G. Baranenkov, B. Demidovich, V. Efimenko, S. Kogan, G. Lunts, E. Porshneva, E. Sichova, S. Frolov, R. Shostak y A. Yanpolski

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANALISIS MATEMATICO

Revisado por el profesor
B. Demidovich

Segunda edición

Selección de ejercicios (Incluye respuestas) Análisis Matemático II

EDITORIAL MIR • Moscú
1967

Capítulo VI. **Funciones de varias variables**

§ 1. Conceptos fundamentales 191
§ 2. Continuidad 196
§ 3. Derivadas parciales 197
§ 4. Diferencial total de una función 199
§ 5. Derivación de funciones compuestas 202
§ 6. Derivada en una dirección dada y gradiente de una función 206
§ 7. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores 210
§ 8. Integración de diferenciales exactas 215
§ 9. Derivación de funciones implícitas 218

§ 11. Plano tangente y normal a una superficie 230

§ 13. Extremo de una función de varias variables 236
§ 14. Problemas de determinación de los máximos y mínimos absolutos de las funciones 241

§ 17. Longitud de un arco de curva en el espacio 249
§ 18. Función vectorial de un argumento escalar 249

Capítulo VII. **Integrales múltiples y curvilíneas**

§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares 261
§ 2. Cambio de variables en la integral doble 268
§ 3. Cálculo de áreas de figuras planas 272
§ 4. Cálculo de volúmenes 273
§ 5. Cálculo de áreas de superficies 275
§ 6. Aplicaciones de la integral doble a la mecánica 276
§ 7. Integrales triples 278

§ 9. Integrales curvilíneas 290
§ 10. Integrales de superficie 302
§ 11. Fórmula de Ostrogradski — Gauss 305

Capítulo IX. **Ecuaciones diferenciales**

§ 1. Verificación de las soluciones. Formación de las ecuaciones diferenciales de familias de curvas. Condiciones iniciales 344
§ 2. Ecuaciones diferenciales de 1er orden 346
§ 3. Ecuaciones diferenciales de 1er orden con variables separables. 349
§ 4. Ecuaciones diferenciales homogéneas de 1er orden 353
§ 5. Ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden. 355
§ 6. Ecuaciones de diferenciales exactas. 358

§ 9. Ecuaciones diferenciales diversas de 1er orden 364
§ 10. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores 369
§ 11. Ecuaciones diferenciales lineales 373

§ 12. Ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden con coeficientes constantes 375

Soluciones

Capítulo VI 464
Capítulo VII 475

Capítulo IX 494

Capítulo VI

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Conceptos fundamentales

1°. Concepto de función de varias variables. Designaciones de las funciones. Una magnitud variable z se denomina *función* uniforme de dos variables x e y, si a cada conjunto de valores de éstas (x, y) del campo dado, corresponde un valor único y determinado de z. Las variables x e y se llaman *argumentos* o *variables independientes*. La dependencia funcional se representa así:

$$z=f(x, y); \quad z=F(x, y); \quad \text{etc.}$$

Las funciones de tres o más argumentos se definen de manera análoga.

Ejemplo 1. Expresar el volumen V del cono en función de su generatriz x y del radio de la base y.

Solución. Sabemos por la geometría, que el volumen del cono es igual a

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

donde h es la altura del cono. Pero $h=\sqrt{x^2-y^2}$. Por consiguiente,

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}.$$

Esta es, precisamente, la dependencia funcional que se buscaba.

El valor de la función $z=f(x, y)$ en el punto $P(a, b)$, es decir, cuando $x=a$ e $x=b$, se designa por $f(a, b)$ o $f(P)$. La representación geométrica de la función $z=f(x, y)$ en un sistema de coordenadas cartesianas X, Y, Z es, en términos generales, una superficie (fig. 63).

Ejemplo 2. Hallar $f(2, -3)$ y $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, si

$$f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Solución. Poniendo $x=2$ e $y=-3$, hallamos:

$$f(2, -3)=\frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)}=-\frac{13}{12}.$$

Poniendo $x=1$ y sustituyendo y por $\frac{y}{x}$ tenemos:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot 1\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x^2+y^2}{2xy},$$

es decir, $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=f(x, y)$.

2. Campo de existencia de la función. Por *campo de existencia (de definición)* de la función $z=f(x, y)$, se entiende el conjunto de puntos (x, y) del plano XOY que determinan la función dada (es decir,

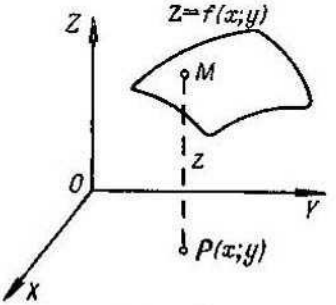

Fig. 63

para los que la función toma valores reales determinados). En los casos más elementales, el campo de existencia de la función representa una parte finita, o infinita, del plano coordenado XOY, limitada por una o varias curvas (*frontera del campo*).

De forma análoga, para las funciones de tres variables $u=f(x, y, z)$, el campo de existencia de la función es un cuerpo determinado del espacio $OXYZ$.

Ejemplo 3. Hallar el campo de existencia de la función

$$z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Solución. Esta función tiene valores reales cuando

$$4-x^2-y^2>0 \text{ ó bien } x^2+y^2<4.$$

A esta última desigualdad satisfacen las coordenadas de los puntos situados dentro de un círculo de radio 2 con el centro en el origen de coordenadas. El campo de existencia de esta función es pues el interior de este círculo (fig. 64).

Ejemplo 4. Hallar el campo de existencia de la función

$$z=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+\sqrt{xy}.$$

Solución. El primer sumando de la función queda determinado para $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ ó bien $-2 \leqslant x \leqslant 2$. El segundo sumando tiene valores reales cuando $xy \geqslant 0$, es decir, en dos casos:

$$\text{si } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \text{ o si } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$$

El campo de existencia de toda la función se representa en la fig. 65 y comprende la frontera del campo.

3. Líneas y superficies de nivel de las funciones. Se da el nombre de *línea de nivel* de una función $z=f(x, y)$, a la línea

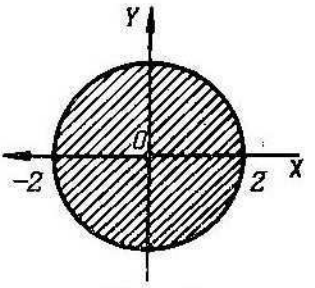

Fig. 64

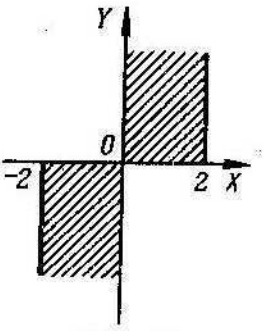

Fig. 65

$f(x, y)=C$ del plano XOY, para cuyos puntos la función toma un mismo valor $z=C$ (que generalmente se señala como anotación en el dibujo).

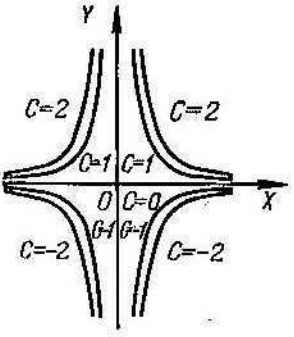

Fig. 66

Se llama *superficie de nivel* de una función de tres argumentos $u=f(x, y, z)$ aquella superficie $f(x, y, z)=C$ en cuyos puntos la función toma un valor constante $u=C$.

Ejemplo 5. Construir la línea de nivel de la función $z=x^2y$.

Solución. La ecuación de la línea de nivel tiene la forma $x^2y=C$ o bien $y=\frac{C}{x^2}$. Haciendo $C=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, obtenemos la familia de líneas de nivel (fig. 66).

1782. Expresar el volumen V de una pirámide cuadrangular regular en función de su altura x y de su arista lateral y.

1783. Expresar el área S de la superficie lateral de un tronco de pirámide exagonal regular, en función de los lados x e y de las bases y de la altura z.

1784. Hallar $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y $f(1, -1)$, si

$$f(x, y) = xy + \frac{x}{y}.$$

1785. Hallar $f(x, y)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x, y)}$, si

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}.$$

1786. Hallar los valores que toma la función

$$f(x, y) = 1 + x - y$$

en los puntos de la parábola $y = x^2$, y construir la gráfica de la función

$$F(x) = f(x, x^2).$$

1787. Hallar el valor de la función

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

1788*. Determinar $f(x)$, si

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad (xy > 0).$$

1789*. Hallar $f(x, y)$, si

$$f(x + y, x - y) = xy + y^2.$$

1790*. Sea $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$. Determinar las funciones f y z, si $z = x$ para $y = 1$.

1791**. Sea $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. Determinar las funciones f y z, si $z = \sqrt{1 + y^2}$ para $x = 1$.

1792. Hallar y representar los campos de existencia de las siguientes funciones:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

b) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

c) $z = \ln(x + y)$;

d) $z = x + \arccos y$;

e) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$;

f) $z = \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{x}$;

g) $z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$;

h) $z = \sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$ $(a>0)$;

i) $z = \sqrt{y \operatorname{sen} x}$;

j) $z = \ln(x^2+y)$;

k) $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-y}{1+x^2y^2}$;

l) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$;

m) $z = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

n) $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$;

o) $z = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$.

1793. Hallar los campos de existencia de las siguientes funciones de res argumentos:

a) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$;

b) $u = \ln(xyz)$;

c) $y = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} y + \operatorname{arc\,sen} z$;

d) $y = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

1794. Construir las líneas de nivel de las funciones que se dan a continuación y averiguar el carácter de las superficies representadas por dichas funciones:

a) $z = x + y$;

b) $z = x^2 + y^2$;

c) $z = x^2 - y^2$;

d) $z = \sqrt{xy}$;

e) $z = (1 + x + y)^2$;

f) $z = 1 - |x| - |y|$;

g) $z = \frac{y}{x^2}$;

h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$;

i) $z = \frac{2x}{x^2+y^2}$.

1795. Hallar las líneas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = \ln(x^2+y)$;

b) $z = \operatorname{arc\,sen} xy$;

c) $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$;

d) $z = f(y-ax)$;

e) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

1796. Hallar las superficies de nivel de las siguientes funciones de tres variables:

a) $u = x + y + z$,

b) $u = x^2 + y^2 + z^2$,

c) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Continuidad

1. Límite de una función. El número A recibe el nombre de *límite de la función* $z=f(x, y)$ cuando el punto $P'(x, y)$ tiende al punto $P(a, b)$, si para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal, que cuando $0<\rho<\delta$, (donde $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ es la distancia entre los puntos P y P'), se verifica la desigualdad

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

En este caso se escribe:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=A.$$

2. Continuidad y puntos de discontinuidad. La función $z=f(x, y)$ recibe el nombre de *continua en el punto* $P(a, b)$, si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=f(a, b).$$

La función que es continua en todos los puntos de un campo determinado, se llama *continua en este campo.*

Las condiciones de continuidad de una función $f(x, y)$ pueden no cumplirse en puntos aislados (*puntos aislados de discontinuidad*), o en puntos que formen una o varias líneas (*líneas de discontinuidad*) y, a veces, figuras geométricas más complicadas.

Ejemplo 1. Hallar los puntos de discontinuidad de la función

$$z=\frac{xy+1}{x^2-y}.$$

Solución. La función pierde su sentido, si el denominador se anula. Pero, $x^2-y=0$ o sea, $y=x^2$ es la ecuación de una parábola. Por consiguiente, la función dada tiene una línea de discontinuidad: la parábola $y=x^2$.

1797*. Hallar los siguientes límites de las funciones:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{xy}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to h}} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1798. Averiguar si es continua la función

$$f(x, y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{si } x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{si } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

1799. Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

b) $z=\frac{1}{(x-y)^2}$;

c) $z=\frac{1}{1-x^2-y^2}$;

d) $z=\cos\frac{1}{xy}$.

1800*. Demostrar, que la función

$$z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=y=0.\end{cases}$$

es continua con relación a cada una de las variables x e y por separado, pero no es continua en el punto (0, 0) respecto al conjunto de estas variables.

§ 3. Derivadas parciales

1. Definición de las derivadas parciales. Si $z=f(x, y)$, si hacemos, por ej., que y sea constante, obtenemos la derivada

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y),$$

que recibe el nombre de *derivada parcial* de la función z con respecto a la variable x. De modo análogo se define y se designa la derivada parcial de la función z con respecto a la variable y. Es evidente, que para hallar las derivadas parciales pueden utilizarse las fórmulas ordinarias de derivación.

Ejemplo 1. Hallar las derivadas parciales de la función

$$z=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

Solución. Considerando y como magnitud constante, tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}.$$

Análogamente, considerando x como constante, tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}.$$

Ejemplo 2. Hallar las derivadas parciales de la función de tres argumentos

$$u=x^3y^2z+2x-3y+z+5.$$

Solución.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1.$$

2. Teorema de Euler. La función $f(x, y)$ se llama función *homogénea* de grado n, si para cualquier factor real k se verifica la igualdad

$$f(kx, ky) \equiv k^n f(x, y).$$

Una función racional entera será homogénea, si todos los términos de la misma son del mismo grado.

Para toda función homogénea diferenciable de grado n, se verifica siempre la igualdad (*teorema de Euler*):

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

Hallar las derivadas parciales de las funciones:

1801. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

1802. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

1803. $z = \frac{y}{x}$.

1804. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1805. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1806. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

1807. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

1808. $z = x^y$.

1809. $z = e^{\operatorname{sen} \frac{y}{x}}$.

1810. $z = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

1811. $z = \ln \operatorname{sen} \frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

1812. $u = (xy^z)$.

1813. $u = z^{xy}$.

1814. Hallar $f'_x(2; 1)$ y $f'_y(2; 1)$, si $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

1815. Hallar $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$ y $f'_z(1; 2; 0)$, si $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$.

Comprobar el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas (Nos, Nos 1816—1819):

1816. $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

1817. $z = \frac{x}{x^2+y^2}$.

1818. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

1819. $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$.

1820. Hallar $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1821. Calcular $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, si $x = r\cos\varphi$ e $y = r\operatorname{sen}\varphi$.

1822. Demostrar, que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$, si

$$z=\ln(x^2+xy+y^2).$$

1823. Demostrar, que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, si

$$z=xy+xe^{\frac{y}{x}}.$$

1824. Demostrar, que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, si

$$u=(x-y)(y-z)(z-x).$$

1825. Demostrar, que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$, si

$$u=x+\frac{x-y}{y-z}.$$

1826. Hallar $z=z(x, y)$, si

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

1827. Hallar $z=z(x, y)$, sabiendo, que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+y^2}{x} \text{ y } z(x, y)=\operatorname{sen} y \text{ cuando } x=1.$$

1828. Por el punto $M(1; 2; 6)$ de la superficie $z=2x^2+y^2$ se han hecho pasar planos paralelos a los coordenados XOZ e YOZ. Determinar, qué ángulos forman con los ejes de coordenadas las tangentes a las secciones así obtenidas, en su punto común M.

1829. El área de un trapecio de bases a, b y de altura h es igual a $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. Hallar $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ y, mediante su dibujo, esclarecer su sentido geométrico.

1830*. Demostrar, que la función

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{si } x=y=0,\end{cases}$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en el punto (0, 0), a pesar de ser discontinua en este punto. Representar geométricamente esta función en las proximidades del punto (0; 0).

§ 4. Diferencial total de una función

1. Incremento total de una función. Se llama *incremento total* de una función $z=f(x, y)$ a la diferencia

$$\Delta z=\Delta f(x, y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

2. Diferencial total de una función. Recibe el nombre de *diferencial total* de una función $z=f(x, y)$ la parte principal del incremento total Δz, lineal respecto a los incrementos de los argumentos Δx y Δy.

La diferencia entre el incremento total y la diferencial total de la función es un infinitésimo de orden superior a $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

La función tiene, indubitablemente, diferencial total, cuando sus diferenciales parciales son continuas. Si la función tiene diferencial total, se llama *diferenciable*. Las diferenciales de las variables independientes, por definición, coinciden con sus incrementos, es decir, $dx=\Delta x$ y $dy=\Delta y$. La diferencial total de la función $z=f(x, y)$ se calcula por la fórmula

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Análogamente, la diferencial total de una función de tres argumentos $u=f(x, y, z)$ se calcula por la fórmula

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy+\frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Ejemplo 1. Para la función

$$f(x, y)=x^2+xy-y^2$$

hallar el incremento total y la diferencial total.

Solución.

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\,(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2;$$

$$\Delta f(x, y)=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\,(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2]-(x^2+xy-y^2)=$$

$$=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y-2y\cdot\Delta y-\Delta y^2=$$

$$=[(2x+y)\,\Delta x+(x-2y)\,\Delta y]+(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2).$$

Aquí, la expresión $df=(2x+y)\,\Delta x+(x-2y)\,\Delta y$ es la diferencial total de la función, mientras que $(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2)$ es un infinitésimo de orden superior al del infinitésimo $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Ejemplo 2. Hallar la diferencial total de la función

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Aplicación de la diferencial de la función a los cálculos aproximados. Cuando $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$ son suficientemente pequeños, y por consiguiente, es suficientemente pequeño también $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, para la función diferenciable $z=f(x, y)$ se verifica la igualdad aproximada $\Delta z\approx dz$, o sea,

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y.$$

Ejemplo 3. La altura de un cono es $H=30$ cm, el radio de su base $R=10$ cm. ¿Cómo variará el volumen de dicho cono si H se aumenta 3 mm y R se disminuye 1 mm?

Solución. El volumen del cono es $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. La variación del volumen la sustituimos aproximadamente por la diferencial $\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi(2RH\,dR+R^2\,dH)=\frac{1}{3}\pi(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}3)=-10\pi\approx -31{,}4\ \text{cm}^3$.

Ejemplo 4. Calcular aproximadamente $1{,}02^{3{,}01}$.

Solución. Examinemos la función $z=x^y$. El número que se busca puede considerarse como el valor incrementado de esta función cuando $x=1$, $y=3$, $\Delta x=0{,}02$ y $\Delta y=-0{,}01$. El valor inicial de la función es $z=1^3=1$,

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\,\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02+1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01=0{,}06.$$

Por consiguiente, $1{,}02^{3{,}01}\approx 1+0{,}06=1{,}06$.

1831. Para la función $f(x, y)=x^2y$, hallar el incremento total y la diferencial total en el punto (1; 2); compararlos entre sí, si:

a) $\Delta x=1$, $\Delta y=2$; b) $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

1832. Demostrar, que para las funciones u y v de varias (por ej., de dos) variables se verifican las reglas ordinarias de derivación:

a) $d(u+v)=du+dv$; b) $d(uv)=v\,du+u\,dv$;

c) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

Hallar las diferenciales totales de las siguientes funciones:

1833. $z=x^3+y^3-3xy$.

1834. $z=x^2y^3$.

1835. $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1836. $z=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 y$.

1837. $z=yx^y$.

1838. $z=\ln(x^2+y^2)$.

