $(0, 0, \frac{2}{3}h)$.

Problemas propuestos

9. Hallar la masa de:

(*a*) una barra recta de longitud a, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia a uno de los extremos. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^2$.

(*b*) un plato en forma de triángulo rectángulo de catetos a y b, siendo la densidad en cada punto proporcional a la suma de sus distancias a los catetos. *Sol.* $\frac{1}{6}kab(a+b)$.

(*c*) un plato circular de radio a, siendo la densidad de cada punto proporcional a su distancia al centro. *Sol.* $\frac{2}{3}ka^3\pi$.

(*d*) un plato de forma elíptica de ecuación $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, siendo la densidad de cada punto proporcional a la suma de sus distancias a los ejes. *Sol.* $\frac{4}{3}kab(a+b)$.

(*e*) un cilindro circular de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto proporcional al cuadrado de su distancia al eje. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^4b\pi$.

(*f*) una esfera de radio a, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^4\pi$.

(*g*) un cono circular de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al eje. *Sol.* $\frac{1}{6}ka^3b\pi$.

(*h*) una superficie esférica, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo. *Sol.* $2ka^3\pi$.

10. Determinar el centro de masas de:

(*a*) un cuadrante de 9(*c*). *Sol.* $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$.

(*b*) un cuadrante de un plato circular de radio a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a uno de los radios límites (eje x). *Sol.* $(3a/8, 3a\pi/16)$.

(*c*) un cubo de arista a, siendo la densidad en cada punto igual a la suma de sus distancias a tres aristas adyacentes (ejes coordenados). *Sol.* $(5a/9, 5a/9, 5a/9)$.

(*d*) un octante de una esfera de radio a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a una de las caras planas. *Sol.* $(16a/15\pi, 16a/15\pi, 8a/15)$.

(*e*) un cono circular recto de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a la base. *Sol.* $(0, 0, 2b/5)$.

11. Hallar el momento de inercia de:

(*a*) un plato cuadrado de lado a, con respecto a un lado, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia a un extremo de dicho lado. *Sol.* $^7/_{15}\, a^2m$.

(*b*) un plato circular de radio a, con respecto a su centro, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia al centro. *Sol.* $\frac{2}{3}a^2m$.

(*c*) un cubo de arista a, con respecto a una arista, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia a un extremo de dicha arista. *Sol.* $^{38}/_{45}a^2m$.

(*d*) un cono circular recto de altura b y radio de la base a, con respecto a su eje, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia al eje. *Sol.* $^2/_5a^2m$.

(*e*) el cono de (*d*), siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a la base. *Sol.* $\frac{1}{5}a^2m$.

Capítulo 69

Ecuaciones diferenciales

UNA ECUACION DIFERENCIAL es aquella en cuyos términos figuran derivadas o diferenciales; por ejemplo, $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$, $\quad dy = (x + 2y)\,dx$, etc.

El *orden* de una ecuación diferencial es el correspondiente al de la derivada de mayor índice que figura en ella. La primera de las ecuaciones anteriores es de segundo orden y la segunda es de primer orden. Ambas son *lineales* o de primer grado.

Una *solución* de una ecuación diferencial es toda relación entre las variables en la que no figuran ni derivadas ni diferenciales y que satisface idénticamente a la ecuación. La *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es aquella solución que contiene el máximo número ($= n$) de constantes arbitrarias.

(Ver Problemas 1-3.)

ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN. Es de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Si una ecuación de este tipo se puede escribir en la forma particular $f_1(x) \cdot g_2(y)\,dx + f_2(x) \cdot g_1(y)\,dy = 0$, las variables son *separables* y la solución viene dada por

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C$$

(Ver Problemas 4-6.)

Una función $f(x, y)$ es ***homogénea de grado n***, si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. La ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es ***homogénea***, si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado.

La sustitución

$$y = vx, \qquad dy = v\,dx + x\,dv$$

transforma la ecuación homogénea en otra cuyas variables, x e y, son separables.

(Ver Problemas 7-9.)

ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES se pueden resolver, rápidamente, si se advierte en ellas la presencia de combinaciones de términos integrables.

Otras ecuaciones, cuya solución no es inmediata por el método anterior, se pueden resolver multiplicándolas por un factor adecuado, función de x e y, que recibe el nombre de *factor integrante* de la ecuación.

(Ver Problemas 10-14.)

La ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, siendo P y Q funciones de x solamente, tiene como factor integrante $\xi(x) = e^{\int P\,dx}$. (Ver Problemas 15-17.

Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, siendo $n \neq 0{,}1$ y P y Q funciones de x únicamente se reduce a otra lineal mediante la sustitución

$$y^{1-n} = z, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

(Ver Problemas 18-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que (*a*) $y = 2e^x$, (*b*) $y = 3x$ y (*c*) $y = C_1 e^x + C_2 x$, siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial $y''(1-x) + y'x - y = 0$.

(*a*) Derivando dos veces la función $y = 2e^x$ resulta, $y' = 2e^x$ e $y'' = 2e^x$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se obtiene la identidad $2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x = 0$.

(*b*) Derivando dos veces $y = 3x$ resulta, $y' = 3$ e $y'' = 0$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se llega a la identidad $0(1-x) + 3x - 3x = 0$.

(*c*) Derivando dos veces $y = C_1 e^x + C_2 x$ resulta, $y' = C_1 e^x + C_2$ e $y'' = C_1 e^x$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se llega a la identidad $C_1 e^x(1-x) + (C_1 e^x + C_2)x - (C_1 e^x + C_2 x) = 0$.

La solución (*c*) es la *solución general* de la ecuación diferencial, ya que contiene el número apropiado de constantes arbitrarias. Las soluciones (*a*) y (*b*) reciben el nombre de *soluciones particulares*, puesto que ambas se pueden obtener para determinados valores de las constantes arbitrarias de la solución general.

2. Hallar la ecuación diferencial cuya solución general es

$$(a)\quad y = Cx^2 - x \qquad \text{y} \qquad (b)\quad y = C_1x^3 + C_2x + C_3$$

(*a*) Dirivando $y = Cx^2 - x$ obtenemos $y' = 2Cx - 1$. Despejando, $C = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y'+1}{x}\right)$ y sustituyendo en la relación dada (solución general) resulta $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y'+1}{x}\right)x^2 - x$ o sea $y'x = 2y + x$.

(*b*) Derivando tres veces $y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$ resulta, $y' = 3C_1 x^2 + C_2$, $y'' = 6C_1 x$, $y''' = 6C_1$. Por tanto, $y'' = xy'''$ es la ecuación pedida.

Obsérvese que la relación dada es una solución de la ecuación $y^{\text{iv}} = 0$, pero no es su solución general, ya que solamente contiene tres constantes arbitrarias.

3. Hallar la ecuación diferencial de todas las parábolas cuyo eje principal es el eje Oz.

La ecuación de una familia de parábolas es $y^2 = Ax + B$, siendo A y B constantes arbitrarias.

Derivando dos veces, obtenemos $2yy' = A$ y $2yy'' + 2y'^2 = 0$.

Luego $2yy'' + 2y'^2 = 0$ es la ecuación pedida.

4. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$.

Operando, $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^3)dx = 0$ ó $\dfrac{y^2}{1+y^3}\,dy + \dfrac{1}{x(1+x^2)}\,dx = 0$ que es una ecuación de variables separadas. Luego

$$\frac{y^2\,dy}{1+y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c,$$

$$2\ln|1+y^3| + 6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) = 6c,$$

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6c \qquad \text{y} \qquad \frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C.$$

5. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Tendremos $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Luego arc tag y = arc tag x + arc tag C e

$$y = \operatorname{tag}(\text{arc tag}\,x + \text{arc tag}\,C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

6. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 x}$.