1839. $f(x, y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

1840. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

1841. $z=\ln \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

1842. Hallar $df(1; 1)$, si $f(x, y)=\frac{x}{y^2}$.

1843. $u=xyz$.

1844. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1845. $u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$.

1846. $u=\operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$.

1847. Hallar $df(3; 4; 5)$, si $f(x, y, z)=\frac{z}{x^2+y^2}$.

1848. Uno de los lados de un rectángulo es $a=10$ cm, el otro, $b=24$ cm. ¿Cómo variará la diagonal l de este rectángulo si el lado a se alarga 4 mm y el lado b se acorta 1 mm? Hallar la magnitud aproximada de la variación y compararla con la exacta.

1849. Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 10 cm, 8 cm y 6 cm, está hecha de madera contrachapada de 2 mm de espesor. Determinar el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

1850*. El ángulo central de un sector circular es igual a 80° y se desea disminuirlo en 1°. ¿En cuánto hay que alargar el radio del sector, para que su área no varíe, si su longitud inicial era igual a 20 cm?

1851. Calcular aproximadamente:

a) $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$; b) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$;

c) sen $32°\cdot\cos 59°$ (al convertir los grados en radianes y cuando se calcule el sen 60°, tomar solamente tres cifras decimales; la última cifra debe redondearse).

1852. Demostrar, que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

1853. Al medir en un lugar el triángulo ABC, se obtuvieron los datos siguientes: el lado $a=100$ m $\pm$ 2 m, el lado $b=200$ m $\pm$ 3 m y el ángulo $C=60°\pm1°$. ¿Con qué grado de exactitud puede calcularse el lado c?

1854. El período T de oscilación del péndulo se calcula por la fórmula

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

donde l es la longitud del péndulo y g, la aceleración de la gravedad. Hallar el error que se comete al determinar T, como resultado de los pequeños errores $\Delta l=\alpha$ y $\Delta g=\beta$ cometidos al medir l y g.

1855. La distancia entre los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P(x; y)$ es igual a ρ, y el ángulo formado por el vector $\overrightarrow{P_0P}$ con el eje OX, es igual a α. ¿En cuánto variará el ángulo α, si el punto P toma la posición $P_1(x+dx, y+dy)$, mientras que el punto P_0 sigue invariable?

§ 5. Derivación de funciones compuestas

1. Caso de una sola variable independiente. Si $z=f(x, y)$ es una función diferenciable de los argumentos x e y, que son, a su vez, funciones diferenciables de una variable independiente t:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

la derivada de la función compuesta $z=f[\varphi(t),\ \psi(t)]$ se puede calcular por la fórmula

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

En el caso particular de que t coincida con uno de los argumentos, por ejemplo, con x, la derivada «total» de la función z con respecto a x será:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Hallar $\frac{dz}{dt}$, si

$$z=e^{3x+2y},\ \text{donde}\ x=\cos t,\quad y=t^2.$$

Solución. Por la fórmula (1) tenemos:

$$\frac{dz}{dt}=e^{3x+2y}\cdot 3(-\operatorname{sen} t)+e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t=$$

$$=e^{3x+2y}(4t-3\operatorname{sen} t)=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\operatorname{sen} t).$$

Ejemplo 2. Hallar la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ y la derivada total $\frac{dz}{dx}$, si

$$z=e^{xy},\ \text{donde}\ y=\varphi(x).$$

Solución. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$. Basándonos en la fórmula (2), obtenemos:

$$\frac{dz}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\varphi'(x).$$

2. Caso de varias variables independientes. Si z es una función compuesta de varias variables independientes, por ejemplo, $z=f(x, y)$, donde $x=\varphi(u, v)$ e $y=\psi(u, v)$ (u y v son variables independientes; f, φ y ψ son funciones diferenciables), las derivadas parciales de z con respecto a u y v se expresan así:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

En todos los casos examinados se verifica la fórmula

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(*propiedad de invariabilidad de la diferencial total*).

Ejemplo 3. Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$, si

$$z=f(x, y),\ \text{donde}\ x=uv,\ y=\frac{u}{v}.$$

Solución Aplicando las fórmulas (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y) \cdot v + f'_y(x, y) \frac{1}{v}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)\, u - f'_y(x, y) \frac{u}{v^2}.$$

Ejemplo 4. Demostrar, que la función $z = \varphi(x^2+y^2)$ satisface a la ecuación $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Solución. La función φ depende de x e y a través del argumento intermedio $x^2+y^2=t$, por lo cual

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2+y^2)\, 2x$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2+y^2)\, 2y.$$

Poniendo las derivadas parciales en el primer miembro de la ecuación, tendremos:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y\varphi'(x^2+y^2)\, 2x - x\varphi'(x^2+y^2)\, 2y =$$

$$= 2xy\varphi'(x^2+y^2) - 2xy\varphi'(x^2+y^2) \equiv 0,$$

es decir, la función z satisface a la ecuación dada.

1856. Hallar $\frac{dz}{dt}$, si

$$z = \frac{x}{y}, \text{ donde } x = e^t, \; y = \ln t.$$

1857. Hallar $\frac{du}{dt}$, si

$$u = \ln \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{y}}, \text{ donde } x = 3t^2, \; y = \sqrt{t^2+1}.$$

1858. Hallar $\frac{du}{dt}$, si

$$u = xyz, \text{ donde } x = t^2+1, \; y = \ln t, \; z = \operatorname{tg} t.$$

1859. Hallar $\frac{dy}{dt}$, si

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ donde } x = R\cos t, \; y = R \operatorname{sen} t, \; z = H.$$

1860. Hallar $\frac{dz}{dx}$, si

$$z = u^v, \text{ donde } u = \operatorname{sen} x, \; v = \cos x$$

1861. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ e } y = x^2.$$

1862. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si

$$z = x^y, \text{ donde } y = \varphi(x).$$

1863. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$z = f(u, v), \text{ donde } u = x^2 - y^2, \ v = e^{xy}.$$

1864. Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$, si

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \text{ donde } x = u \operatorname{sen} v, \ y = u \cos v.$$

1865. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$z = f(u), \text{ donde } u = xy + \frac{y}{x}.$$

1866. Demostrar, que si

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \text{ donde } x = R \cos \varphi \cos \psi,$$
$$y = R \cos \varphi \operatorname{sen} \psi, \ z = R \operatorname{sen} \varphi,$$

entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0.$$

1867. Hallar $\frac{du}{dx}$, si

$$u = f(x, y, z), \text{ donde } y = \varphi(x), \ z = \psi(x, y).$$

1868. Demostrar, que si

$$z = f(x + ay),$$

donde f es una función diferenciable, entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}.$$

1869. Demostrar, que la función

$$w = f(u, v),$$

donde $u = x + at$, $v = y + bt$, satisface a la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}.$$

1870. Demostrar, que la función

$$z = y\varphi(x^2 - y^2)$$

satisface a la ecuación

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1871. Demostrar, que la función

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

satisface a la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

1872. Demostrar, que la función

$$z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

satisface a la ecuación

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

1873. Un lado de un rectángulo de $x = 20$ m, aumenta con una velocidad de 5 m/seg, el otro lado de $y = 30$ m, disminuye con una velocidad de 4 m/seg. ¿Con qué velocidad variarán el perímetro y el área de dicho rectángulo?

1874. Las ecuaciones del movimiento de un punto material son

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

¿Con qué velocidad aumentará la distancia desde este punto al origen de coordenadas?

1875. Dos barcos, que salieron al mismo tiempo del punto A, van, uno, hacia el norte y, el otro, hacia el nordeste. Las velocidades de dichos barcos son: 20 km/h, y 40 km/h, respectivamente. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos?

§ 6. Derivada en una dirección dada y gradiente de una función

1. Derivada de una función en una dirección dada. Se da el nombre de *derivada* de una función $z = f(x, y)$ *en una dirección dada* $l = \overrightarrow{PP_1}$ a la expresión

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{P_1 P \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1 P},$$

donde $f(P)$ y $f(P_1)$ son los valores de la función en los puntos P y P_1. Si la función z es diferenciable, se verificará la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha, \tag{1}$$

donde α es el ángulo formado por el vector $\vec{l}$ con el eje OX (fig. 67).

Análogamente se determina la derivada en una dirección dada l, para una función de tres argumentos $u=f(x, y, z)$. En este caso

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{2}$$

donde α, β y γ son los ángulos entre la dirección $\vec{l}$ y los correspondientes ejes de coordenadas. La derivada en una dirección dada caracteriza la velocidad con que varía la función en dicha dirección.

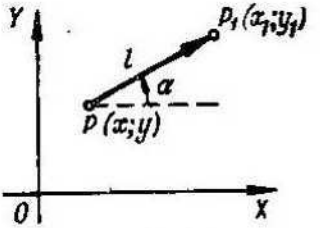

Fig. 67

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la función $z=2x^2-3y^2$ en el punto $P(1; 0)$, en la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 120°.

Solución. Hallamos las derivadas parciales de la función dada y sus valores en el punto P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-6y;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=0.$$

Aquí

$$\cos\alpha=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando la fórmula (1), obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=4\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2.$$

El signo menos indica, que la función en este punto y en la dirección dada, decrece.

2°. Gradiente de una función. Recibe el nombre de *gradiente* de una función $z=f(x, y)$, un vector, cuyas proyecciones sobre los ejes de

coordenadas son las correspondientes derivadas parciales de dicha función:

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\,i+\frac{\partial z}{\partial y}\,j. \tag{3}$$

La derivada de la función dada en la dirección l, está relacionada con el gradiente de la misma por la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\operatorname{пр}_l \operatorname{grad} z,$$

es decir, la derivada en esta dirección es igual a la proyección del gradiente de la función sobre la dirección en que se deriva.

El gradiente de la función en cada punto tiene la dirección de la normal a la correspondiente línea de nivel de la función. La dirección del gradiente de la función, en un punto dado, es la dirección de la velocidad máxima de crecimiento de la función en este punto, es decir, cuando $l=\operatorname{grad} z$, la derivada $\frac{\partial z}{\partial l}$ toma su valor máximo, igual a

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Análogamente se determina el gradiente de una función de tres variables $u=f(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\,i+\frac{\partial u}{\partial y}\,j+\frac{\partial u}{\partial z}\,k. \tag{4}$$

El gradiente de una función de tres variables, en cada punto lleva la dirección de la normal a la superficie de nivel que pasa por dicho punto.

Ejemplo 2. Hallar y construir el gradiente de la función $z=x^2y$ en el punto $P(1; 1)$.

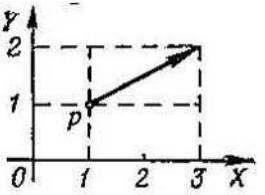

Fig. 68

Solución. Calculamos las derivadas parciales y sus valores en el punto P.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=1.$$

Por consiguiente, $\operatorname{grad} z=2i+j$ (fig. 68).

1876. Hallar la derivada de la función $z=x^2-xy-2y^2$ en el punto $P(1; 2)$ y en la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 60°.

1877. Hallar la derivada de la función $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ en el punto $P(1; 2)$, en la dirección que va desde éste al punto $N(4; 6)$.

1878. Hallar la derivada de la función $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $P(1; 1)$ en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.

1879. Hallar la derivada de la función $u = x^2 - 3yz + 5$ en el punto $M(1; 2; -1)$ en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes de coordenadas.

1880. Hallar la derivada de la función $u = xy + yz + zx$ en el punto $M(2; 1; 3)$ en la dirección que va desde éste al punto $N(5; 5; 15)$.

1881. Hallar la derivada de la función $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ en el origen de coordenadas, en la dirección que forma con los ejes de coordenadas OX, OY y OZ los ángulos α, β y γ, respectivamente.

1882. El punto en que la derivada de una función, en cualquier dirección, es igual a cero, se llama *punto estacionario* de esta función. Hallar los puntos estacionarios de las siguientes funciones:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;
b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
c) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

1883. Demostrar, que la derivada de la función $z = \frac{y^2}{x}$, tomada en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = C^2$ a lo largo de la normal a la misma, es igual a cero.

1884. Hallar el grad z en el punto $(2; 1)$, si

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1885. Hallar el grad z en el punto $(5; 3)$, si

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

1886. Hallar el grad u en el punto $(1; 2; 3)$, si $u = xyz$.

1887. Hallar la magnitud y la dirección del grad u en el punto $(2; -2; 1)$, si

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

1888. Hallar el ángulo entre los gradientes de la función $z = \ln \frac{y}{x}$ en los puntos $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ y $B(1; 1)$.

1889. Hallar la magnitud de la elevación máxima de la superficie

$$z = x^2 + 4y^2$$

en el punto $(2; 1; 8)$.

1890. Construir el campo vectorial del gradiente de las siguientes funciones:

a) $z = x + y$; c) $z = x^2 + y^2$;

b) $z = xy$; d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

§ 7. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

1. Derivadas parciales de órdenes superiores. Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de una función $z = f(x, y)$ a las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden.

Para designar las derivadas de segundo ordon se emplean las siguientes notaciones

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y), \text{ etc.}$$

Análogamente se determinan y se designan las derivadas parciales de orden superior al segundo.

Si las derivadas parciales que hay que calcular son continuas, el *resultado de la derivación sucesiva no depende del orden de dicha derivación.*

Ejemplo 1. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Solución. Hallamos primeramente las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Ahora volvemos a derivar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Debe advertirse que la llamada derivada parcial «cruzada» se puede hallar de otra manera, a saber:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Diferenciales de órdenes superiores. Recibe el nombre de *diferencial de segundo orden* de una función $z=f(x, y)$, la diferencial de la diferencial de primer orden de dicha función:

$$d^2z = d\,(dz).$$

Análogamente se determinan las diferenciales de la función z de orden superior al segundo, por ejemplo:

$$d^3z = d\,(d^2z)$$

y, en general,

$$d^nz = d\,(d^{n-1}z).$$

Si $z=f(x, y)$, donde x e y son variables independientes y la función f tiene derivadas parciales continuas de segundo grado, la diferencial de 2° orden de la función z se calcula por la fórmula

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \qquad (1)$$

En general, cuando existen las correspondientes derivadas se verifica la fórmula simbólica

$$d^nz = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

que formalmente se desarrolla según la ley binomial.

Si $z=f(x, y)$, donde los argumentos x e y son a su vez funciones de una o varias variables independientes, tendremos

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y. \qquad (2)$$

Si x e y son variables independientes, $d^2x=0$, $d^2y=0$ y la fórmula (2) se hace equivalente a la fórmula (1).

Ejemplo 2. Hallar las diferenciales totales de 1° y 2° órdenes de la función

$$z = 2x^2 - 3xy - y^2.$$

Solución. 1er procedimiento. Tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y.$$

Por lo cual,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (4x - 3y)\,dx - (3x + 2y)\,dy.$$

Después,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

de donde se deduce que

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 = 4\,dx^2 - 6\,dx\,dy - 2\,dy^2.$$

2° procedimiento. Diferenciando, hallamos:

$$dz = 4x\,dx - 3\,(y\,dx + x\,dy) - 2y\,dy = (4x - 3y)\,dx - (3x + 2y)\,dy.$$

Volviendo a diferenciar y recordando que dx y dy no dependen de x e y,

obtenemos:

$$d^2z = (4\,dx - 3\,dy)\,dx - (3\,dx + 2\,dy)\,dy = 4\,dx^2 - 6\,dx\,dy - 2\,dy^2.$$

1891. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

1892. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si

$$z = \ln(x^2 + y).$$

1893. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, si

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

1894. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, si

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

1895. Hallar $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, si

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1896. Hallar todas las derivadas parciales de 2° orden de la función

$$u = xy + yz + zx.$$

1897. Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, si

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

1898. Hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$, si

$$z = \operatorname{sen}(xy).$$

1899. Hallar $f''_{xx}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yy}(0, 0)$, si

$$f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n.$$

1900. Demostrar, que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si

$$z = \operatorname{arsen}\sqrt{\frac{x-y}{x}}.$$

1901. Demostrar, que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si

$$z = x^y.$$

1902*. Demostrar, que para la función

$$f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

con la condición complementaria de $f(0, 0) = 0$, tenemos

$$f''_{xy}(0, 0) = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = +1.$$

1903. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si

$$z = f(u, v),$$

donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

1904. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si

$$u = f(x, y, z), \text{ donde } z = \varphi(x, y).$$

1905. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si

$z = f(u, v)$ donde $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

1906. Demostrar, que la función

$$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1907. Demostrar, que la función

$$u = \ln\frac{1}{r},$$

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1908. Demostrar, que la función

$$u(x, t) = A \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x$$

satisface a la ecuación de vibraciones de la cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. Demostrar, que la función

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

(x_0, y_0, z_0, a, son constantes) satisface a la ecuación de la conductividad calorífica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

1910. Demostrar, que la función

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

donde φ y ψ son unas funciones cualesquiera, diferenciables dos veces, satisface a la ecuación de las vibraciones de la cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1911. Demostrar, que la función

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisface a la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1912. Demostrar, que la función

$$u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\, \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisface a la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1913. Demostrar, que la función $z = f[x + \varphi(y)]$ satisface a la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

1914. Hallar $u = u(x, y)$, si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

1915. Determinar la forma de la función $u = u(x, y)$ que satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1916. Hallar d^2z, si

$$z = e^{xy}.$$

1917. Hallar d^2u, si

$$u = xyz.$$

1918. Hallar d^2z, si

$$z = \varphi(t), \text{ donde } t = x^2 + y^2.$$

1919. Hallar dz y d^2z, si

$$z = u^v, \text{ donde } u = \frac{x}{y}, \; v = xy.$$

1920. Hallar d^2z, si

$$z = f(u, v), \text{ donde } u = ax, \; v = by.$$

1921. Hallar d^2z, si

$$z = f(u, v), \text{ donde } u = xe^y, \; v = ye^x.$$

1922. Hallar d^3z, si

$$z = e^x \cos y.$$

1923. Hallar la diferencial de 3er orden de la función

$$z = x \cos y + y \operatorname{sen} x,$$

y determinar todas derivadas parciales de 3er orden.

1924. Hallar $df(1, 2)$ y $d^2f(1, 2)$, si

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y.$$

1925. Hallar $d^2f(0, 0, 0)$, si $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$.

§ 8. Integración de diferenciales exactas

1°. Condición de diferencial exacta. Para que la expresión $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, en que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas conjuntamente con sus derivadas parciales de primer orden en un recinto simplemente conexo D, represente de por sí, en el recinto D, la diferencial exacta de una función determinada $u(x, y)$, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ejemplo 1. Cerciorarse de que la expresión

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$$

es la diferencial exacta de una función determinada y hallar dicha función.

Solución. En este caso $P = 2x + y$, $Q = x + 2y$. Por esto, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ y, por consiguiente,

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

donde u es la función que se busca.

De acuerdo con la condición $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, por consiguiente,

$$u = \int (2x + y)\, dx = x^2 + xy + \varphi(y).$$

Pero, por otra parte, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + 2y$, de donde $\varphi'(y) = 2y$, $\varphi(y) = y^2 + C$

y

$$u = x^2 + xy + y^2 + C.$$

Finalmente,

$$(2x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = d(x^2 + xy + y^2 + C).$$

2°. Caso de tres variables. Análogamente, la expresión

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

en que $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$, junto con sus derivadas parciales de 1er orden, son funciones continuas de las variables x, y, z representa la diferencial exacta de una función determinada $u(x, y, z)$, en un recinto simplemente conexo D del espacio, cuando, y sólo cuando, en D se cumpla la condición

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Ejemplo 2. Cerciorarse de que la expresión

$$(3x^2 + 3y - 1)\, dx + (z^2 + 3x)\, dy + (2yz + 1)\, dz$$

es la diferencial exacta de una función y hallar dicha función.

Solución. Aquí $P = 3x^2 + 3y - 1$, $Q = z^2 + 3x$ y $R = 2yz + 1$. Establecemos, que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

y, por consiguiente,

$$(3x^2 + 3y - 1)\, dx + (z^2 + 3x)\, dy + (2yz + 1)\, dz = du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz,$$

donde u es la función que se busca.

Tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1,$$

es decir,

$$u = \int (3x^2 + 3y - 1)\, dx = x^3 + 3xy - x + \varphi(y, z).$$

De otra parte,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2 + 3x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1$$

de donde $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1$. El problema se reduce a buscar una función de dos variables $\varphi(y, z)$, cuyas derivadas parciales se conocen, habiéndose cumplido la condición de diferencial exacta

Hallamos φ:

$$\varphi(y, z) = \int z^2\, dy = yz^2 + \psi(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + \psi'(z) = 2yz + 1,$$

$$\psi'(z) = 1, \quad \psi(z) = z + C,$$

es decir, $\varphi(y, z) = yz^2 + z + C$. Y, finalmente, obtenemos

$$u = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C.$$

Después de comprobar que las expresiones que se dan más abajo son diferenciales exactas de ciertas funciones, hallar estas funciones.

1926. $y\, dx + x\, dy$.

1927. $(\cos x + 3x^2 y)\, dx + (x^3 - y^2)\, dy$.

1928. $\frac{(x + 2y)\, dx + y\, dy}{(x + y)^2}$.

1929. $\frac{x + 2y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{2x - y}{x^2 + y^2}\, dy$.

1930. $\frac{1}{y}\, dx - \frac{x}{y^2}\, dy$.

1931. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy$.

1932. Determinar las constantes a y b de tal forma, que la expresión

$$\frac{(ax^2 + 2xy + y^2)\, dx - (x^2 + 2xy + by^2)\, dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

sea la diferencial exacta de una función z, y hallar esta última.

Después de comprobar que las expresiones que se dan más abajo son las diferenciales exactas de ciertas funciones, hallar estas funciones.

1933. $(2x + y + z)\, dx + (x + 2y + z)\, dy + (x + y + 2z)\, dz$.

1934. $(3x^2 + 2y^2 + 3z)\, dx + (4xy + 2y - z)\, dy + (3x - y - 2)\, dz$.

1935. $(2xyz - 3y^2 z + 8xy^2 + 2)\, dx +$
$+ (x^2 z - 6xyz + 8x^2 y + 1)\, dy + (x^2 y - 3xy^2 + 3)\, dz$.

1936. $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) dz$.

1937. $\frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

1938*. Se dan las proyecciones de una fuerza sobre los ejes de coordenadas:

$$X=\frac{y}{(x+y)^2}, \quad Y=\frac{\lambda x}{(x+y)^2},$$

donde λ es una magnitud constante. ¿Cuál debe ser el coeficiente λ, para que la fuerza tenga potencial?

1939. ¿A qué condición debe satisfacer la función $f(x, y)$, para que la expresión

$$f(x, y)(dx+dy)$$

sea una diferencial exacta?

1940. Hallar la función u, si

$$du=f(xy)(y\,dx+x\,dy).$$

§ 9. Derivación de funciones implícitas

1. Caso de una variable independiente. Si una ecuación $f(x, y)=0$, donde $f(x, y)$ es una función diferenciable de las variables x e y, determina a y como función de x, la derivada de esta función dada en forma implícita, siempre que $f'_y(x, y)\neq 0$, puede hallarse por la fórmula

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \tag{1}$$

Las derivadas de órdenes superiores se hallan por derivación sucesiva de la fórmula (1).

Ejemplo 1. Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si

$$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0.$$

Solución. Designando el primer miembro de esta ecuación por $f(x, y)$, hallamos las derivadas parciales

$$f'_x(x, y)=3(x^2+y^2)^2\cdot 2x-3\cdot 2x=6x[(x^2+y^2)^2-1],$$

$$f'_y(x, y)=3(x^2+y^2)^2\cdot 2y-3\cdot 2y=6y[(x^2+y^2)^2-1].$$

De donde, aplicando la fórmula (1), obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}=-\frac{6x[(x^2+y^2)^2-1]}{6y[(x^2+y^2)^2-1]}=-\frac{x}{y}.$$

Para hallar la segunda derivada, derivamos con respecto a x la primera derivada que hemos encontrado, teniendo en cuenta al hacerlo que y es función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1\cdot y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

2. Caso de varias variables independientes. Análogamente, si la ecuación $F(x, y, z)=0$, donde $F(x, y, z)$ es una función dife-

renciable de las variables x, y y z, determina a z como función de las variables independientes x e y, y $F'_z(x, y, z) \neq 0$, las derivadas parciales de esta función dada de forma implícita pueden hallarse por las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{2}$$

Otro procedimiento para hallar las derivadas de la función z es el siguiente: diferenciando la ecuación $F(x, y, z) = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

De donde puede determinarse dz, y por consiguiente $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejemplo 2. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

Solución. 1er procedimiento. Designando el primer miembro de esta ecuación por medio de $F(x, y, z)$, hallamos las derivadas parciales

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1,$$

$$F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

Aplicando la fórmula (2), obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x}{6z - y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

2° procedimiento. Diferenciado la ecuación dada, obtenemos:

$$2x\,dx - 4y\,dy + 6z\,dz - y\,dz - z\,dy + dy = 0.$$

De donde determinamos dz, es decir, la diferencial total de la función implícita:

$$dz = \frac{2x\,dx + (1 - 4y - z)\,dy}{y - 6z}.$$

Comparándola con la fórmula $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, vemos, que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 6z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 4y - z}{y - 6z}.$$

1941. Sea y una función de x, determinada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1942. Sea y una función determinada por la ecuación

$$x^2+y^2+2axy=0 \quad (a>1).$$

Demostrar, que $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ y explicar el resultado obtenido.

1943. Hallar $\frac{dy}{dx}$, si $y=1+y^x$.

1944. Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y=x+\ln y$.

1945. Hallar $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ y $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, si

$$x^2-2xy+y^2+x+y-2=0.$$

Utilizando los resultados obtenidos, representar aproximadamente la gráfica de esta curva en el entorno del punto $x=1$.

1946. La función y está determinada por la ecuación

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (a\neq 0).$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1947. $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si

$$1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0.$$

1948. La función z de las variables x e y se da por la ecuación

$$x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0.$$

Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1949. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x\cos y+y\cos z+z\cos x=1.$$

1950. La función z viene dada por la ecuación

$$x^2+y^2-z^2-xy=0.$$

Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para el sistema de valores $x=-1$, $y=0$ y $z=1$.

1951. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1952. $f(x, y, z)=0$. Demostrar, que $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

1953. $z=\varphi(x, y)$, donde y es función de x, determinada por la ecuación $\psi(x, y)=0$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1954. Hallar dz y d^2z, si

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

1955. Sea z una función de las variables x e y determinada por la ecuación

$$2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0.$$

Hallar dz y d^2z para el sistema de valores $x=2$, $y=0$ y $z=1$.

1956. Hallar dz y d^2z, si $\ln z=x+y+z=1$. ¿A qué son iguales las derivadas primera y segunda de la función z?

1957. Sea la función z dada por la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz),$$

donde φ es una función cualquiera diferenciable y a, b, c, constantes. Demostrar, que

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

1958. Demostrar que la función z, determinada por la ecuación

$$F(x-az, y-bz)=0,$$

donde F es una función diferenciable cualquiera de dos argumentos, satisface a la ecuación

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

1959. $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$. Demostrar, que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

1960. Demostrar, que la función z, determinada por la ecuación $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

§ 11. Plano tangente y normal a una superficie

1°. Ecuaciones del plano tangente y de la normal para el caso en que la superficie está dada de forma explícita. Recibe el nombre de *plano tangente* de una superficie en el punto M (punto de contacto) el plano en que están situadas todas las tangentes en el punto M, a las curvas trazadas en dicha superficie que pasan por este punto M.

Se llama *normal* de una superficie a la recta perpendicular al plano tangente en el punto de contacto.

Si la ecuación de la superficie está dada de forma explícita en un sistema de coordenadas cartesianas, $z=f(x, y)$, donde $f(x, y)$ es una función diferen-

ciable, la ecuación del plano tangente en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ a la superficie será

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0). \quad (1)$$

Aquí $z_0 = f(x_0, y_0)$ y X, Y, Z, son las coordenadas variables de los puntos del plano tangente.

Las ecuaciones de la normal tienen la forma:

$$\frac{X - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z - z_0}{-1}, \quad (2)$$

donde X, Y, Z, son las coordenadas variables de los puntos de la normal.

Ejemplo 1. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ en su punto $M(2; -1; 1)$.

Solución. Hallamos las derivadas parciales de la función dada y sus valores en el punto M.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

De donde, aplicando las fórmulas (1) y (2), tendremos: $z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ o bien, $2x + 2y - z - 1 = 0$, que es la ecuación del plano tangente, y $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$, que son las ecuaciones de la normal.

2°. Ecuaciones del plano tangente y de la normal para el caso en que la superficie está dada de forma implícita. En el caso en que la ecuación de la superficie regular esté dada de forma implícita

$$F(x, y, z) = 0$$

y $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, las ecuaciones correspondientes tendrán la forma

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0, \quad (3)$$

que es la ecuación del plano tangente, y

$$\frac{X - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad (4)$$

que son las ecuaciones de la normal.

Ejemplo 2. Escribir la ecuación del plano tangente y de la normal a la superficie $3xyz - z^3 = a^3$ en el punto que tiene $x = 0$ e $y = a$.

Solución. Hallamos la cota z del punto de contacto, poniendo $x = 0$ e $y = a$ en la ecuación de la superficie: $-z^3 = a^3$, de donde $z = -a$. De esta forma, el punto de contacto es $M(0, a, -a)$.

Designando por $F(x, y, z)$ el primer miembro de la ecuación, hallamos las derivadas parciales y sus valores en el punto M:

$$F'_x = 3yz, \qquad (F'_x)_M = -3a^2,$$

$$F'_y = 3xz, \qquad (F'_y)_M = 0,$$

$$F'_z = 3xy - 3z^2, \qquad (F'_z)_M = -3a^2.$$

Aplicando las fórmulas (3) y (4), obtenemos:

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0,$$

o sea, $x+z+a=0$, ecuación del plano tangente,

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2},$$

o sea, $\frac{x}{1}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$, ecuaciones de la normal.

1981. Escribir las ecuaciones de los planos tangentes y las de las normales a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

a) al paraboloide de revolución $z=x^2+y^2$, en el punto $(1; -2; 5)$;

b) al cono $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$, en el punto $(4; 3; 4)$;

c) a la esfera $x^2+y^2+z^2=2Rz$, en el punto $(r\cos\alpha; R\operatorname{sen}\alpha; R)$.

1982. ¿En qué punto del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

la normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

1983. Por el punto M $(3; 4; 12)$ de la esfera $x^2+y^2+z^2=169$ pasan planos perpendiculares a los ejes OX y OY. Escribir la ecuación del plano que pasa por las tangentes a las secciones que originan aquéllos, en el punto común M.

1984. Demostrar, que la ecuación del plano tangente a la superficie central de 2° orden

$$ax^2+by^2+cz^2=k$$

en su punto $M(x_0, y_0, z_0)$ tiene la forma

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=k.$$

1985. Dada la superficie $x^2+2y^2+3z^2=21$, trazar a ella planos tangentes que sean paralelos al plano $x+4y+6z=0$.

1986. Dado el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

trazar a él planos tangentes que intercepten en los ejes coordenados segmentos de igual longitud.

1987. Hallar en la superficie $x^2+y^2-z^2-2x=0$ los puntos en que los planos tangentes a ella sean paralelos a los planos coordenados.

1988. Demostrar, que los planos tangentes a la superficie $xyz=m^3$ forman con los planos coordenados tetraedros de volumen constante.

1989. Demostrar, que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ interceptan en los ejes coordenados segmentos, cuya suma es constante.

1990. Demostrar, que el cono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

y la esfera

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$$

son tangentes entre sí en los puntos $(0, \pm b, c)$.

1991. Se llama *ángulo entre dos superficies* en el punto de su intersección, al ángulo que forman los planos tangentes a dichas superficies en el punto que se considera.

¿Qué ángulo forman en su intersección el cilindro $x^2+y^2=R^2$ y la esfera $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ en el punto $M\left(\frac{R}{2}; \frac{R\sqrt{3}}{2}; 0\right)$?

1992. Se llaman *ortogonales* las superficies que se cortan entre sí formando ángulo recto en cada uno de los puntos de la línea de su intersección.

Demostrar, que las superficies $x^2+y^2+z^2=r^2$ (esfera), $y=x\operatorname{tg}\varphi$ (plano) y $z^2=(x^2+y^2)\operatorname{tg}^2\psi$ (cono), que son superficies coordenadas del sistema de coordenadas esféricas r, φ, ψ, son ortogonales entre sí.

1993. Demostrar, que todos los planos tangentes a la superficie cónica $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ en su punto $M(x_0, y_0, z_0)$, donde $x_0\neq 0$, pasan por el origen de coordenadas.

1994*. Hallar las proyecciones del elipsoide

$$x^2+y^2+z^2-xy-1=0$$

sobre los planos coordenados.

1995. Demostrar, que la normal, en cualquier punto de la superficie de revolución $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $(f'\neq 0)$ corta a su eje de rotación.

§ 13. Extremo de una función de varias variables

1°. Definición de extremo de una función. Se dice que una función $f(x, y)$ tiene un *máximo* (*o un mínimo*) $f(a, b)$ en el punto $P(a, b)$, si para todos los puntos $P'(x; y)$ diferentes de P, de un entorno suficientemente pequeño del punto P, se cumple la desigualdad $f(a, b) > f(x, y)$ (o, respectivamente, $f(a, b) < f(x, y)$). El máximo o mínimo de una función recibe también el nombre de *extremo* de la misma. Análogamente se determina el extremo de una función de tres o más variables.

2°. Condiciones necesarias para la existencia de extremo. Los puntos, en que la función diferenciable $f(x, y)$ puede alcanzar un extremo (es decir, los llamados *puntos estacionarios*), se hallan resolviendo el sistema de ecuaciones

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0 \tag{1}$$

(*condiciones necesarias* para la existencia de extremo). El sistema (1) es equivalente a una ecuación $df(x, y) = 0$. En el caso general, en el punto extremo $P(a, b)$ de la función $f(x, y)$, o no existe $df(a, b)$ o bien $df(a, b) = 0$.

3°. Condiciones suficientes para la existencia de extremo. Sea $P(a, b)$ un punto estacionario de la función $f(x, y)$, es decir, $df(a, b) = 0$. En este caso: a) si $d^2f(a, b) < 0$, siendo $dx^2 + dy^2 > 0$, $f(a, b)$ es un *máximo* de la función $f(x, y)$; b) si $d^2f(a, b) > 0$, siendo $dx^2 + dy^2 > 0$, $f(a, b)$ es un *mínimo* de la función $f(x, y)$; c) si $d^2f(a, b)$ cambia de signo, $f(a, b)$ no es punto extremo de la función $f(x, y)$.

Las condiciones citadas equivalen a las siguientes: sea $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ y $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$, $C = f''_{yy}(a, b)$. Formamos el *discriminante*

$$\Delta = AC - B^2.$$

En este caso: 1) si $\Delta > 0$, la función tiene un extremo en el punto $P(a, b)$ y éste es un máximo, si $A < 0$ (o $C < 0$), y un mínimo, si $A > 0$ (o $C > 0$); 2) si $\Delta < 0$, en el punto $P(a, b)$ no existe extremo; 3) si $\Delta = 0$, la existencia de extremo de la función en el punto $P(a, b)$ queda indeterminada (es necesario continuar la investigación).

4°. Caso de funciones de muchas variables. Para las funciones de tres o más variables, las condiciones necesarias para la existencia de extremos son análogas a las condiciones del párrafo 1°, (1), y las condiciones suficientes, análogas a las del párrafo 3°, a), b) y c).

Ejemplo 1. Averiguar los extremos de la función

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Solución. Hallamos las derivadas parciales y formamos el sistema de ecuaciones (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2+3y^2-15=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 6xy-12=0$$

o bien,

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0, \\ xy-2=0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos cuatro puntos estacionarios:

$$P_1(1;\ 2);\quad P_2(2;\ 1);\quad P_3(-1;\ -2);\quad P_4(-2;\ -1).$$

Hallamos las derivadas de 2° orden

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$$

y formamos el discriminante $\Delta = AC-B^2$ para cada uno de los puntos estacionarios.

1) Para el punto P_1: $A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6$, $B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{P_1}=12$, $C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=6$, $\Delta = AC-B^2=36-144<0$. Es decir, en el punto P_1 no hay extremo.

2) Para el punto P_2: $A=12$, $B=6$, $C=12$; $\Delta=144-36>0$, $A>0$. En el punto P_2 la función tiene un mínimo. Este mínimo es igual al valor de la función cuando $x=2$, $y=1$:

$$z_{\min}=8+6-30-12=-28.$$

3) Para el punto P_3: $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$; $\Delta=36-144<0$. No hay extremo.

4) Para el punto P_4: $A=-12$, $B=-6$, $C=-12$; $\Delta=144-36>0$, $A<0$. En el punto P_4 la función tiene un máximo. Este máximo es igual a

$$z_{\max}=-8-6+30+12=28.$$

5°. Extremo condicionado. Se llama *extremo condicionado* de una función $f(x, z)$, en el caso más simple, al máximo o mínimo de esta función, alcanzado con la condición de que sus argumentos estén ligados entre sí por la ecuación $\varphi(x, y)=0$ (*ecuación de enlace*). Para hallar el extremo condicionado de la función $f(x, y)$, con la ecuación de enlace $\varphi(x, z)=0$, se forma la llamada *función de Lagrange*

$$F(x, y)=f(x, y)+\lambda\cdot\varphi(x, y),$$

donde λ es un multiplicador constante indeterminado, y se busca el extremo ordinario de esta función auxiliar. Las condiciones necesarias para que haya un extremo se reducen al sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0, \\ \varphi(x, y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

con tres incógnitas, x, y, λ, de las que, en general, se pueden deducir éstas.