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \sec^2 y\, dy = \csc^2 x\, dx, \quad \text{y} \quad \operatorname{tag} y = -\cot x + C$$

7. Resolver $2xy\,dy = (x^2 - y^2)\,dx$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio $y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$ obtenemos $2x \cdot vx\,(v\,dx + x\,dv) = (x^2 - v^2x^2)\,dx$ o sea $\dfrac{2v\,dv}{1-3v^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Luego $-\frac{1}{3}\ln|1 - 3v^2| = \ln|x| + \ln c$, $\quad \ln|1 - 3v^2| + 3\ln|x| + \ln C' = 0 \quad$ ó $\quad C'\,|x^3(1 - 3v^2)| = 1$.

Ahora bien $\pm C'x^3(1 - 3v^2) = Cx^3(1 - 3v^2) = 1$ y, haciendo $v = y/x$, $C(x^3 - 3xy^2) = 1$.

8. Resolver $x \operatorname{sen}\dfrac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) + y\cos\dfrac{y}{x}(x\,dy - y\,dx) = 0$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio $y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$ obtenemos

$$x \operatorname{sen} v\,(vx\,dx + x^2\,dv + vx\,dx) + vx\cos v\,(x^2\,dv + vx\,dx - vx\,dx) = 0$$

$$\operatorname{sen} v\,(2v\,dx + x\,dv) + xv\cos v\,dv = 0, \qquad \frac{\operatorname{sen} v + v\cos v}{v \operatorname{sen} v}\,dv + 2\,\frac{dx}{x} = 0$$

Luego $\ln|v \operatorname{sen} v| + 2\ln|x| = \ln C'$, $\quad x^2 \cdot v \cdot \operatorname{sen} v = C$, $\quad$ y $\quad xy \operatorname{sen} y/x = C$.

9. Resolver $(x^2 - 2y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio de variable correspondiente, obtenemos

$$(1 - 2v^2)(v\,dx + x\,dv) + 2v\,dx = 0, \qquad \frac{1-2v^2}{v(3-2v^2)}\,dv + \frac{dx}{x} = 0, \qquad \frac{dv}{3v} - \frac{4v\,dv}{3(3-2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\tfrac{1}{3}\ln|v| + \tfrac{1}{3}\ln|3 - 2v^2| + \ln|x| = \ln c, \qquad \ln|v| + \ln|3-2v^2| + 3\ln|x| = \ln C'$$

Luego $vx^3(3 - 2v^2) = C$ y $y(3x^2 - 2y^2) = C$.

10. Resolver $(x^2 + y)\,dx + (y^3 + x)\,dy = 0$.

Integrando $x^2\,dx + (y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0$ término a término, obtenemos $\dfrac{x^3}{3} + xy + \dfrac{y^4}{4} = C$.

11. Resolver $(x + e^{-x}\operatorname{sen} y)\,dx - (y + e^{-x}\cos y)\,dy = 0$.

Integrando $x\,dx - y\,dy - (e^{-x}\cos y\,dy - e^{-x}\operatorname{sen} y\,dx) = 0$, término a término, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - e^{-x}\operatorname{sen} y = C$$

12. Resolver $x\,dy - y\,dx = 2x^3\,dx$.

La expresión $x\,dy - y\,dx$ nos lleva a $d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$. Luego, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 2x\,dx$ y $\dfrac{y}{x} = x^2 + C$ o $y = x^3 + Cx$.

13. Resolver $x\,dy + y\,dx = 2x^2y\,dx$.

La expresión $x\,dy + y\,dx$ nos lleva a $d(\ln xy) = \dfrac{x\,dy + y\,dx}{xy}$. Luego, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x, y) = \dfrac{1}{xy}$, $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{xy} = 2x\,dx$ y $\ln|xy| = x^2 + C$.

14. Resolver $x\,dy + (3y - e^x)\,dx = 0$.

Multiplicando la ecuación por $\xi(x) = x^2$ obtenemos $x^3\,dy + 3x^2y\,dx = x^2e^x\,dx$.

Luego, $x^3y = \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

15. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = 6x^3$.

Aquí $P(x) = \dfrac{2}{x}$, $\int P(x)\,dx = \ln x^2$, y $\xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2$.

Multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = x^2$ obtenemos $x^2\,dy + 2xy\,dx = 6x^5\,dx$. Luego, $x^2y = x^6 + C$.