El problema de la existencia y el carácter del extremo condicionado se resuelve sobre la base del estudio del signo que tiene la segunda diferencial de la función de Lagrange

$$d^2F(x, y)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2$$

para el sistema de valores de x, y, λ que investigamos, obtenido de (2), con la condición de que dx y dy estén relacionados entre sí por la ecuación

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0 \quad (dx^2+dy^2\neq 0).$$

Precisamente, la función $f(x, y)$ tendrá un máximo condicionado, si $d^2F<0$, y un mínimo condicionado, si $d^2F>0$. En particular, si el discriminante Δ para la función $F(x, y)$ en el punto estacionario es positivo, en este punto habrá un máximo condicionado de la función $f(x, y)$, si $A<0$ (o $C<0$), y un mínimo condicionado, si $A>0$ (o $C>0$).

Análogamente se hallan los extremos condicionados de las funciones de tres y más variables cuando existen una o más ecuaciones de enlace (cuyo número debe ser menor que el de variables). En este caso, hay que incluir en la función de Lagrange tantos multiplicadores indeterminados como ecuaciones de enlace haya.

Ejemplo. 2. Hallar los extremos de la función

$$z=6-4x-3y,$$

con la condición de que las variables x e y satisfagan a la ecuación

$$x^2+y^2=1.$$

Solución. Geométricamente, el problema se reduce a encontrar los valores máximo y mínimo de la cota z del plano $z=6-4x-3y$ para sus puntos de intersección con el cilindro $x^2+y^2=1$.

Formamos la función de Lagrange

$$F(x, y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1).$$

Tenemos, $\frac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$. Las condiciones necesarias proporcionan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -4+2\lambda x=0, \\ -3+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

resolviendo el cual, encontramos:

$$\lambda_1=\frac{5}{2}, \quad x_1=\frac{4}{5}, \quad y_1=\frac{3}{5}$$

y

$$\lambda_2=-\frac{5}{2}, \quad x_2=-\frac{4}{5}, \quad y_2=-\frac{3}{5}.$$

Como

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=2\lambda, \quad \frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2F}{\partial y^2}=2\lambda,$$

tenemos

$$d^2F = 2\lambda\,(dx^2 + dy^2).$$

Si $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$, entonces, $d^2F > 0$, y, por consiguiente, en este punto la función tiene un mínimo condicionado. Si $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$ e $y = -\frac{3}{5}$, entonces, $d^2F < 0$ y, por consiguiente, en este punto la función tiene un máximo condicionado.

De esta forma,

$$z_{\text{máx.}} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\text{mín.}} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$$

6°. Máximo y mínimo absolutos de la función. Toda función, diferenciable en una región acotada y cerrada, alcanza su valor

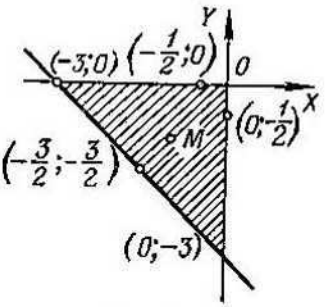

Fig. 70

máximo (mínimo), o en un punto estacionario, o en un punto de la frontera de la región.

Ejemplo 3. Determinar los valores máximo y mínimo de la función

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

en la región

$$x \leqslant 0, \quad y \leqslant 0, \quad x + y \geqslant -3.$$

Solución. La región indicada es un triángulo (fig. 70).

1) Hallamos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x - y + 1 = 0, \\ z'_y \equiv 2y - x + 1 = 0; \end{cases}$$

de donde $x = -1$, $y = -1$; obtenemos el punto $M(-1; -1)$.

En el punto M el valor de la función es $z_M = -1$. No es necesario investigar si hay extremo.

2) Examinamos la función en la frontera de la región.

Cuando $x = 0$, tenemos que $z = y^2 + y$, y el problema se reduce a buscar el máximo y mínimo absolutos de esta función de un argumento en el

segmento $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Al hacer esta investigación, hallamos que $(z_{\text{máx. abs.}})_{x=0} = 6$ en el punto $(0; -3)$ y $(z_{\text{mín. abs.}})_{x=0} = -\frac{1}{4}$ en el punto $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Cuando $y = 0$, obtenemos que $z = x^2 + x$. Análogamente hallamos, que $(z_{\text{máx. abs.}})_{y=0} = 6$ en el punto $(-3; 0)$ y $(z_{\text{mín. abs.}})_{y=0} = -\frac{1}{4}$ en el punto $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Cuando $x + y = -3$ o bien $y = -3 - x$, tendremos que $z = 3x^2 + 9x + 6$. Análogamente hallamos, que $(z_{\text{mín. abs.}})_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$ en el punto $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $(z_{\text{máx. abs.}})_{x+y=-3} = 6$ coincide con $(z_{\text{máx. abs.}})_{x=0}$ y con $(z_{\text{máx. abs.}})_{y=0}$. En la recta $x + y = -3$ se podría hacer la investigación de la existencia de extremo condicionado sin recurrir a la función de un solo argumento.

3) Comparando todos los valores de la función z obtenidos, llegamos a la conclusión de que $z_{\text{máx. abs.}} = 6$ en los puntos $(0; -3)$ y $(-3; 0)$ y $z_{\text{mín. abs.}} = -1$ en el punto estacionario M.

Investigar si tienen extremos las siguientes funciones de dos variables:

2008. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

2009. $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

2010. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2011. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

2012. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

2013. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

2014. $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

2015. $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

2016. $z = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

2016.1. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad (x > 0,\ y > 0)$.

2016.2. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Hallar los extremos de las funciones de tres variables:

2017. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

2018. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Hallar los extremos de las funciones z, dadas de forma implícita:

2019*. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

2020. $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.

Determinar los extremos condicionados de las funciones:

2021. $z=xy$, si $x+y=1$.

2022. $z=x+2y$, si $x^2+y^2=5$.

2023. $z=x^2+y^2$, si $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

2024. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, si $y-x=\frac{\pi}{4}$.

2025. $u=x-2y+2z$, si $x^2+y^2+z^2=9$.

2026. $u=x^2+y^2+z^2$, si $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

2027. $u=xy^2z^3$, si $x+y+z=12 (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

2028. $u=xyz$ con las condiciones: $x+y+z=5$,

$$xy+yz+zx=8.$$

2029. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz},$$

si $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$.

Indicación. Buscar el máximo de la función $u=xyz$ con la condición de que $x+y+z=S$.

2030. Determinar el máximo absoluto de la función

$$z=1+x+2y$$

en las regiones: a) $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1$; b) $x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ x-y\leqslant 1$.

2031. Determinar el máximo y mínimo absolutos de las funciones: a) $z=x^2y$ y b) $z=x^2-y^2$ en la región $x^2+y^2\leqslant 1$.

2032. Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $z=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}(x+y)$ en la región $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2033. Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $z=x^3+y^3-3xy$ en la región $0\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant y\leqslant 2$.

§ 14. Problemas de determinación de los máximos y mínimos absolutos de las funciones

Ejemplo 1. Hay que dividir un número entero a en tres sumandos no negativos de manera que el producto de éstos sea máximo.

Solución. Sean los sumandos que se buscan x, y, $a-x-y$. Buscamos el máximo absoluto de la función $f(x, y)=xy(a-x-y)$.

Por el sentido que tiene el problema, la función $f(x, y)$ se examina dentro del triángulo cerrado $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant a$ (fig. 71).

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y) \equiv y(a-2x-y)=0, \\ f'_y(x, y) \equiv x(a-x-2y)=0, \end{cases}$$

obtenemos para el interior del triángulo un solo punto estacionario $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$. Para él comprobamos si se cumplen las condiciones necesarias. Tenemos

$$f''_{xx}(x, y)=-2y, \quad f''_{xy}(x, y)=a-2x-2y, \quad f''_{yy}(x, y)=-2x.$$

Por consiguiente, $A=f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{2}{3}a$,

$$B=f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{1}{3}a.$$

$$C=f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{2}{3}a \text{ y}$$

$$\Delta=AC-B^2>0, \quad A<0.$$

Es decir, la función tiene máximo en el punto $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.

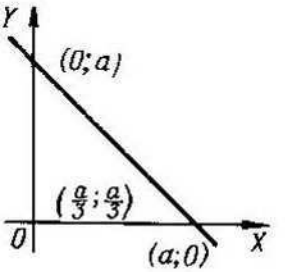

Fig. 71

Como en el contorno del triángulo la función $f(x, y)=0$, este máximo será el máximo absoluto de dicha función, es decir, el producto será máximo cuando $x=y=a-x-y=\frac{a}{3}$ y el valor máximo del mismo será igual a $\frac{a^3}{27}$.

Observación. Este problema podría haberse resuelto también por el método del extremo condicionado, buscando el máximo de la función $u=xyz$ con la condición de que $x+y+z=a$.

2034. Entre todos los paralelepípedos rectangulares de volumen V dado, hallar aquél cuya superficie total sea menor.

2035. ¿Qué dimensiones deberá tener un baño abierto, de volumen V dado, para que su superficie sea la menor posible?

2036. Entre todos los triángulos de perímetro igual a $2p$, hallar el que tiene mayor área.

2037. Hallar el paralelepípedo rectangular de área S dada, que tenga el mayor volumen posible.

2038. Representar el número positivo a en forma de producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea la menor posible.

2039. En el plano XOY hay que hallar un punto $M(x, y)$ tal, que la suma de los cuadrados de sus distancias hasta las tres rectas, $x=0$, $y=0$, $x-y+1=0$, sea la menor posible.

2040. Hallar el triángulo de perímetro $2p$ dado, que al girar alrededor de uno de sus lados engendre el cuerpo de mayor volumen.

2041. En un plano se dan tres puntos materiales $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, cuyas masas respectivas son m_1, m_2 y m_3. ¿Qué posición deberá ocupar el punto $P(x, y)$ para que el momento cuadrático (momento de inercia) de este sistema de puntos, con relación a dicho punto P (es decir, la suma $m_1P_1P^2+m_2P_2P^2+m_3P_3P^2$) sea el menor posible?

2042. Hacer pasar un plano por el punto $M(a, b, c)$ que forme con los planos coordenados un tetraedro que tenga el menor volumen posible.

2043. Inscribir en un elipsoide un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible.

2044. Calcular las dimensiones exteriores que deberá tener un cajón rectangular abierto, del que se dan el espesor de las paredes δ y la capacidad (interior) V, para que al hacerlo se gaste la menor cantidad posible de material.

2045. ¿En qué punto de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

la tangente a ésta forma con los ejes coordenados el triángulo de menor área?

2046*. Hallar los ejes de la elipse

$$5x^2+8xy+5y^2=9.$$

2047. En una esfera dada, inscribir el cilindro cuya superficie total sea máxima.

2048. Los cursos de dos ríos (dentro de los límites de una región determinada) representan aproximadamente una parábola, $y=x^2$, y una recta, $x-y-2=0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por qué puntos habrá que trazarlo?

2049. Hallar la distancia más corta del punto $M(1, 2, 3)$ a la recta

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}.$$

2050*. Los puntos A y B están situados en diferentes medios ópticos, separados el uno del otro por una línea recta (fig. 72). La velocidad de propagación de la luz en el primer medio es igual a v_1, en el segundo, a v_2. Aplicando el «principio de Fermat», según el cual el rayo luminoso se propaga a lo largo de la línea AMB, para cuyo recorrido necesita el mínimo de tiempo, deducir la ley de la refracción del rayo de luz.

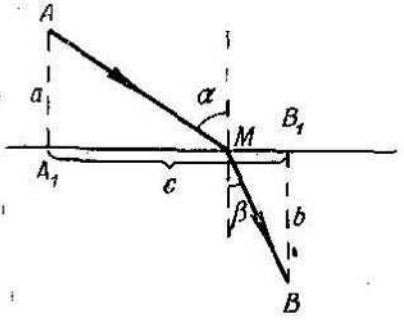

Fig. 72

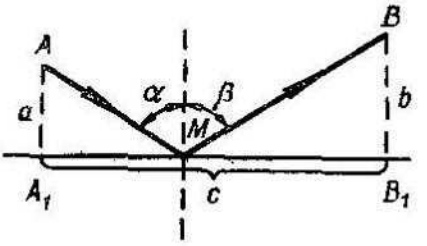

Fig. 73

2051. Aplicando el «principio de Fermat», deducir la ley de la reflexión del rayo de luz de un plano en un medio homogéneo (fig. 73).

2052*. Si por un circuito eléctrico de resistencia R pasa una corriente I, la cantidad de calor que se desprende en una unidad de tiempo es proporcional a I^2R. Determinar, ¿cómo habrá que distribuir la corriente I en I_1, I_2 e I_3 valiéndose de tres conductores de resistencias R_1, R_2, y R_3, respectivamente, para conseguir que el desprendimiento de calor sea mínimo?

§ 17. Longitud de un arco de curva en el espacio

La *diferencial del arco* de una curva en el espacio en coordenadas cartesianas rectangulares es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

donde x, y, z, son las coordenadas variables del punto de la curva.

Si

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

son las ecuaciones paramétricas de la curva en el espacio, la longitud del arco en el intervalo comprendido entre $t = t_1$ y $t = t_2$ será

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Hallar la longitud de los arcos de las curvas que se dan en los problemas 2071—2076:

2071. $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

2072. $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = \frac{3}{\pi} t$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

2073. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ desde $t = 0$ hasta un valor arbitrario de t.

2074. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ desde $x = 0$ hasta $x = 6$.

2075. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ desde el punto $O(0; 0; 0)$ hasta el punto $M(3; 3; 2)$.

2076. $y = a \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$ desde el punto $O(0; 0; 0)$ hasta el punto $M(x_0, y_0, z_0)$.

2077. La posición de un punto en cualquier instante t $(t > 0)$ se determina por las ecuaciones

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$$

Hallar la velocidad media del movimiento entre los instantes $t = 1$ y $t = 10$.

§ 18. Función vectorial de un argumento escalar

1°. Derivada de una función vectorial de un argumento escalar. La *función vectorial* $a = a(t)$ puede determinarse dando las tres funciones escalares $a_x(t)$, $a_y(t)$ y $a_z(t)$ de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$a = a_x(t)\, i + a_y(t)\, j + a_z(t)\, k.$$

La derivada de la función vectorial $a=a(t)$ con respecto al argumento escalar t es una nueva función vectorial determinada por la igualdad

$$\frac{da}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(t+\Delta t)-a(t)}{\Delta t}=\frac{da_x(t)}{dt}\,i+\frac{da_y(t)}{dt}\,j+\frac{da_z(t)}{dt}\,k.$$

El módulo de la derivada de la función vectorial es igual a

$$\left|\frac{da}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{da_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}.$$

El extremo del radio vector variable $r=r(t)$ describe en el espacio una curva

$$r=x(t)\,i+y(t)\,j+z(t)\,k,$$

que recibe el nombre de *hodógrafo* del vector r.

La derivada $\frac{dr}{dt}$ representa de por sí un vector, tangente al hodógrafo en el punto correspondiente,

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|=\frac{ds}{dt},$$

donde s es la longitud del arco del hodógrafo, tomada desde cierto punto inicial.

En particular, $\left|\frac{dr}{ds}\right|=1$.

Si el parámetro t es el tiempo, $\frac{dr}{dt}=v$ es el *vector de la velocidad* del extremo del vector r, $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=w$ es el *vector de la aceleración* de dicho extremo.

2°. Reglas principales para la derivación de funciones vectoriales de un argumento escalar.

1) $\frac{d}{dt}(a+b-c)=\frac{da}{dt}+\frac{db}{dt}-\frac{dc}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(ma)=m\frac{da}{dt}$, donde m es un escalar constante;

3) $\frac{d}{dt}(\varphi a)=\frac{d\varphi}{dt}a+\varphi\frac{da}{dt}$, donde $\varphi(t)$ es una función escalar de t;

4) $\frac{d}{dt}(ab)=\frac{da}{dt}b+a\frac{db}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(a\times b)=\frac{da}{dt}\times b+a\times\frac{db}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}a[\varphi(t)]=\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$;

7) $a\frac{da}{dt}=0$, si $|a|=\text{const}$.

Ejemplo 1. El radio vector de un punto móvil, en cualquier instante de tiempo, se da por la ecuación

$$r=i-4t^2j+3t^2k. \qquad (1)$$

Determinar la trayectoria, la velocidad y la aceleración del movimiento.

Solución. De la ecuación (1), tenemos:

$$x=1,\ y=-4t^2,\ z=3t^2.$$

Eliminando el tiempo t, tenemos, que la trayectoria del movimiento es una línea recta

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{3}.$$

Derivando la expresión (1), hallamos la velocidad del movimiento

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-8t\boldsymbol{j}+6t\boldsymbol{k}$$

y la aceleración del mismo

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-8\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}.$$

La magnitud de la velocidad es igual a

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{(8t)^2+(6t)^2}=10\,|\,t\,|.$$

Notemos, que la aceleración es constante y tiene la siguiente magnitud

$$\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10.$$

2078. Demostrar, que la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,t,$$

donde $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ son los radios vectores de dos puntos dados, es la ecuación de una recta.

2079. Determinar, qué líneas son los hodógrafos de las siguientes funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}$; c) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\operatorname{sen} t$;

b) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t$; d) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\operatorname{ch} t+\boldsymbol{b}\operatorname{sh} t$,

donde, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son vectores constantes, al mismo tiempo que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí.

2080. Hallar la derivada de la función vectorial $\boldsymbol{a}(t)=a(t)\,\boldsymbol{a}^\circ(t)$, donde $a(t)$ es una función escalar, mientras que $\boldsymbol{a}^\circ(t)$ es un vector unidad, en los casos en que el vector $\boldsymbol{a}(t)$ varía: 1) solamente en longitud, 2) solamente en dirección, 3) en longitud y en dirección (caso general). Esclarecer el sentido geométrico de los resultados obtenidos.

2081. Aplicando las reglas para la derivación de funciones vectoriales de un argumento escalar, deducir la fórmula para la derivación del producto mixto de tres funciones vectoriales, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

2082. Hallar la derivada, con respecto al parámetro t, del volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{b} = 2t\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{c} = -t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

2083. La ecuación de un movimiento es

$$\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i}\cos t + 4\boldsymbol{j}\operatorname{sen} t,$$

donde t es el tiempo. Determinar la trayectoria de este movimiento, la velocidad y aceleración del mismo. Construir la trayectoria del movimiento y los vectores de la velocidad y de la aceleración para los instantes $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

2084. La ecuación de un movimiento es

$$\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}\cos t - 2\boldsymbol{j}\operatorname{sen} t + 3\boldsymbol{k}t.$$

Determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de este movimiento. ¿A qué son iguales la magnitud de la velocidad y de la aceleración y cuáles son sus direcciones en los instantes $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$?

2085. La ecuación de un movimiento es

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos\alpha\cos\omega t + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\alpha\cos\omega t + \boldsymbol{k}\operatorname{sen}\omega t,$$

donde α y ω son constantes y t es el tiempo. Determinar la trayectoria, la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración del movimiento.