Nota 1. Después de multiplicar por el factor integrante, los términos del primer miembro de la ecuación que resulta forman una *combinación integrable*.

Nota 2. El factor integrante de una ecuación dada no es único. En este problema, x^2, $3x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, etc., son todos ellos factores integrantes. Es decir, hemos utilizado la integral particular más sencilla de $P(x)\,dx$ en lugar de la integral general $\ln x^2 + \ln C = Cx^2$.

16. Resolver $\operatorname{tag} x\,\dfrac{dy}{dx} + y = \sec x$.

Tendremos $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \csc x$, $\int P(x)\,dx = \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|$ y $\xi(x) = e^{\ln|\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$.

Luego $\operatorname{sen} x\left(\dfrac{dy}{dx} + y\cot x\right) = \operatorname{sen} x \csc x$, $\operatorname{sen} x\,dy + y\cos x\,dx = dx$, y $y\operatorname{sen} x = x + C$.

17. Resolver $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$.

Aquí $P(x) = -x$, $\int P(x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2$, y $\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Luego, $e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dy - xye^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$, $ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$, e $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

18. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2$.

La ecuación es de la forma $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ con $n = 2$.

Haciendo el cambio $y^{1-n} = y^{-1} = z$, $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx}$. (Es conveniente escribir la ecuación en la forma $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1} = x$.) Luego, $-\dfrac{dz}{dx} + z = x$ o $\dfrac{dz}{dx} - z = -x$.

El factor integrante es $\xi(x) = e^{\int P dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$. Por tanto, $e^{-x}dz - ze^{-x}dx = -xe^{-x}dx$ y $ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C$. Finalmente, como $z = y^{-1}$, $\dfrac{1}{y} = x + 1 + Ce^x$.

19. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y\operatorname{tag} x = y^3\sec x$.

Ponemos la ecuación en la forma $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} + y^{-2}\operatorname{tag} x = \sec x$.

Haciendo el cambio $y^{-2} = z$, $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}$ obtenemos $\dfrac{dz}{dx} - 2z\operatorname{tag} x = -2\sec x$.

El factor integrante es $\xi(x) = e^{-2\int \operatorname{tag} x\,dx} = \cos^2 x$. Luego, $\cos^2 x\,dz - 2z\cos x\operatorname{sen} x\,dx = -2\cos x\,dx$, $z\cos^2 x = -2\operatorname{sen} x + C$, y $\dfrac{\cos^2 x}{y^2} = -2\operatorname{sen} x + C$.

20. Se dispara una bala contra una masa de arena. Suponiendo que la resistencia sea igual a la raíz cuadrada de la velocidad de la bala, calcular el tiempo que tardará en detenerse totalmente si su velocidad, al penetrar en la arena, es de 49 metros por segundo.

Sea v la velocidad de la bala t segundos después de haberse introducido en la arena.

La retardación será $= -\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{v}$ o $\dfrac{dv}{\sqrt{v}} = -dt$ y $2\sqrt{v} = -t + C$.

Para $t = 0$, $v = 49$ y $c = 2\sqrt{49} = 14$. Por tanto, $2\sqrt{v} = -t + 14$ es la ecuación del movimiento de la bala. Para $v = 0$, $t = 14$; es decir, la bala se detiene a los 14 segundos de incidir en la arena.

21. Un depósito contiene 500 litros de salmuera siendo la cantidad de sal en solución igual a 100 kilogramos. Se introduce en el depósito una corriente de agua que contiene 100 gramos de sal por litro a una velocidad de 15 litros por minuto. La mezcla se mantiene uniforme mediante una agitación adecuada y se la extrae del depósito a la misma velocidad anterior. Hallar la cantidad de sal que contendrá el depósito al cabo de 90 minutos

Sea q (kilogramos) la sal que hay en el depósito al cabo de t minutos, y $\frac{dq}{dt}$ la velocidad de variación de dicha cantidad con el tiempo t.

En cada minuto llegan al depósito 1,5 kg de sal, y salen de él $0{,}03q$ kg. Por tanto, $\frac{dq}{dt} = 1{,}5 - 0{,}03q$, $\frac{dq}{1{,}5 - 0{,}03q} = dt$, $\frac{\ln(0{,}03q - 1{,}5)}{0{,}03} = -t + C$.