2086. La ecuación del movimiento de un proyectil (prescindiendo de la resistencia del aire) es

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\boldsymbol{k},$$

donde $\boldsymbol{v}_0\{v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\}$ es la velocidad inicial. Hallar la velocidad y la aceleración en cualquier instante.

2087. Demostrar, que si un punto se mueve por la parábola $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ de tal forma, que la proyección de la velocidad sobre el eje OX se mantiene consante $\left(\frac{dx}{dt} = \text{const.}\right)$, la aceleración también se mantendrá constante.

2088. Un punto situado en la rosca de un tornillo, que se enrosca en una viga, describe una hélice circular

$$x = a\cos\theta,\ y = a\operatorname{sen}\theta,\ z = h\theta,$$

donde θ, es el ángulo de giro del tornillo, a, el radio del tornillo y h la elevación correspondiente al giro de un radiante. Determinar la velocidad del movimiento del punto.

2089. Hallar la velocidad de un punto de la circunferencia de una rueda, de radio a, que gira con una velocidad angular constante ω, de tal forma, que su centro, al ocurrir esto, se desplaza en línea recta con una velocidad constante v_0.

Capítulo VII

INTEGRALES MULTIPLES Y CURVILINEAS

§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares

1°. Cálculo inmediato de integrales dobles. Se llama *integral doble* de una función continua $f(x, y)$ sobre un recinto cerrado y acotado S del plano XOY, al límite de la suma integral doble correspondiente

$$\int\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0 \\ \text{máx}\,\Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i \Delta y_k, \qquad (1)$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ y la suma se extiende a aquellos valores de i y k, para los que los puntos $(x_i; y_k)$ pertenecen al recinto S.

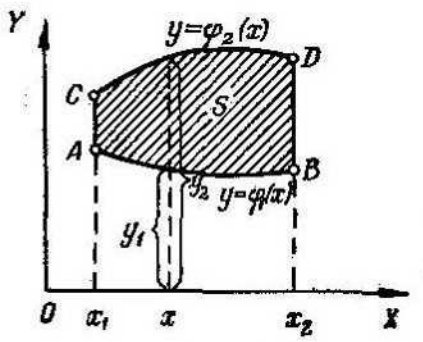

Fig. 85

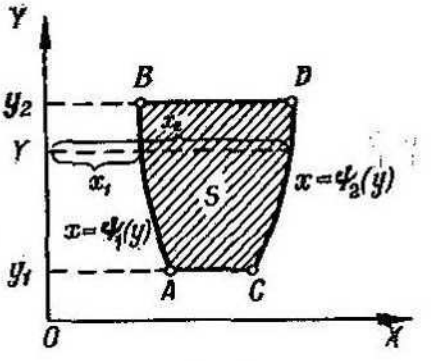

Fig. 86

2° Colocación de los límites de integración en la integral doble. Se distinguen dos formas principales de recintos de integración:

1) El recinto de integración S (fig. 85), está limitado a izquierda y derecha por las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, mientras que por abajo y por arriba lo está por las curvas continuas $y = \varphi_1(x)$ (AB) e $y = \varphi_2(x)$ (CD) $[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$, cada una de las cuales se corta con la vertical $x = X$ $(x_1 < X < x_2)$ en un solo punto (véase la fig. 85). En el recinto S, la variable x varía desde x_1 hasta x_2 y la variable y, cuando x permanece constante, varía entre $y_1 = \varphi_1(x$ e $y_2 = \varphi_2(x)$. El cálculo de la integral (1)

puede realizarse reduciéndola a una integral reiterada de la forma

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

donde, al calcular $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$, se considera x como cantidad constante.

2) El recinto de integración S (fig. 86), está limitado por abajo y por arriba por las rectas $y = y_1$ e $y = y_2$ $(y_2 > y_1)$, mientras que por la izquierda

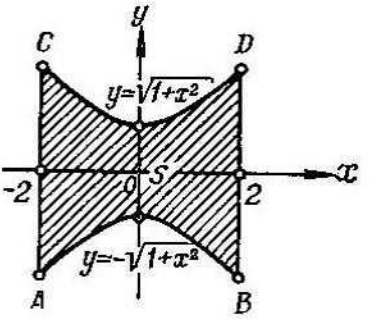

Fig. 87

y por la derecha lo está por las curvas continuas $x = \psi_1(y)$ (AB) y $x = \psi_2(y)$ (CD) $[\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)]$, cada una de las cuales se corta en un solo punto con la horizontal $y = Y$ $(y_1 < Y < y_2)$ (fig. 86).

Análogamente al caso anterior tenemos:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

donde, al calcular la integral $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$, se considera y como cantidad constante.

Si el recinto de integración no pertenece a ninguna de las formas anteriormente examinadas, se procura dividirlo en partes, de manera, que cada una de ellas corresponda a alguna de aquellas dos formas.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x+y)\,dy.$$

Solución

$$I=\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=1}dx=\int_0^1\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)\right]dx=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2. Determinar los límites de integración de la integral

$$\iint_{(S)} f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

si el recinto de integración S (fig. 87) está limitado por la hipérbola $y^2-x^2=1$ y por las dos rectas $x=2$ y $x=-2$ (se considera el recinto que comprende al origen de coordenadas).

Solución. El recinto de integración $ABCD$ (fig. 87) está limitado por las dos rectas $x=-2$ y $x=2$ y por las dos ramas de la hipérbola:

$$y=\sqrt{1+x^2}\quad\text{o}\quad y=-\sqrt{1+x^2},$$

es decir, pertenece a la primera forma. Tenemos:

$$\iint_{(S)} f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,\ y)\,dy.$$

Calcular las siguientes integrales reiteradas:

2113. $\displaystyle\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)\,dx.$

2114. $\displaystyle\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$

2115. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}.$

2116. $\displaystyle\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}.$

2117. $\displaystyle\int_{-3}^{3} dy\int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx.$

2118. $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}^{a} r\,dr.$

2119. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{3\cos\varphi} r^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,dr.$

2120. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy.$

Escribir las ecuaciones de las líneas que limitan los recintos a que se extienden las integrales dobles que se indican más abajo

y dibujar estos recintos:

2121. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\, dx.$

2122. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x, y)\, dy.$

2123. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{y}^{10-y} f(x, y)\, dx.$

2124. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)\, dy.$

2125. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2126. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x, y)\, dy.$

Colocar los límites de integración, en uno y otro orden, en la integral doble

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

para los recintos S que a continuación se indican.

2127. S es un rectángulo cuyos vértices son: $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(2; 1)$ y $C(0; 1)$.

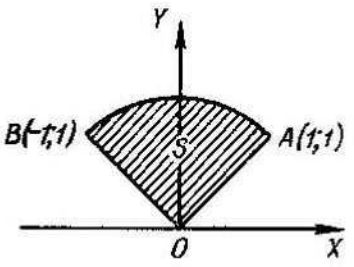

Fig. 88

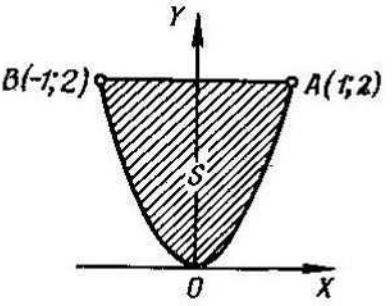

Fig 89

2128. S es un triángulo cuyos vértices son: $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ y $B(1; 1)$.

2129. S es un trapecio cuyos vértices son; $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(1; 1)$ y $C(0; 1)$.

2130. S es un paralelogramo cuyos vértices son: $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(2; 7)$ y $D(1; 5)$.

2131. S es un sector circular OAB con centro en el punto $O(0; 0)$, cuyo arco tiene sus extremos en $A(1; 1)$ y $B(-1; 1)$ (fig. 88).

2132. S es un segmento parabólico recto AOB, limitado por la parábola BOA y por el segmento de recta BA, que une entre sí los puntos $B(-1; 2)$ y $A(1; 2)$ (fig. 89).

2133. S es un anillo circular limitado por las circunferencias, cuyos radios son $r=1$ y $R=2$, y cuyo centro común está situado en el punto $O(0;\ 0)$.

2134. S está limitado por la hipérbola $y^2-x^2=1$ y por la circunferencia $x^2+y^2=9$ (se considera el recinto que comprende el origen de coordenadas).

2135. Colocar los límites de integración en la integral doble

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

si el recinto S está determinado por las desigualdades siguientes:

a) $x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ x+y\leqslant 1$;

b) $x^2+y^2\leqslant a^2$;

c) $x^2+y^2\leqslant x$;

d) $y\geqslant x;\ x\geqslant -1;\ y\leqslant 1$;

e) $y\leqslant x\leqslant y+2a$;

f) $0\leqslant y\leqslant a$.

Invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

2136. $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,\ y)\,dy.$

2137. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,\ y)\,dy.$

2138. $\displaystyle\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2139. $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2140. $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,\ y)\,dy.$

2141. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dx.$

2142. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$

2143. $\displaystyle\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,\ y)\,dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2144. $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x,\ y)\,dy.$

Calcular las siguientes integrales dobles:

2145. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$, donde S es un triángulo cuyos vértices son $O\,(0;\ 0)$, $A\,(1;\ 1)$ y $B\,(0;\ 1)$.

2146. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$, donde el recinto de integración S está limitado por la recta que pasa por los puntos $A\,(2;\ 0)$, $B\,(0;\ 2)$ y por

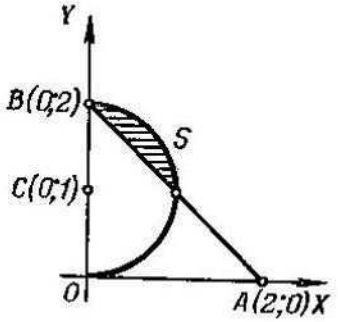

Fig. 90

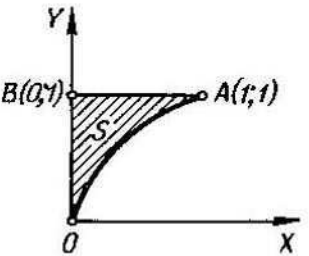

Fig. 91

el arco de circunferencia de radio 1 que tiene su centro en el punto $C\,(0;\ 1)$ (fig. 90).

2147. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, donde S es la parte del círculo de radio a, con centro en el punto $O\,(0;\ 0)$, situado en el primer cuadrante.

2148. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, donde S es un triángulo con los vértices en los puntos $O\,(0;\ 0)$, $A\,(1;\ -1)$ y $B\,(1;\ 1)$.

2149. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, donde S es un triángulo con los vértices en los puntos $O\,(0;\ 0)$, $A\,(10;\ 1)$ y $B\,(1;\ 1)$.

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, donde S es un triángulo mixtilíneo OAB, limitado por la parábola $y^2=x$ y por las rectas $x=0$ e $y=1$ (fig. 91).

2151. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, donde S es un segmento parabólico, limitado por la parábola $y=\frac{x^2}{2}$ y por la recta $y=x$.

2152. Calcular las siguientes integrales y dibujar los recintos a que se extienden:

a) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \operatorname{sen} x \, dy$; c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3\cos y} x^2 \operatorname{sen}^2 y \, dx$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 \, dy$;

Antes de resolver los problemas 2153—2157 se recomienda hacer los dibujos correspondientes.

2153. Calcular la integral doble

$$\iint_{(S)} xy^2 \, dx \, dy,$$

si S es un recinto limitado por la parábola $y^2 = 2px$ y por la recta $x = p$.

2154*. Calcular la integral doble

$$\iint_{(S)} xy \, dx \, dy,$$

que se extiende al recinto S, limitado por el eje OX y la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

2155. Calcular la integral doble

$$\iint_{(S)} \frac{dx \, dy}{\sqrt{2a-x}},$$

donde S es un círculo de radio a, tangente a los ejes de coordenadas y que se encuentra en el primer cuadrante.

2156*. Calcular la integral doble

$$\iint_{(S)} y \, dx \, dy,$$

donde el recinto S está limitado por el eje de abscisas y el arco de cicloide

$$\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{cases}$$

2157. Calcular la integral doble

$$\iint_{(S)} xy \, dx \, xy,$$

en la que el recinto de integración S está limitado por los ejes de coordenadas y por el arco de astroide

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\operatorname{sen}^3 t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2158. Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = xy^2$ en el recinto $S\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Indicación. Se da el nombre de *valor medio de una función* $f(x, y)$ en el recinto S al número

$$\bar{f} = \frac{1}{S} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy,$$

donde S, en el denominador, señala el área del recinto S.

2159. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia del punto $M(x, y)$ del círculo $(x-a)^2 + y^2 \leqslant R^2$, al origen de coordenadas.

§ 2. Cambio de variables en la integral doble

1°. Integral doble en coordenadas polares. Cuando en la integral doble se pasa de las coordenadas rectangulares x, y a las polares r, φ, relacionadas con las primeras por las expresiones

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi,$$

se verifica la fórmula

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\, r\, dr\, d\varphi. \tag{1}$$

Si el recinto de integración S está limitado por los rayos $r = \alpha$ y $r = \beta$ $(\alpha < \beta)$ y por las curvas $r = r_1(\varphi)$ y $r = r_2(\varphi)$, donde $r_1(\varphi)$ y $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ son funciones uniformes en el segmento $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, la integral doble se puede calcular por la fórmula

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi, r)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\, r\, dr,$$

donde $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)$. Al calcular la integral $\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\, r\, dr$, se considera constante la magnitud φ.

Si el recinto de integración no pertenece a la forma examinada, se divide en partes, de manera que cada una de ellas represente de por sí un recinto de la forma dada.

2°. Integral doble en coordenadas curvilíneas. En el caso más general, si en la integral doble

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

se quiere pasar de las variables x, y a las variables u, v, relacionadas con aquéllas por medio de las expresiones continuas y diferenciables

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v),$$

que establecen una correspondencia biunívoca y continua en ambos sentidos, entre los puntos del recinto S del plano XOY y los puntos de un recinto determinado R' del plano $UO'V$, al mismo tiempo que el *jacobiano*

$$I=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

conserva invariable su signo en el recinto S, será válida la fórmula

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S')} f[\varphi(x, v), \psi(u, v)]\,|I|\,du\,dv.$$

Los límites de esta nueva integral se determinan de acuerdo con las reglas generales, sobre la base de la forma que tenga el recinto S'.

Ejemplo 1. Calcular la siguiente integral pasando a coordenadas polares

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

donde el recinto S es un círculo de radio $R=1$ con centro en el origen de coordenadas (fig. 92).

Solución. Haciendo la sustitución $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$, obtenemos

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\operatorname{sen}\varphi)^2}=\sqrt{1-r^2}.$$

Como en el recinto S la coordenada r varía de 0 a 1, cualquiera que sea el valor de φ, mientras que φ varía de 0 a 2π, tenemos

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2}{3}\pi.$$

Pasar a las coordenadas polares r y φ y colocar los límites de integración para las nuevas variables en las siguientes integrales:

2160. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy.$ **2161.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

2162. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy,$

donde S es un triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=-x$ e $y=1$.

2163. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

2164. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$, donde el recinto S está limitado por la lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

2165. Calcular la siguiente integral doble, pasando previamente a coordenadas polares

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

donde S es un semicírculo de diámetro a con centro en el punto $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ (fig. 93).

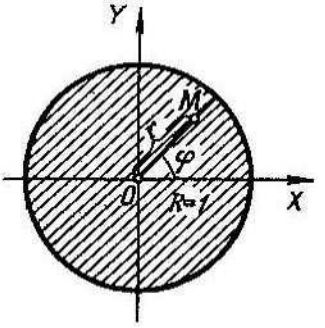

Fig. 92

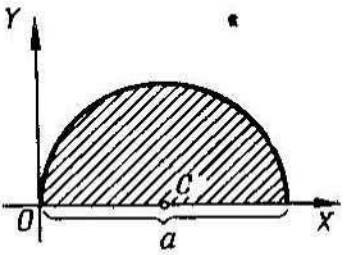

Fig. 93

2166. Pasando a coordenadas polares, calcular la siguiente integral doble,

$$\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

que se extiende al recinto limitado por la circunferencia

$$x^2+y^2 = 2ax.$$

2167. Calcular la siguiente integral doble, pasando a coordenadas polares,

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

donde el recinto de integración S es un semicírculo de radio a con centro en el origen de coordenadas, situado sobre el eje OX.

2168. Calcular la integral doble de la función $f(r, \varphi) = r$ sobre el recinto limitado por la cardiode $r = a(1+\cos\varphi)$ y la circunferencia $r = a$. (Se considera el recinto que no contiene el polo).

2169. Calcular la siguiente integral, pasando a coordenadas polares

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy.$$

2170. Calcular la siguiente integral, pasando a coordenadas polares

$$\iint_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

donde el recinto S está limitado por la hoja de lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

§ 3. Cálculo de áreas de figuras planas

1°. El área en coordenadas rectangulares. El *área* S *de un recinto plano* (S) es igual a

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy.$$

Si el recinto (S) está determinado por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, tendremos

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2°. El área en coordenadas polares. Si el recinto (S) está determinado, en coordenadas polares r y φ, por las desigualdades $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $f(\varphi) \leqslant r \leqslant F(\varphi)$, se tiene

$$S = \iint\limits_{(S)} r\, d\varphi\, dr = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} r\, dr.$$

2175. Construir los recintos cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales:

a) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy$; b) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$.

Calcular estas áreas y cambiar el orden de integración.

2176. Construir los recintos cuyas áreas se expresan por las integrales:

a) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_0^{3\sec\varphi} r\, dr$; b) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_a^{a(1+\cos\varphi)} r\, dr$.

Calcular estas áreas.

2177. Calcular el área limitada por las rectas $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$ y $x + 3y = a$ $(a > 0)$.

2178. Calcular el área de la figura situada sobre el eje OX y limitada por este eje, la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

2179*. Calcular el área limitada por la elipse

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

2180. Hallar el área limitada por las parábolas

$$y^2 = 10x + 25 \text{ e } y^2 = -6x + 9.$$

2181. Hallar el área limitada por las siguientes líneas, pasando a coordenadas polares,

$$x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ y = x,\ y = 0.$$

2182. Hallar el área limitada por la recta $r\cos\varphi = 1$ y la circunferencia $r = 2$. (Se considera la superficie que no contiene el polo).

2183. Hallar el área limitada por las curvas

$$r = a(1 + \cos\varphi) \text{ y } r = a\cos\varphi\ (a > 0).$$

2184. Hallar el área limitada por la línea

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

§ 4. Cálculo de volúmenes

El volumen V de un cilindroide, limitado por arriba por la superficie continua $z = f(x, y)$, por abajo por el plano $z = 0$ y lateralmente por la superficie cilíndrica recta que corta en el plano XOY el recinto S (fig. 94), es igual a

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2188. Expresar, por medio de una integral doble, el volumen de una pirámide cuyos vértices son: $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$ y $C(0; 0; 1)$ (fig. 95). Colocar los límites de integración.

En los problemas 2189—2192 hay que dibujar los cuerpos, cuyos volúmenes se expresan por las integrales dobles que se dan:

2189. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy$. 2191. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\,dy$.

2190. $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y)\,dy$. 2192. $\int_0^2 dx \int_{2-x}^{2} (4-x-y)\,dy$.

2193. Dibujar el cuerpo, cuyo volumen expresa la integral $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$, y basándose en razonamientos geométricos, hallar el valor de esta integral.

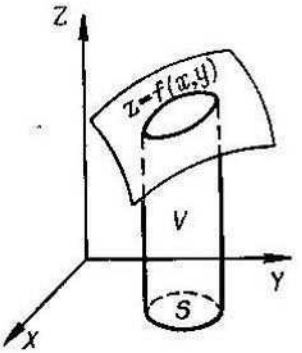

Fig. 94

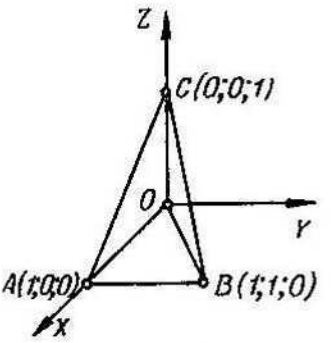

Fig. 95

2194. Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z=2x^2+y^2+1$, el plano $x+y=1$ y los planos coordenados.

2195. Un cuerpo está limitado por el paraboloide hiperbólico $z=x^2-y^2$ y los planos $y=0$, $z=0$, $x=1$. Calcular su volumen.

2196. Un cuerpo está limitado por el cilindro $x^2+z^2=a^2$ y los planos $y=0$, $z=0$, $y=x$. Calcular su volumen.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies siguientes:

2197. $az=y^2$, $x^2+y^2=r^2$, $z=0$.

2198. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$.

2199. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

2200. $x+y+z=a$, $3x+y=a$, $\frac{3}{2}x+y=a$, $y=0$, $z=0$.

2201. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$.

2202. $x^2+y^2=2ax$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(\alpha>\beta)$.

En los problemas 2203—2211 empléense coordenadas polares y generalizadas.

2203. Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=-a^2$.

2204. Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cono $2(x^2+y^2)-z^2=0$ y el hiperboloide

$$x^2+y^2-z^2=-a^2.$$

2205. Hallar el volumen limitado por las superficies $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$.

2206. Determinar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2207. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $2az=x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$. (Se sobreentiende el volumen situado dentro del paraboloide).

2208. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY, el cilindro $x^2+y^2=2ax$ y el cono $x^2+y^2=z^2$.

2209. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY, la superficie $z=ae^{-(x^2+y^2)}$ y el cilindro $x^2+y^2=R^2$.

2210. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY, el paraboloide $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{x}{a}$.

2211. ¿En qué razón divide el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=a^2$ al volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$?

2212*. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z=x+y$, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

§ 5. Cálculo de áreas de superficies

El *área* σ de una superficie regular $z=f(x, y)$, que tenga como proyección en el plano XOY un recinto S, es igual a

$$\sigma=\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

2213. Hallar el área de la parte del plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, comprendida entre los planos de coordenadas.

2214. Hallar el área de la parte de superficie del cilindro $z^2+y^2=R^2\,(z\geqslant 0)$, comprendida entre los planos $z=mx$ y $x=nx\,(m>n>0)$.

2215*. Calcular el área de la parte de superficie del cono $x^2-y^2=z^2$, situada en el primer octante y limitada por el plano $y+z=a$.

2216. Calcular el área de la parte de superficie del cilindro $x^2+y^2=ax$, cortada del mismo por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2217. Calcular el área de la parte de superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, cortada por la superficie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2218. Calcular el área de la parte de superficie del paraboloide $y^2+z^2=2ax$, comprendida entre el cilindro $y^2=ax$ y el plano $x=a$.

2219. Calcular el área de la parte de superficie del cilindro $x^2+y^2=2ax$, comprendida entre el plano XOY y el cono $x^2+y^2=z^2$.

2220*. Calcular el área de la parte de superficie del cono $x^2-y^2=z^2$, situada dentro del cilindro $x^2+y^2=2ax$.

2220.1*. Hallar el área de la parte del cilindro $y^2=4x$ cortada por la esfera $x^2+y^2+z^2=5x$.

2220.2. Hallar el área de la parte del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ cortada por el cilindro $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

2221*. Demostrar, que las áreas de las partes de las superficies de los paraboloides $x^2+y^2=2az$ y $x^2-y^2=2az$ cortadas por el cilindro $x^2+y^2=R^2$ son iguales.

2222*. Una esfera de radio a está cortada por dos cilindros circulares, cuyas bases tienen los diámetros iguales al radio de aquélla, y que son tangentes entre sí a lo largo de uno de los diámetros de la misma. Hallar el volumen y el área de la parte de superficie de la esfera que queda.

2223*. En una esfera de radio a se ha cortado un orificio, con salida, de base cuadrada, cuyo lado también es igual a a. El eje de este orificio coincide con el diámetro de la esfera. Hallar el área de la superficie de ésta cortada por el orificio.

2224*. Calcular el área de la parte de superficie helicoidal $z=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, situada en el primer octante y que está comprendida entre los cilindros $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=b^2$.

§ 6. Aplicaciones de la integral doble a la mecánica

1°. Masa y momentos estáticos de las láminas. Si S es un recinto del plano XOY, ocupado por una lámina, y $\rho(x, y)$ es la densidad superficial de dicha lámina en el punto $(x; y)$, la masa M de ésta y sus momentos estáticos M_X y M_Y con respecto a los ejes OX y OY se expresan

por las integrales dobles

$$M=\iint\limits_{(S)}\rho(x, y)\,dx\,dy, \quad M_X=\iint\limits_{(S)}y\rho(x, y)\,dx\,dy,$$

$$M_Y=\iint\limits_{(S)}x\rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Si la lámina es homogénea, $\rho(x, y)=\text{const}$.

2°. Coordenadas del centro de gravedad de las láminas. Si $C(\overline{x}, \overline{y})$ es el centro de gravedad de una lámina, se tiene,

$$\overline{x}=\frac{M_Y}{M}, \quad \overline{y}=\frac{M_X}{M},$$

donde M es la masa de la lámina y M_X, M_Y sus momentos estáticos con respecto a los ejes de coordenadas (véase 1°). Si la lámina es homogénea, en las fórmulas (1) se puede poner $\rho=1$.

3°. Momentos de inercia de las láminas. Los momentos de inercia de una lámina, con respecto a los ejes OX y OY, son iguales respectivamente a

$$I_X=\iint\limits_{(S)}y^2\rho(x, y)\,dx\,dy, \quad I_Y=\iint\limits_{(S)}x^2\rho(x, y)\,dx\,dy \tag{2}$$

El momento de inercia de la lámina con respecto al origen de coordenadas

$$I_0=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\rho(x, y)\,dx\,dy=I_X+I_Y \tag{3}$$

Poniendo $\rho(x, y)=1$, en las fórmulas (2) y (3), obtenemos los momentos geométricos de inercia de las figuras planas.

2225. Hallar la masa de una lámina circular de radio R, si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al centro e igual a δ en el borde de la lámina.

2226. Una lámina tiene la forma de triángulo rectángulo con catetos $OB=a$ y $OA=b$; su densidad en cualquier punto es igual a la distancia desde éste al cateto OA. Hallar los momentos estáticos de la lámina con respecto a los catetos OA y OB.

2227. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura $OmAnO$ (fig. 96), limitada por la curva $y=\operatorname{sen} x$ y por la recta OA, que pasa por el origen de coordenadas y por el vértice $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ de la sinusoide.

2228. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r=a(1+\cos\varphi)$.

2229. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a, cuyo ángulo central es igual a 2α (fig. 97).

2230. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2=4x+4$ e $y^2=-2x+4$.

2231. Calcular el momento de inercia del triángulo limitado por las rectas $x+y=2$, $x=2$ e $y=2$, con respecto al eje OX.

2232. Hallar el momento de inercia de un anillo circular de diámetros d y D $(d<D)$: a) con respecto a su propio centro y b) con respecto a su diámetro.

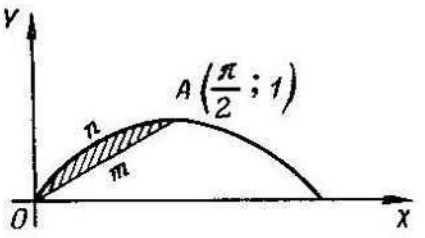

Fig 96.

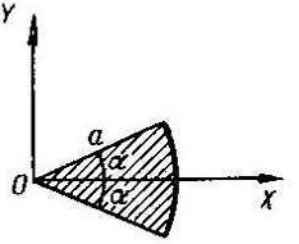

Fig. 97

2233. Calcular el momento de inercia de un cuadrado de lado a, con respecto al eje que, pasando por uno de sus vértices, es perpendicular al plano del cuadrado.

2234*. Calcular el momento de inercia del segmento interceptado de la parábola $y^2=ax$ por la recta $x=a$, con respecto a la recta $y^2=-a$.

2235*. Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy=4$ y la recta $x+y=5$, con respecto a la recta $x=y$.

2236*. En una lámina cuadrada de lado a, la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices. Calcular el momento de inercia de dicha lámina con respecto a los lados que pasan por éste vértice.

2237. Hallar el momento de inercia de la cardioide $r=a(1+\cos\varphi)$, con respecto al polo.

2238. Calcular el momento de inercia de la superficie de la lemniscata $r^2=2a^2\cos 2\varphi$, con respecto al eje, perpendicular al plano de la misma, que pasa por el polo.

2239*. Calcular el momento de inercia de una lámina homogénea limitada por un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ y el eje OX, con respecto al eje OX.

§ 7. Integrales triples

1°. La integral triple en coordenadas rectangulares. Se llama integral triple de una función $f(x, y, z)$, sobre un recinto V, al

límite de la correspondiente suma triple

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

El cálculo de la integral triple se reduce a calcular sucesivamente tres integrales ordinarias (simples) o a calcular una doble y una simple.

Ejemplo 1. Calcular

$$I = \iiint\limits_{V} x^3 y^2 z\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V se determina por las desigualdades

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x, \quad 0 \leqslant z \leqslant xy.$$

Solución. Tenemos:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^3 y^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5 y^4}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2} \frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{1}{110}.$$

Ejemplo 2. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz,$$

extendida al volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} x^2\,dx \iint\limits_{(S_{yz})} dy\,dz = \int_{-a}^{a} x^2 S_{yz}\,dx,$$

donde S_{yz} es el área de la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, $x = \text{const}$, igual a

$$S_{yz} = \pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Por esto, en definitiva, tenemos:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \pi bc \int_{-a}^{a} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

2°. Cambio de variables en la integral triple. Si en la integral triple

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

hay que pasar de las variables x, y, z, a las variables u, v, w, relacionadas con las primeras por las igualdades $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, donde las funciones φ, ψ, χ:

1) son continuas, junto con sus derivadas parciales de 1° orden.

2) establecen una correspondencia biunívoca continua en ambos sentidos, entre los puntos del recinto de integración V del espacio $OXYZ$ y los puntos de un recinto determinado V' del espacio $O'UVW$ y

3) el determinante funcional (jacobiano) de estas funciones

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

conserva invariable su signo en el recinto V, entonces, será válida la fórmula

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]\, |J|\, du\, dv\, dw.$$

En particular,

1) para las coordenadas cilíndricas , r, φ, h (fig. 98), donde

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi, \quad z = h,$$

obtenemos que, $J = r$;

2) para las coordenadas esféricas φ, ψ, r (φ es la longitud; ψ, la latitud y r el radio vector) (fig. 99), donde

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi,$$

$$z = r\operatorname{sen}\psi,$$

tenemos $J = r^2\cos\psi$.

Ejemplo 3. Calcular la siguiente integral, pasándola a las coordenadas esféricas,

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

donde V es una esfera de radio R.

Solución. Para la esfera, los límites de variación de las coordenadas esféricas φ (longitud), ψ (latitud) y r (radio vector), serán:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Por esto, tendremos:

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r r^2 \cos\psi\, dr = \pi R^4.$$

3°. Aplicaciones de las integrales triples. El *volumen* de un recinto del espacio tridimensional $OXYZ$ es igual a

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz.$$

La *masa* de un cuerpo que ocupa el recinto V,

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo en el punto (x, y, z).

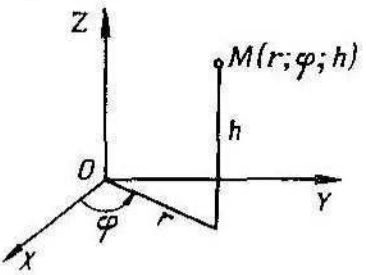

Fig. 98

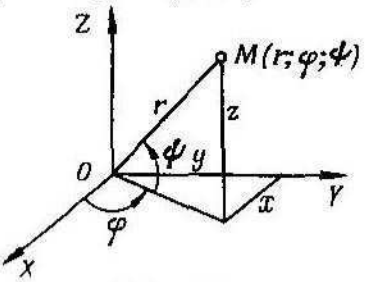

Fig. 99

Los *momentos estáticos* de un cuerpo, con respecto a los planos coordenados son:

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz.$$

Las *coordenadas del centro de gravedad*

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Si el cuerpo es homogéneo, en las fórmulas para determinar las coordenadas del centro de gravedad se puede poner $\gamma(x, y, z) = 1$.

Los *momentos de inercia*, con respecto a los ejes coordenados son:

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Poniendo en estas fórmulas $\gamma(x, y, z) = 1$, obtenemos los momentos geométricos de inercia del cuerpo.

A. Cálculo de las integrales triples

Calcular los límites de integración en la integral triple

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

para los recintos V que se indican a continuación:

2240. V es un tetraedro limitado por los planos

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

2241. V es un cilindro limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0, \quad z = H.$$

2242*. V es un cono limitado por las superficies

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$$

2243. V es un volumen limitado por las superficies

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

Calcular las siguientes integrales:

2244. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

2245. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\, dz$.

2246. $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz\, dz$.

2248. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3},$$

donde V es el recinto de integración, que está limitado por los planos de coordenadas y por el plano $x + y + z = 1$.

2249. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte común del paraboloide $2az \geqslant x^2+y^2$ y de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$.

2250. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte común de las esferas $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ y $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2251. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es el volumen limitado por el plano $z=0$ y por la mitad superior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2252. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte interna del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2253. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es el recinto limitado por el cono $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ y por el plano $z=h$.

2254. Calcular la siguiente integral, pasando a coordenadas cilíndricas,

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

donde V es el recinto limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ y que contiene el punto $(0, 0, R)$.

2255. Calcular

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

transformándola previamente a las coordenadas cilíndricas.

2256. Calcular

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz,$$

transformándola previamente a las coordenadas cilíndricas.

2257. Calcular

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz,$$

tranformándola previamente a las coordenadas esféricas.

2258. Calcular la integral siguiente, pasando a las coordenadas esféricas

$$\iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte interna de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

B. *Cálculo de volúmenes por medio de integrales triples*

2259. Calcular, por medio de una integral triple, el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$y^2 = 4a^2 - 3ax, \quad y^2 = ax, \quad z = \pm h.$$

2260.** Calcular el volumen de la parte del cilindro $x^2+y^2 = 2ax$, comprendido entre el paraboloide $x^2+y^2=2az$ y el plano XOY.

2261*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cono $z^2=x^2+y^2$ (la parte exterior con respecto al cono).

2262*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el paraboloide $x^2+y^2=3z$ (la parte interior con respecto al paraboloide).

2263. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el plano XOY, el cilindro $x^2+y^2=ax$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ (interno con respecto al cilindro).

2264. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$ y el plano $x=a$.

2264. 1. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

2264. 2. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (z\geqslant 0).$$

C. Aplicaciones de las integrales triples a la mecánica y a la física

2265. Hallar la masa M del paralelepípedo rectangular $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$, si la densidad en el punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z)=x+y+z$.

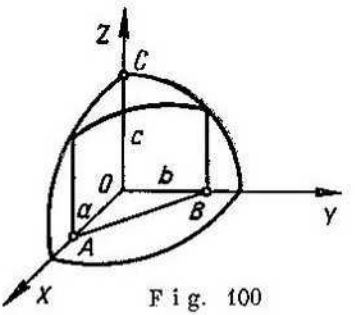

Fig. 100

2266. Del octante de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant c^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, se ha cortado el cuerpo $OABC$, limitado por los planos de coordenadas y por el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\leqslant c,\ b\leqslant c)$ (fig. 100). Hallar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x, y, z) es igual a la cota z del mismo.

2267*. En el cuerpo de forma semiesférica $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$, $z\geqslant 0$, la densidad varía proporcionalmente a la distancia desde el punto al centro. Hallar el centro de gravedad de este cuerpo.

2268. Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloide $y^2+2z^2=4x$ y por el plano $x=2$.

2269*. Hallar el momento de inercia del cilindro circular, que tiene por altura h y por radio de la base a, con respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.

2270*. Hallar el momento de inercia del cono circular, que tiene por altura h, por radio de la base a y de densidad ρ, con respecto al diámetro de su base.

2271.** Hallar la atracción que ejerce el cono homogéneo, de altura h y ángulo en el vértice α (en la sección axial), sobre un punto material, que tenga una unidad de masa y que esté situado en su vértice.

2272**. Demostrar, que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varía, si toda la masa de la esfera se concentra en su centro.

§ 9. Integrales curvilíneas

1° Integrales curvilíneas de primer tipo. Sea $f(x, y)$ una función continua e $y=\varphi(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ la ecuación de una curva plana determinada C.

Marcamos un sistema de puntos $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, que dividan la curva C en arcos elementales $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}=\Delta s_i$, y formamos la suma integral $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i$. El límite de esta suma, cuando $n \to \infty$ y máx $\Delta s_i \to 0$ recibe el nombre de *integral curvilínea de primer tipo*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i = \int_C f(x, y)\,ds$$

(ds es la diferencial del arco) y se calcula por la fórmula

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\,\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx.$$

En el caso de que la curva C esté dada en forma paramétrica: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $[\alpha \leqslant t \leqslant \beta]$, tenemos:

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\,\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Se consideran también integrales curvilíneas de primer tipo de funciones de tres variables $f(x, y, z)$, tomadas sobre una curva en el espacio, que se calculan análogamente. La integral curvilínea de primer tipo *no depende*

del sentido del camino de integración. Si la función subintegral f se interpreta como la densidad lineal de la curva de integración C, esta integral representará de por sí la *masa de la curva C.*

Ejemplo 1. Calcular la integral curvilínea

$$\int_C (x+y)\,ds,$$

donde C es el contorno del triángulo ABO, cuyos vértices son: $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ y $O(0; 0)$ (fig. 101).