Para $t = 0$, $q = 100$ y $C = \frac{\ln 1{,}5}{0{,}03}$; por consiguiente, $\ln(0{,}03q - 1{,}5) = -0{,}03t + \ln 1{,}5$, $0{,}02q - 1 = e^{-0{,}03t}$ y $q = 50 + 50e^{-0{,}03t}$. Para $t = 90$, $q = 50 + 50e^{-2{,}7} = 53{,}35$ kg.

22. Bajo ciertas condiciones, el azúcar en agua se transforma en dextrosa a una velocidad proporcional, en cada instante, a la cantidad de azúcar sin transformar. Sabiendo que para $t = 0$ la cantidad de azúcar es de 75 gramos, y que al cabo de 30 minutos se han transformado 8 gramos, hallar la cantidad transformada al cabo de una hora y media.

Sea q la cantidad transformada en t minutos.

Tendremos $\frac{dq}{dt} = k(75 - q)$, $\frac{dq}{75 - q} = k\,dt$, y $\ln(75 - q) = -kt + C$.

Para $t = 0$, $q = 0$ y $C = \ln 75$; por tanto, $\ln(75 - q) = -kt + \ln 75$.

Para $t = 30$, $q = 8$, $30k = \ln 75 - \ln 67$, y $k = 0{,}0038$. Es decir, $q = 75(1 - e^{-0{,}0038t})$.

Para $t = 90$, $q = 75(1 - e^{-0{,}34}) = 21{,}6$ gramos.

Problemas propuestos

23. Hallar la ecuación diferencial cuya solución general es:

(a) $y = Cx^2 + 1$ (c) $y = Cx^2 + C^2$ (e) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$ (g) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

(b) $y = C^2x + C$ (d) $xy = x^3 - C$ (f) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ (h) $y = C_1e^x \cos(3x + C_2)$

Sol. (a) $xy' = 2(y - 1)$ (c) $4x^2y = 2x^3y' + (y')^2$ (e) $y''' = 0$ (g) $y'' + y = 0$

(b) $y' = (y - xy')^2$ (d) $xy' + y = 3x^2$ (f) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (h) $y'' - 2y' + 10y = 0$

24. Resolver:

(a) $y\,dy - 4x\,dx = 0$ *Sol.* $y^2 = 4x^2 + C$

(b) $y^2\,dy - 3x^5\,dx = 0$ *Sol.* $2y^3 = 3x^6 + C$

(c) $x^3y' = y^2(x - 4)$ *Sol.* $x^2 - xy + 2y = Cx^2y$

(d) $(x - 2y)\,dy + (y + 4x)\,dx = 0$ *Sol.* $xy - y^2 + 2x^2 = C$

(e) $(2y^2 + 1)y' = 3x^2y$ *Sol.* $y^2 + \ln|y| = x^3 + C$

(f) $xy'(2y - 1) = y(1 - x)$ *Sol.* $\ln|xy| = x + 2y + C$

(g) $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$ *Sol.* $x^2 - y^2 = Cx$

(h) $(x + y)\,dy = (x - y)\,dx$ *Sol.* $x^2 - 2xy - y^2 = C$

(i) $x(x + y)\,dy - y^2\,dx = 0$ *Sol.* $y = Ce^{-y/x}$

(j) $x\,dy - y\,dx + xe^{-y/x}\,dx = 0$ *Sol.* $e^{y/x} + \ln|Cx| = 0$

(k) $dy = (3y + e^{2x})\,dx$ *Sol.* $y = (Ce^x - 1)e^{2x}$

(l) $x^2y^2\,dy = (1 - xy^3)\,dx$ *Sol.* $2x^3y^3 = 3x^2 + C$

25. La tangente y la normal a una curva en un punto $P(x, y)$, cortan al eje x en T y N, y al eje y en S y M, respectivamente. Hallar la familia de curvas que satisfacen la condición:

(a) $TP = PS$ (b) $NM = MP$ (c) $TP = OP$ (d) $NP = OP$.

Sol. (a) $xy = C$ (b) $2x^2 + y^2 = C$ (c) $xy = C$, $y = Cx$ (d) $x^2 \pm y^2 = C$

26. Resolver el Problema 21 suponiendo que al depósito llega agua pura a razón de 15 litros por minuto y que la mezcla sale a la misma velocidad. *Sol.* 6,7 kg.

27. Resolver el Problema 26 suponiendo que la mezcla sale a razón de 20 litros por minuto.

Ind. $dq = -\frac{4q}{100 - t}dt$ *Sol.* 0,01 kp

Capítulo 70

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

LOS TIPOS DE ECUACIONES diferenciales de segundo orden que vamos a considerar son:

(*1*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ (Ver Problema 1.)

(*2*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$ (Ver Problemas 2-3.)

(*3*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ (Ver Problemas 4-5.)

(*4*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R$, siendo P y Q constantes y R una constante o una función de x solamente. (Ver Problemas 6-11.)

Si la ecuación característica $m^2 + Pm + Q = 0$ tiene dos raíces *distintas*, m_1 y m_2, la solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = 0$ es $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$. Si las dos raíces son iguales, $m_1 = m_2 = m$, la solución general es $C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$.

La solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = 0$ (ecuación homogénea) recibe el nombre de *función complementaria* de la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R(x)$. Si $f(x)$ satisface a esta última ecuación (solución particular), la solución general es $y =$ función complementaria $+ f(x)$.

Problemas resueltos

1. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x$.

Tenemos $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x$, $\dfrac{dy}{dx} = \int (xe^x + \cos x)\, dx = xe^x - e^x + \operatorname{sen} x + C_1$, e $y = xe^x\ 2e^x -$

$- \cos x + C_1x + C_2$

2. Resolver $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = a$.

Hacemos $p = \dfrac{dy}{dx}$; entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ y la ecuación dada toma la forma $x^2\dfrac{dp}{dx} + xp = a$ o $x\,dp + p\,dx = \dfrac{a}{x}dx$.

Luego, $xp = a \ln|x| + C_1$, $x\dfrac{dy}{dx} = a\ln|x| + C_1$, $dy = a\ln|x|\dfrac{dx}{x} + C_1\dfrac{dx}{x}$ e $y = \frac{1}{2}a\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2$.

3. Resolver $xy'' + y' + x = 0$.

Hacemos $p = \dfrac{dy}{dx}$. Con lo cual $\dfrac{d^2y}{dp^2} = \dfrac{dp}{dx}$ y la ecuación dada toma la forma

$$x\frac{dp}{dv} + p + x = 0 \text{ o } x\,dp + p\,dx = -x\,dx$$

Luego, $xp = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{C_1}{x}$ e $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1\ln|x| + C_2$.

4. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0.$

Como $\dfrac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$, multiplicando la ecuación dada por $2y'$ obtenemos

$$2y'y'' = 4yy', \qquad y'^2 = 4\int yy'\,dx = 4\int y\,dy = 2y^2 + C_1$$

Luego, $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}, \qquad \dfrac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx, \qquad \ln|\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}\,x + \ln C_2'$

y

$$\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}\,x}$$

5. Resolver $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$

Multiplicando por $2y'$ obtenemos $2y'y'' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. Luego,

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + C_1 y^2}}{y}, \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx, \qquad \sqrt{1 + C_1 y^2} = C_1 x + C_2$$

y

$$(C_1 x + C_2)^2 - C_1 y^2 = 1$$

6. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

Tendremos $m^2 + 3m - 4 = 0$ y $m = 1, -4$. La solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

7. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Tenemos $m^2 + 3m = 0$ y $m = 0, -3$. La solución general es $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

8. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0.$

Aquí $m^2 - 4m + 13 = 0$ y las raíces son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$. La solución general es

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x} = e^{2x}(C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

Como $e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$, tendremos $e^{3ix} = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$, $e^{-3ix} = \cos 3x - i \operatorname{sen} 3x$, y la solución se puede dar en la forma