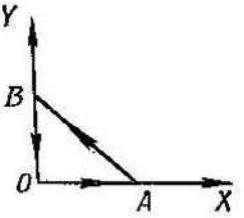

Fig. 101

Solución. Aquí, la ecuación de AB es: $y=1-x$, la de OB: $x=0$ y la de OA: $y=0$.
Por lo tanto, tendremos:

$$\int_C (x+y)\,ds = \int_{AB} (x+y)\,ds + \int_{BO} (x+y)\,ds + \int_{OA} (x+y)\,ds =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int_1^0 y\,dy + \int_0^1 x\,dx = \sqrt{2}+1.$$

2°. Integrales curvilíneas de segundo tipo. Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas e $y=\varphi(x)$ es una curva plana C, que se recorre al variar x desde a hasta b, la correspondiente *integral curvilínea de segundo tipo* se expresa de la forma siguiente

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\,Q(x, \varphi(x))]\,dx.$$

En el caso más general, cuando la curva C se da en la forma paramétrica: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, donde t varía entre α y β, tenemos:

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt.$$

Fórmulas análogas son válidas para la integral curvilínea de segundo tipo tomada sobre una curva en el espacio.

La integral curvilínea de segundo tipo cambia su signo por el contrario, al cambiar el sentido del camino de integración. Mecánicamente, esta integral puede interpretarse como el trabajo de la correspondiente fuerza variable $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ a lo largo de la curva de integración C.

Ejemplo 2. Calcular la integral curvilínea

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy,$$

donde C es la mitad superior de la elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$, que se recorre en el sentido de las agujas del reloj.

Solución. Tenemos

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_{\pi}^{0} [b^2 \operatorname{sen}^2 t \cdot (-a\operatorname{sen} t) + a^2 \cos^2 t \cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= -ab^2 \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^3 t\,dt + a^2 b \int_{\pi}^{0} \cos^3 t\,dt \frac{4}{3} ab^2.$$

3°. Caso de diferencial exacta. Si la expresión subintegral de la integral curvilínea de segundo tipo es la diferencial exacta de una función uniforme determinada $U = U(x, y)$, es decir, $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y)$, esta integral curvilínea no depende del camino de integración y se cumple la fórmula de Newton-Leibniz

$$\int_{(x_1;\, y_1)}^{(x_2;\, y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \tag{1}$$

donde $(x_1; y_1)$ es el punto inicial y $(x_2; y_2)$, el punto final del camino. En particular, si el contorno de integración C es cerrado, se tiene

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Si, 1) el contorno de integración C está comprendido totalmente en un determinado recinto simplemente conexo S y 2) las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, junto con sus derivadas parciales de 1° orden, son continuas en el recinto S, la condición necesaria y suficiente para la existencia de la función U es que se verifique idénticamente en todo el recinto S la igualdad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3}$$

(véase integración de diferenciales exactas). Si no se cumplen las condiciones 1) y 2), la subsistencia de la condición (3) no garantiza la existencia de la función uniforme U y las fórmulas (1) y (2) pueden resultar ser erróneas (véase el problema 2332). Señalemos un procedimiento para hallar

la función $U(x, y)$ por medio de su diferencial total, basado en el empleo de las integrales curvilíneas (es decir, un procedimiento más de integración de la diferencial exacta). Como contorno de integración C se toma la línea

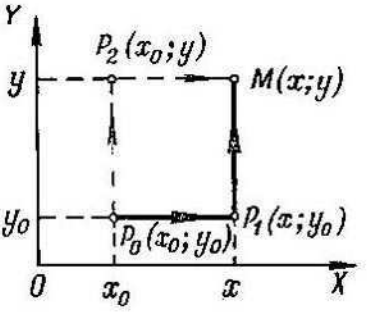

Fig. 102

quebrada P_0P_1M (fig. 102), donde $P_0(x_0; y_0)$ es un punto fijo, $M(x; y)$ un punto variable. En este caso, a lo largo de P_0P_1, tenemos que $y = y_0$ y $dy = 0$, mientras que a lo largo de P_1M, tenemos que $dx = 0$. Obtenemos:

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

Análogamente, integrando sobre la línea quebrada P_0P_2M, tenemos:

$$U(x, y) - U(x_0, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx.$$

Ejemplo 3. $(4x + 2y)\,dx + (2x - 6y)\,dy = dU$. Hallar U.

Solución. Aquí, $P(x, y) = 4x + 2y$ y $Q(x, y) = 2x - 6y$; al mismo tiempo que, evidentemente, se cumple la condición (3). Sean $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Entonces,

$$U(x, y) = \int_0^x 4x\,dx + \int_0^y (2x - 6y)\,dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C,$$

o bien,

$$U(x, y) = \int_0^y -6y\,dy + \int_0^x (4x + 2y)\,dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

donde $C = U(0; 0)$ es una constante arbitraria.

4°. Fórmula de Green para el plano. Si C es la frontera del recinto S y las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas, junto con sus derivadas parciales de 1° orden, en el recinto cerrado $S+C$, se verifica la *fórmula de Green*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

donde el sentido del recorrido del contorno C se elige de forma que el recinto S quede a la izquierda.

5°. Aplicaciones de las integrales curvilíneas. 1) El *área* limitada por un contorno cerrado C, es igual a

$$S=-\oint_C y\,dx=\oint_C x\,dy$$

(el sentido del recorrido del contorno debe elegirse contrario al movimiento de las agujas del reloj).

Más útil para las aplicaciones es la siguiente fórmula

$$S=\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\oint_C x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) El *trabajo de una fuerza*, cuyas proyecciones sean $X=X(x, y, z)$, $Y=Y(x, y, z)$, $Z=Z(x, y, z)$ (o correspondientemente, el trabajo de un campo de fuerzas), a lo largo del camino C, se expresa por la integral

$$A=\int_C X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Si la fuerza tiene potencial, es decir, si existe una función $U=U(x, y, z)$ (función potencial o de fuerza) tal, que

$$\frac{\partial U}{\partial x}=X,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=Z,$$

el trabajo, independientemente de la forma del camino C, es igual a

$$A=\int_{(x_1;\,y_1;\,z_1)}^{(x_2;\,y_2;\,z_2)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\int_{(x_1;\,y_1;\,z_1)}^{(x_2;\,y_2;\,z_2)} dU=U(x_2, y_2, z_2)-U(x_1, y_1, z_1),$$

donde (x_1, y_1, z_1) es el punto inicial y (x_2, y_2, z_2) el punto final del camino.

A. Integrales curvilíneas de primer tipo

Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

2293. $\int_C xy\,ds$, donde C es el contorno del cuadrado $|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

2294. $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, donde C es un segmento de recta que une entre sí los puntos $O(0; 0)$ y $A(1; 2)$.

2295. $\int\limits_C xy\,ds$, donde C es el cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, situado en el primer cuadrante.

2296. $\int\limits_C y^2\,ds$, donde C es el primer arco de la cicloide $x=a\,(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a\,(1-\cos t)$.

2297. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, donde C es el arco de la evolvente de la circunferencia $x=a\,(\cos t+t\operatorname{sen} t)$, $y=a\,(\operatorname{sen} t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$.

2298. $\int\limits_C (x^2+y^2)^2\,ds$, donde C es el arco de la espiral logarítmica $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ desde el punto $A\,(0;\,a)$ hasta el punto $O\,(-\infty;\,0)$.

2299. $\int\limits_C (x+y)\,ds$, donde C es el lazo derecho de la lemniscata $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

2300. $\int\limits_C (x+z)\,ds$, donde C es un arco de la curva $x=t$, $y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$ $[0\leqslant t\leqslant 1]$.

2301. $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, donde C es la primera espira de la hélice circular $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=bt$.

2302. $\int\limits_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, donde C es el círculo $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

2303*. Hallar el área de la superficie lateral del cilindro parabólico $y=\frac{3}{8}x^2$, limitada por los planos $z=0$, $x=0$, $z=x$, $y=6$.

2304. Hallar la longitud del arco de hélice cónica C, $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\operatorname{sen} t$, $z=ae^t$, desde el punto $O\,(0;\,0;\,0)$ hasta el punto $A\,(a;\,0;\,a)$.

2305. Determinar la masa del contorno de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si su densidad lineal en cada punto $M\,(x,\,y)$ es igual a $|y|$.

2306. Hallar la masa de la primera espira de la hélice circular $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=bt$, si la densidad en cada punto es igual al radio vector del mismo.

2307. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del semiarco de la cicloide

$$x=a\,(t-\operatorname{sen} t),\quad y=a\,(1-\cos t)\ [0\leqslant t\leqslant \pi].$$

2308. Hallar el momento de inercia, con respesto al eje OZ, de la primera espira de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = bt$.

2309. ¿Con qué fuerza influye la masa M, distribuida con densidad constante por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, sobre la masa m, situada en el punto $A(0; 0; b)$?

B. Integrales curvilíneas de segundo tipo.

Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

2310. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$, donde AB es el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde el punto $A(1; 1)$ hasta el punto $B(2; 4)$.

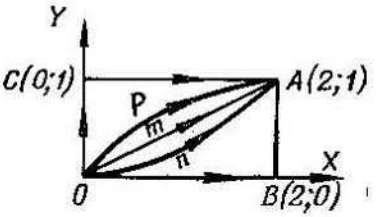

Fig. 103

2311. $\int\limits_{C} (2a - y)\,dx + x\,dy$, donde C es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ recorrido en el sentido del crecimiento del parámetro t.

2312. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2\,dy$, tomándola a lo largo de los diferentes caminos, que parten del origen de coordenadas $O(0; 0)$ y que finalizan en el punto $A(2; 1)$ (fig. 103):

a) sobre la recta OmA;
b) sobre la parábola OnA, cuyo eje de simetría es el eje OY;
c) sobre la parábola OpA, cuyo eje de simetría es el eje OX;
d) sobre la línea quebrada OBA;
e) sobre la línea quebrada OCA.

2313. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy$, en las mismas condiciones que el problema 2312.

2314*. $\oint \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, tomándola a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

2315. $\int_C y^2\,dx+x^2\,dy$, donde C es la mitad superior de la elipse $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$, que se sigue en el sentido de las agujas del reloj.

2316. $\int_{AB} \cos y\,dx-\operatorname{sen} x\,dy$, tomándola a lo largo del segmento AB de la bisectriz del segundo ángulo coordenado, si la abscisa del punto A es igual a 2 y la ordenada del punto B igual a 2.

2317. $\oint_C \frac{xy\,(y\,dx-x\,dy)}{x^2+y^2}$, donde C es el lazo derecho de la lemniscata $r^2=a^2\cos 2\varphi$, que se sigue en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

2318. Calcular las integrales curvilíneas de las expresiones diferenciales exactas siguientes:

a) $\int_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy+y\,dx$, b) $\int_{(0;\,1)}^{(3;\,4)} x\,dx+y\,dy$, c) $\int_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} (x+y)\,(dx+dy)$,

d) $\int_{(1;\,2)}^{(2;\,1)} \frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$ (por un camino que no corte al eje OX),

e) $\int_{\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)}^{(x;\,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$ (por un camino que no corte a la recta $x+y=0$),

f) $\int_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$.

2319. Hallar las funciones primitivas de las expresiones subintegrales y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)} (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$,

b) $\int_{(0;\,-1)}^{(1;\,0)} \frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ (el camino de integración no se corta con la recta $y=x$),

c) $\int\limits_{(1;\,1)}^{(3;\,1)} \frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$ (el camino de integración no se corta con la recta $y=-x$),

d) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy.$

2320. Calcular la integral

$$I=\int \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

tomándola en el sentido de las agujas del reloj, a lo largo del cuarto de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, que se encuentra en el primer cuadrante.

2321. Demostrar, que si $f(u)$ es una función continua y C es un contorno cerrado «regular a trozos», la

$$\oint_C f(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)=0.$$

2322. Hallar la función primitiva U, si:

a) $du=(2x+3y)\,dx+(3x-4y)\,dy$;

b) $du=(3x^2-2xy+y^2)\,dx-(x^2-2xy+3y^2)\,dy$;

c) $du=e^{x-y}[(1+x+y)\,dx+(1-x-y)\,dy]$;

d) $du=\frac{dx}{x+y}+\frac{dy}{x+y}$.

Calcular las siguientes integrales curvilíneas, tomadas a lo largo de curvas en el espacio:

2323. $\int\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, donde C es una espira de la hélice circular

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\,\mathrm{sen}\,t, \\ z=bt, \end{cases}$$

correspondientes a la variación del parámetro t desde 0 a 2π.

2324. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la circunferencia

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\cos t, \\ y = R\cos\alpha\,\operatorname{sen} t, \\ z = R\operatorname{sen}\alpha\ (\alpha = \text{const}), \end{cases}$$

recorrida en el sentido del crecimiento del parámetro.

2325. $\int_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, donde OA es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, situado por el lado del plano XOZ, donde $y > 0$.

2326. Calcular las integrales curvilíneas de las diferenciales exactas siguientes:

a) $\int_{(1;\,0;\,-3)}^{(6;\,4;\,8)} x\,dx + y\,dy - z\,dz$,

b) $\int_{(1;\,1;\,1)}^{(a;\,b;\,c)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$,

c) $\int_{(0;\,0;\,0)}^{(3;\,4;\,5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

d) $\int_{(1;\,1;\,1)}^{\left(x;\,y;\,\frac{1}{xy}\right)} \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$ (el camino de integración está situado en el primer octante).

B. Fórmula de Green

2327. Valiéndose de la fórmula de Green, transformar la integral curvilínea

$$I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right] dy,$$

donde el contorno C limita un recinto S.

2328. Aplicando la fórmula de Green, calcular

$$I = \oint_\delta 2\,(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy,$$

donde C es el contorno de un triángulo, cuyos vértices están en los puntos $A(1; 1)$, $B(2; 2)$ y $C(1; 3)$ y que se recorre en sentido positivo. Comprobar el resultado obtenido, calculando la integral directamente.

2329. Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral

$$\oint_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, que se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

2330. Por los puntos $A(1; 0)$ y $B(2; 3)$ se ha trazado una parábola AmB, cuyo eje coincide con el eje OY, y su cuerda es AnB. Hallar la

$$\oint_{AmBnA} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$$

directamente, aplicando la fórmula de Green.

2331. Hallar la $\int_{AmB} e^{xy}[y^2\,dx + (1+xy)\,dy]$, si los puntos A y B están situados en el eje OX y el área, limitada por el camino de integración AmB y por el segmento AB, es igual a S.

2332*. Calcular la $\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Examinar dos casos:

a) cuando el origen de coordenadas está fuera del contorno C,
b) cuando el contorno rodea n veces el origen de coordenadas.

2333**. Demostrar que si C es una curva cerrada, entonces

$$\oint_C \cos(X, n)\,ds = 0,$$

donde s es la longitud del arco y n la normal exterior.

2334. Valiéndose de la fórmula de Green, hallar la integral

$$I = \oint_C [x\cos(X, n) + y\,\mathrm{sen}\,(X, n)]\,ds,$$

donde ds es la diferencial del arco y n, la normal exterior al contorno C.

2335*. Calcular la integral

$$\oint_C \frac{dx - dy}{x+y},$$

tomada a lo largo del contorno del cuadrado que tiene sus vértices en los puntos $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ y $D(0; -1)$, con la condición de que el recorrido del contorno se haga en sentido contrario al de las agujas del reloj.

D. Aplicaciones de la integral curvilínea

Calcular el área de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

2336. Por la elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$.

2337. Por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$.

2338. Por la cardioide $x = a(2\cos t - \cos 2t)$,

$$y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t).$$

2339*. Por el lazo del folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0\ (a > 0)$.

2340. Por la curva $(x + y)^3 = axy$.

2341*. Una circunferencia de radio r rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija, de radio R, conservándose siempre fuera de ella. Suponiendo que $\frac{R}{r}$ sea un número entero, hallar el área limitada por la curva (epicicloide) que describe cualquiera de los puntos de la circunferencia móvil. Analizar el caso particular en que $r = R$ (cardioide).

2342*. Una circunferencia de radio r rueda sin resbalar por otra circunferencia fija, de radio R, permaneciendo siempre dentro de ella. Suponiendo que $\frac{R}{r}$ sea un número entero, hallar el área limitada por la curva (hipocicloide) descrita por cualquiera de los puntos de la circunferencia móvil. Analizar el caso particular en que $r = \frac{R}{4}$ (astroide).

2343. Un campo está engendrado por una fuerza de magnitud constante F, que tiene la dirección del semieje positivo OX. Hallar el trabajo de dicho campo, cuando un punto material describe, en el sentido de las agujas del reloj, el cuarto del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ que se encuentra en el primer cuadrante.

2344. Hallar el trabajo que realiza la fuerza de gravedad al trasladar un punto material de masa m, desde la posición $A(x_1; y_1; z_1)$ hasta la posición $B(x_2; y_2; z_2)$ (el eje OZ está dirigido verticalmente hacia arriba).

2345. Hallar el trabajo de una fuerza elástica, dirigida hacia el origen de coordenadas, cuya magnitud es proporcional al alejamiento del punto respecto al origen de coordenadas, si el punto de aplicación de dicha fuerza describe, en sentido contrario al de

las agujas del reloj, el cuarto de elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ situado en el primer cuadrante.

2346. Hallar la función potencial de la fuerza $R\{X, Y, Z\}$ y determinar el trabajo de dicha fuerza en el trozo de camino que se da, si:

a) $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg$ (fuerza de gravedad) y el punto material se desplaza desde la posición $A(x_1, y_1, z_1)$ a la posición $B(x_2, y_2, z_2)$;

b) $X=-\frac{\mu x}{r^3}$, $Y=-\frac{\mu y}{r^3}$, $Z=-\frac{\mu z}{r^3}$, donde $\mu=\text{const}$ y $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (fuerza de atracción de Newton) y el punto material se desplaza desde la posición $A(a, b, c)$ hasta el infinito;

c) $X=-k^2x$, $Y=-k^2y$, $Z=-k^2z$, donde $k=\text{const}$ (fuerza elástica), estando el punto inicial del camino en la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y el final en la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(R>r)$.

§ 10. Integrales de superficie

1. Integrales de superficie de primer tipo. Sea $f(x, y, z)$ una función continua y $z=\varphi(x, y)$ una superficie regular S.

La *integral de superficie de primer tipo* representa de por sí el límite de la suma integral

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i,$$

donde ΔS_i es el área de un elemento i de la superficie S, al que pertenece el punto (x_i, y_i, z_i); el diámetro máximo de estos elementos en que se divide la superficie tiende a cero.

El valor de esta integral no depende del lado de la superficie S que se elija para la integración.