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}\{C_1(\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x) + C_2(\cos 3x - i \operatorname{sen} 3x)\} \\ &= e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} 3x\} \\ &= e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x) \end{aligned}$$

9. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

Tenemos $m^2 - 4m + 4 = 0$ y $m = 2, 2$. La solución general es $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

10. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

Según el Problema 6, la función complementaria es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación obsérvese que el segundo miembro es $R(x) = x^2$. Esto nos sugiere que la integral particular ha de contener un término en x^2, y, quizá, otros términos obtenidos por derivación sucesiva. Suponiendo que es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, en donde A, B y C son constantes a determinar.

Sustituyendo $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, en la ecuación diferencial obtenemos

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \qquad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

Como esto es una identidad en x, $-4A = 1$, $6A - 4B = 0$, $2A + 3B - 4C = 0$.

Luego $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = -\frac{13}{32}$, e $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$ es una integral particular.

Por tanto, la solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$.

11. Hallar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x$.

En este caso, la ecuación característica es $m^2 - 2m - 3 = 0$ y sus soluciones, $m = -1, 3$; la función complementaria es $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. El segundo miembro de la ecuación diferencial nos hace pensar que una integral particular sea de la forma $A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$.

Sustituyendo $y = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$, $y' = B\cos x - A\,\mathrm{sen}\,x$, $y'' = -A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x$, en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x) - 2(B\cos x - A\,\mathrm{sen}\,x) - 3(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x) = \cos x$$
$$-2(2A + B)\cos x + 2(A - 2B)\,\mathrm{sen}\,x = \cos x$$

Luego $-2(2A + B) = 1$, $A - 2B = 0$, y $A = -\frac{1}{5}$, $B = -{}^1/_{10}$.

La solución general es $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x - {}^1/_{10}\,\mathrm{sen}\,x = y$.

12. La ecuación del movimiento de vibración de un cuerpo unido a un resorte es $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$, siendo la elongación del muelle en el instante t. Si para $t = 0$, $s = 2$ y $\frac{ds}{dt} = 1$, hallar s en función de t.

Tenemos $m^2 + 16 = 0$, $m = \pm 4i$, y la solución general es $s = A\cos 4t + B\,\mathrm{sen}\,4t$.

Para $t = 0$, $s = 2 = A$, por tanto $s = 2\cos 4t + B\,\mathrm{sen}\,4t$.

Para $t = 0$, $ds/dt = 1 = -8\,\mathrm{sen}\,4t + 4B\cos 4t = 4B$ y $B = \frac{1}{4}$.

Luego, la ecuación es $s = 2\cos 4t + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4t$.

13. La intensidad de corriente en cierto circuito eléctrico viene dada por $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2504I = 110$. Si para $t = 0$, es $I = 0$ y $\frac{dI}{dt} = 0$, hallar I en función de t.

$m^2 + 4m + 2504 = 0$; $m = -2 + 50i$, $-2 - 50i$; la función complementaria es $e^{-2t}(A\cos 50t + B\,\mathrm{sen}\,50t)$.

La integral particular es $I = 110/2504 = 0{,}044$.

Por tanto, la solución general es $I = e^{-2t}(A\cos 50t + B\,\mathrm{sen}\,50t) + 0{,}044$.

Para $t = 0$, $I = 0 = A + 0{,}044$; luego $A = -0{,}044$.

Para $t = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B)\cos 50t - (2B + 50A)\,\mathrm{sen}\,50t] = -2A + 50B$.

De donde $B = -0{,}0018$ y la relación pedida es $I = -e^{-2t}(0{,}044\cos 50t + 0{,}0018\,\mathrm{sen}\,50t) + 0{,}044$.

14. Una cadena de 4 metros de longitud comienza a deslizar por una superficie, sin rozamiento, en el momento en que pende verticalmente un tramo de 1 metro de longitud. Hallar (*a*) su velocidad cuando abandona la superficie el último trozo de cadena y (*b*) el tiempo que tarda en abandonar la superficie.

Sea s la longitud de cadena que cuelga en el instante t.

(*a*) La fuerza F que obliga a deslizar a la cadena es el peso de la parte que cuelga.

Fuerza = masa × aceleración = $ms'' = \frac{1}{4}mgs$ o $s'' = \frac{1}{4}gs$.

$2s's'' = \frac{1}{2}gss'$ y $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + C_1$.

Para $t = 0$, $s = 1$ y $s' = 0$. Luego $C_1 = -\frac{1}{4}g$ y $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot\sqrt{s^2 - 1}$.

Para $s = 4$, $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$ m/seg.

(*b*) $\frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,dt$ y $\ln|s + \sqrt{s^2 - 1}| = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,t + C_2$.

Para $t = 0$, $s = 1$. Luego $C_2 = 0$ y $\ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,t$.

Para $s = 4$, $t = \frac{2}{\sqrt{g}}\ln(4 + \sqrt{15})$ sec.

15. Una motora de 245 kilogramos de masa lleva una velocidad de 20 metros por segundo cuando se desconecta el motor (en el instante $t = 0$). La resistencia del agua es proporcional a su velocidad y vale 100 kilopondios en $t = 0$. Hallar el espacio recorrido hasta que la velocidad sea de 5 metros por segundo.

Sea s el espacio recorrido por la motora al cabo de t segundos.

$$ms'' = -Ks' \quad \text{o} \quad s'' = -ks'$$

Para determinar k: Para $t = 0$, $s' = 20$, $s'' = \dfrac{\text{fuerza}}{\text{masa}} = -\dfrac{100g}{245} = -4$ y $k = \dfrac{1}{5}$.

$s'' = \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v}{5}$, $\ln v = -\dfrac{1}{5}t + C_1$, y $v = C_1 e^{-t/5}$.

Para $t = 0$, $v = 20$. Luego $C_1 = 20$, $v = \dfrac{ds}{dt} = 20e^{-t/5}$ y $s = -100e^{-t/5} + C_2$.

Para $t = 0$, $s = 0$. Luego $C_2 = 100$ y $s = 100(1 - e^{-t/5})$.

Para $v = 5 = 20e^{-t/5}$, $s = 100(1 - \frac{1}{4}) = 75$ m.

Problemas propuestos

Resolver:

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$ *Sol.* $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2$

17. $e^{2x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$ *Sol.* $y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -9 \operatorname{sen} 3x$ *Sol.* $y = \operatorname{sen} 3x + C_1x + C_2$

19. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$ *Sol.* $y = x^2 + C_1x^4 + C_2$

20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 2x - x^2$ *Sol.* $y = x^3/3 + C_1e^x + C_2$

21. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 8x^3$ *Sol.* $y = x^4 + C_1x^2 + C_2$

22. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ *Sol.* $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ *Sol.* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$

24. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$ *Sol.* $y = C_1 + C_2e^x$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ *Sol.* $y = C_1xe^x + C_2e^x$

26. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ *Sol.* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x$

27. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Sol.* $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$

28. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Sol.* $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

29. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$ *Sol.* $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 2x + 5$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{3x}$ *Sol.* $y = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x + e^{3x}/13$

31. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$ *Sol.* $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + e^{2x} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{2}{27}$

32. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x$ *Sol.* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\operatorname{sen} 2x$

33. Una partícula de masa m, en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad, está sometida a una fuerza atractiva proporcional al desplazamiento. Hallar la ecuación del movimiento si para $t = 0$, $s = 0$ y $s' = v_0$.

Ind. Aquí $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k_1\dfrac{ds}{dt} - k_2 s$ o sea $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2b\dfrac{ds}{dt} + c^2 s = 0$, $b > 0$.

Sol. Si $b^2 = c^2$, $s = v_0 t e^{-bt}$.

Si $b^2 < c^2$, $s = \dfrac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}} e^{-bt} \operatorname{sen} \sqrt{c^2 - b^2}\, t$.

Si $b^2 > c^2$, $s = \dfrac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}}\left(e^{(-b+\sqrt{b^2-c^2})t} - e^{(-b-\sqrt{b^2-c^2})t}\right)$.