Si la proyección σ de la superficie S sobre el plano XOY es uniforme, es decir, que cualquier recta paralela al eje OZ corta a la superficie S en un solo punto, la correspondiente integral de superficie de primer tipo se puede calcular por la fórmula

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS=\iint_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1+\varphi_x'^2(x, y)+\varphi_y'^2(x, y)}\,dx\,dy.$$

Ejemplo 1. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S (x+y+z)\,dS,$$

donde S es la superficie del cubo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

Calculamos la suma de las integrales de superficie tomadas sobre la cara superior del cubo $(z=1)$ y sobre la cara inferior del mismo $(z=0)$

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y+1)\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)\,dx\,dy=3.$$

Es evidente, que la integral de superficie que se busca será tres veces mayor e igual a

$$\iint_S (x+y+z)\,dS=9.$$

2°. Integral de superficie de segundo tipo. Si $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ y $R=R(x, y, z)$ son funciones continuas y S^+ es la cara de una superficie regular S que se caracteriza por la dirección de la normal $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, la correspondiente *integral de superficie de segundo tipo* se expresa de la forma siguiente:

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS.$$

Al pasar a la otra cara S^- de la superficie, esta integral cambia su signo por el contrario.

Si la superficie S está dada de forma implícita, $F(x, y, z)=0$, los cosenos directores de la normal a esta superficie se determinan por las fórmulas

$$\cos\alpha=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x},\quad \cos\beta=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y},\quad \cos\gamma=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

donde

$$D=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

y el signo que se ponga delante del radical dede elegirse de acuerdo con la cara de la superficie S que se tome.

3°. Fórmula de Stockes. Si las funciones $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ y $R=R(x, y, z)$ tienen derivadas continuas y C es un contorno cerrado, que limita una superficie bilateral S, se verifica la *fórmula de Stockes*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, son los cosenos directores de la normal a la superficie S, debiendo determinarse la dirección de la normal de tal forma que, desde ésta, el recorrido del contorno C se efectúe en sentido contrario al que siguen las agujas del reloj (en un sistema de coordenadas de mano derecha).

Calcular las siguientes integrales de superficie de primer tipo:

2347. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2348. $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, donde S es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ $[0\leqslant z\leqslant b]$.

Calcular las siguientes integrales de superficie de segundo tipo:

2349. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del tetraedro limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

2350. $\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2351. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la superficie de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$.

2352. Hallar la masa de la superficie del cubo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, si la densidad superficial en el punto $M(x; y; z)$ es igual a xyz.

2353. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cápsula parabólica homogénea $az=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant a)$.

2354. Hallar el momento de inercia de la parte de superficie lateral del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $[0\leqslant z\leqslant h]$ con respecto al eje OZ.

2355. Valiéndose de la fórmula de Stockes, transformar las integrales:

a) $\oint\limits_C (x^2-yz)\,dx + (y^2-zx)\,dy + (z^2-xy)\,dz$;

b) $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$.

Aplicando la fórmula de Stockes, hallar las integrales que se dan a continuación y comprobar los resultados calculándolas directamente:

2356. $\oint\limits_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

2357. $\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, donde C es la elipse

$$x^2+y^2=1,\quad x+z=1.$$

2358. $\oint\limits_C x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, donde C es la curva $x=a\operatorname{sen} t$, $y=a\cos t$, $z=a\ (\operatorname{sen} t+\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$.

2359. $\oint\limits_{ABCA} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, donde $ABCA$ es el contorno del $\Delta\ ABC$ con los vértices en los puntos $A\,(a;\ 0;\ 0)$, $B\,(0;\ a;\ 0)$ y $C\,(0;\ 0;\ a)$.

2360. ¿En qué caso la integral curvilínea

$$I = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

será igual a cero, para cualquier contorno cerrado C?

§ 11. Fórmula de Ostrogradski-Gauss

Si S es una superficie regular cerrada, que limita un volumen V, y $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ y $R = R(x, y, z)$ son funciones continuas, junto con sus derivadas parciales de 1° orden, en el recinto cerrado V, se verifica la fórmula de Ostrogradski-Gauss

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

Valiéndose de la fórmula de Ostrogradski-Gauss, transformar las siguientes integrales de superficie, sobre las superficies cerradas S, que limitan el volumen V (donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S).

2361. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx$.

2362. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$.

2363. $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

2364. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS$.

Valiéndose de la fórmula de Ostrogradski-Gauss calcular las siguientes integrales de superficie:

2365. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

2366. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, donde S es la cara exte-

rior de la pirámide limitada por las superficies $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2367. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2368. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$, donde S es la superficie exterior total del cono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \qquad [0\leqslant z\leqslant b].$$

2369. Demostrar, que si S es una superficie cerrada y l cualquier dirección constante,

$$\iint\limits_S \cos(n, l)\,dS=0,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

2370. Demostrar, que el volumen V, limitado por la superficie S, es igual a

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

Capítulo IX

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1°. Verificación de las soluciones. Formación de las ecuaciones diferenciales de familias de curvas. Condiciones iniciales.

1. Conceptos fundamentales. La ecuación de la forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

donde $y = y(x)$ es la función que se busca, se llama *ecuación diferencial de orden n-simo*. Cualquier función $y = \varphi(x)$ que transforme la ecuación (1) en identidad, recibe el nombre de *solución* de esta ecuación, y la gráfica de dicha función se llama *curva integral*. Si la solución se da en forma implícita, $\Phi(x, y) = 0$, generalmente, recibe el nombre de *integral*.

Ejemplo 1. Probar, que la función $y = \operatorname{sen} x$ es solución de la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

Solución. Tenemos:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x.$$

y, por consiguiente,

$$y'' + y = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \equiv 0.$$

La integral

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{2}$$

de la ecuación diferencial (1), que contiene n constantes arbitrarias independientes $C_1, \ldots, C_n$ y que es equivalente (en el campo dado) a la ecuación (1), se llama *integral general* de esta ecuación (en el campo correspondiente). Dando valores determinados a las constantes $C_1, \ldots, C_n$ en la relación (2), se obtiene una *integral particular* de la ecuación (1).

Recíprocamente, teniendo una familia de curvas (2) y excluyendo los parámetros $C_1, \ldots, C_n$ del sistema de ecuaciones

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0,$$

se obtiene, en general, una ecuación diferencial de la forma (1), cuya integral, en el campo correspondiente, es la relación (2).

Ejemplo 2. Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas

$$y = C_1 (x - C_2)^2. \tag{3}$$

Solución. Derivando dos veces la expresión (3), tendremos:

$$y' = 2C_1 (x - C_2) \text{ e } y'' = 2C_1. \tag{4}$$

Excluyendo de las ecuaciones (3) y (4) los parámetros C_1 y C_2, hallamos la ecuación diferencial que buscábamos

$$2yy'' = y'^2.$$

Es fácil comprobar que la función (3) transforma esta ecuación en identidad.

2°. Condiciones iniciales. Si para la solución particular $y = y(x)$ de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

se dan las *condiciones iniciales* (*problema de Cauchy*)

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

y se conoce la *solución general* de la ecuación (5)

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

las constantes arbitrarias $C_1, \ldots, C_n$ se determinan, si ello es posible, del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo 3. Hallar la curva de la familia

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \tag{6}$$

que tiene $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$.

Solución. Tenemos:

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}. \tag{7}$$

Poniendo $x = 0$, en las fórmulas (6) y (7), tenemos:

$$1 = C_1 + C_2, \quad -2 = C_1 - 2C_2,$$

de donde

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

y, por consiguiente,

$$y = e^{-2x}.$$

Averiguar, si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican:

2704. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$

2705. $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

2706. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0, \quad y = \dfrac{C^2 - x^2}{2x}.$

2707. $y'' + y = 0, \quad y = 3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x.$

2708. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$

2709. $y''-2y'+y=0$; a) $y=xe^x$, b) $y=x^2e^x$.

2710. $y''-(\lambda_1+\lambda_2)\,y'+\lambda_1\lambda_2\,y=0$,
$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

Demostrar, que las relaciones que se indican son integrales de las ecuaciones diferenciales que se dan:

2711. $(x-2y)\,y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C^2$.

2712. $(x-y+1)\,y'=1$, $y=x+Ce^y$.

2713. $(xy-x)\,y''+xy'^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

Formar las ecuaciones diferenciales de las familias de curvas que se dan (C, C_1, C_2, C_3 son constantes arbitrarias);

2714. $y=Cx$.

2715. $y=Cx^2$.

2716. $y^2=2Cx$.

2717. $x^2+y^2=C^2$.

2718. $y=Ce^x$.

2719. $x^3=C(x^2-y^2)$.

2720. $y^2+\frac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

2721. $\ln\frac{x}{y}=1+ay$
(a es un parámetro).

2722. $(y-y_0)^2=2px$
(y_0, p son parámetros).

2723. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

2724. $y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x$.

2725. $y=(C_1+C_2x)\,e^x+C_3$.

2726. Formar la ecuación diferencial de todas las rectas del plano XOY.

2727. Formar la ecuación diferencial de todas las parábolas con eje vertical en el plano XOY.

2728. Formar la ecuación diferencial de todas las circunferencias en el plano XOY.

Hallar, para las familias de curvas que se dan, las líneas que satisfagan a las condiciones iniciales que se indican:

2729. $x^2-y^2=C$, $y(0)=5$.

2730. $y=(C_1+C_2x)\,e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

2731. $y=C_1\operatorname{sen}(x-C_2)$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=0$.

2732. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}$;
$y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-2$.

§ 2. Ecuaciones diferenciales de 1er orden

1°. Formas de ecuaciones diferenciales de 1er orden. La ecuación diferencial de 1er orden con una función y incógnita resuelta con relación a la derivada y', tiene la forma

$$y'=f(x,y), \tag{1}$$

donde $f(x, y)$, es una función dada. En algunos casos, es conveniente considerar como función incógnita la variable x y escribir la ecuación (1) en la forma

$$x' = g(x, y), \tag{1'}$$

donde $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$.

Teniendo en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$ y $x' \frac{dx}{dy}$, las ecuaciones diferenciales (1) y (1') se pueden escribir en forma simétrica

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2}$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones conocidas.

Por solución de la ecuación (2) se entiende la función de la forma $y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$, que satisface a esta ecuación. La integral general de las ecuaciones (1) y (1'), o de la ecuación (2), tiene la forma

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

donde C es una constante arbitraria.

§ 3. Ecuaciones diferenciales de 1er orden con variables separables.

1°. Ecuaciones diferenciales de 1er orden con variables separables. Se llaman ecuaciones con *variables separables*, las ecuaciones diferenciales de 1er orden de la forma

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1}$$

o bien,

$$X(x)\, Y(y)\, dx + X_1(x)\, Y_1(y)\, dy = 0. \tag{1'}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación (1) por $g(y)$ y multiplicando por dx, tendremos $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$. De donde, integrando, obtenemos la integral general de la ecuación (1) en la forma

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C. \tag{2}$$

Análogamente, dividiendo los dos miembros de la ecuación (1') por $X_1(x)\, Y(y)$ e integrando, se obtiene la integral general de la ecuación (1') en la forma

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\, dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\, dy = C. \tag{2'}$$

Si para un valor determinado de $y = y_0$, tenemos que $g(y_0) = 0$, la función $y = y_0$ también es solución de la ecuación (1), como es fácil convencerse directamente. Análogamente, las rectas $x = a$ e $y = b$ serán curvas integrales de la ecuación (1'), si a y b son de por sí raíces de las ecuaciones $X_1(x) = 0$ e $Y(y) = 0$, por cuyos primeros miembros se dividió la ecuación inicial.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

En particular, hallar la solución que satisface a la condición inicial:

$$y(1) = 2.$$

Solución. La ecuación (3) se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

De donde, separando las variables, tendremos:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

y, por consiguiente,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

donde la constante arbitraria $\ln C_1$ está tomada en forma logarítmica. Después de potenciar, se obtiene la solución general

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (4)$$

donde $C = \pm C_1$.

Al dividir por y podríamos perder la solución $y = 0$, pero esta última está contenida en la fórmula (4) para $C = 0$.

Utilizando la condición inicial dada, obtenemos que $C = 2$, y, por consiguiente, la solución particular buscada es

$$y = \frac{2}{x}.$$

2°. Algunas ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a ecuaciones con las variables separables. Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$$

se reducen a ecuaciones de la forma (1) por medio de la sustitución $u = ax + by + c$, donde u es la nueva función que se busca.

4°. Formación de las ecuaciones diferenciales. Al formar la ecuación diferencial en los problemas geométricos, se puede emplear con frecuencia el sentido geométrico de la derivada, como tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva con la dirección positiva del eje OX; esto permite, en muchos casos, determinar inmediatamente la relación entre la ordenada y de la curva que se busca, y su abscisa x e y', es decir, obtener la ecuación diferencial. En otros casos (véanse los problemas Nos 2783, 2890, 2895), se utiliza el sentido geométrico de la integral definida, como área de un trapecio mixtilíneo o longitud de un arco. En este

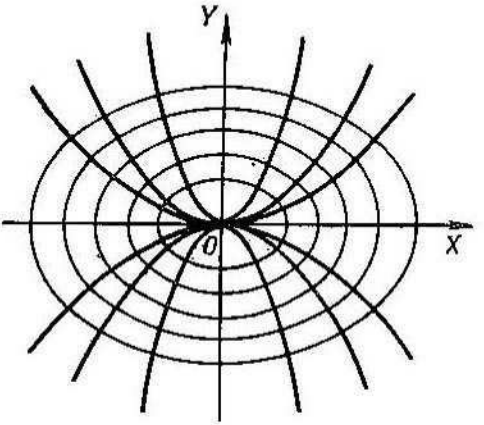

Fig. 106

caso, directamente de las condiciones del problema, se obtiene una ecuación integral simple (puesto que la función que se busca se encuentra bajo el signo integral), pero que derivando sus dos miembros, se puede con facilidad transformar en ecuación diferencial.

Ejemplo 3. Hallar una curva que pase por el punto (3; 2), para la que la longitud del segmento de cualquiera de sus tangentes, comprendido entre los ejes de coordenadas, esté dividido en el punto de contacto en dos partes iguales.

Solución. Sea $M(x, y)$ el punto medio de la tangente AB, que según las condiciones es, a la vez, el punto de contacto (los puntos A y B son los puntos de intersección de la tangente con los ejes OY y OX). De acuerdo con las condiciones, $OA=2y$ y $OB=2x$. El coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto $M(x, y)$ es igual a

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{OA}{OB}=-\frac{y}{x}.$$

Esta es la ecuación diferencial de la curva que se buscaba. Haciendo una transformación, tenemos:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

y, por consiguiente,

$$\ln x+\ln y=\ln C, \text{ o sea, } xy=C.$$

Utilizando la condición inicial, determinamos que $C=3\cdot 2=6$. Es decir, la curva que se buscaba es la hipérbola $xy=6$.

Resolver las ecuaciones diferenciales:

2742. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0$.

2743. $xy' - y = y^3$.

2744. $xyy' = 1 - x^2$.

2745. $y - xy' = a(1 + x^2 y')$.

2746. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

2747. $y' \operatorname{tg} x = y$.

Hallar las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones, que satisfacen a las condiciones iniciales que se indican:

2748. $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$; $y = 1$ para $x = 0$.

2749. $(xy^2 + x)\, dx + (x^2 y - y)\, dy = 0$; $y = 1$ para $x = 0$.

2750. $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$; $y = 1$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales valiéndose del cambio de variables:

2751. $y' = (x + y)^2$.

2752. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

2753. $(2x + 3y - 1)\, dx + (4x + 6y - 5)\, dy = 0$.

2754. $(2x - y)\, dx + (4x - 2y + 3)\, dy = 0$.

En los N^{os} 2755 y 2756 pasar a las coordenadas polares:

2755. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$.

2756. $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$.

2757*. Hallar una curva que tenga un segmento de tangente cuya longitud sea igual a la distancia desde el punto de contacto hasta el origen de coordenadas.

2758. Hallar una curva para la que el segmento de la normal, en cualquier punto de la misma, comprendido entre los ejes de coordenadas, esté dividido por este punto en dos partes iguales.

2759. Hallar una curva cuya subtangente tenga una longitud constante a.

2760. Hallar una curva cuya subtangente sea el doble de la abscisa del punto de contacto.

2761*. Hallar una curva, para la que la abscisa del centro de gravedad de la figura plana, limitada por los ejes de coordenadas,

por esta misma curva y por la ordenada de cualquiera de sus puntos, sea igual a 3/4 de la abscisa de este punto.

2762. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (3; 1), para la que el segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje OX esté dividido en dos partes iguales por el punto de intersección con el eje OY.

2763. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2; 0), sabiendo que el segmento de la tangente a dicha curva, comprendido entre el punto de contacto y el eje OY, tiene longitud constante e igual a 2.

§ 4. Ecuaciones diferenciales homogéneas de 1er orden

1°. Ecuaciones homogéneas. Una ecuación diferencial

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

se llama *homogénea*, si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas de igual grado. La ecuación (1) puede reducirse a la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

y por medio de la sustitución $y = xu$, donde u es una nueva función incógnita, se transforma en ecuación con variables separadas. También se puede emplear la sustitución $x = yu$.

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Solución. Hacemos la sustitución $y = ux$; en este caso, $u + xu' = e^u + u$ o bien,

$$e^{-u}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtenemos $u = -\ln \ln \frac{C}{x}$, de donde

$$y = -x \ln \ln \frac{C}{x}.$$

Integrar las ecuaciones diferenciales:

2768. $y' = \frac{y}{x} - 1$.

2769. $y' = -\frac{x+y}{x}$.

2770. $(x-y)\,y\,dx - x^2 dy = 0$.

2771. Hallar, para la ecuación $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$, la familia de curvas integrales y escoger aquellas curvas que pasan respectivamente por los puntos (4; 0) y (1; 1).

2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

2773. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

2779. Hallar la ecuación de la curva, que pasa por el punto (1; 0) y que tiene la propiedad de que el segmento, que intercepta su tangente en el eje OY, es igual al radio polar del punto de contacto.

2780**. ¿Qué forma debe darse al espejo de un proyector para que los rayos del foco luminoso concentrado en un punto se reflejen formando un haz paralelo?

2781. Hallar la ecuación de la curva, cuya subtangente es igual a la media aritmética de las coordenadas del punto de contacto.

2782. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, la longitud del segmento, interceptado por la normal en cualquiera de sus puntos en el eje de ordenadas, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

2783*. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el área comprendida entre el eje de abscisas, la misma curva y dos ordenadas, una de las cuales es constante y la otra variable es igual

a la razón del cubo de la ordenada variable a la abscisa correspondiente.

2784. Hallar la curva, para la cual, la longitud del segmento del eje de ordenadas, interceptado por cualquiera de sus tangentes, es igual a la abscisa del punto de contacto.

§ 5. Ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden.

1°. Ecuaciones lineales. La ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)\, y = (Q)(x) \tag{1}$$

de 1er grado con respecto a y e y', se llama *lineal*.

Si la función $Q(x) \equiv 0$, la ecuación (1) toma la forma

$$y' + P(x)\, y = 0 \tag{2}$$

y recibe el nombre de ecuación diferencial *lineal homogénea*. En este caso, las variables se separan y la solución general de la ecuación (2) es

$$y = C\, e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{3}$$

Para resolver la ecuación lineal no homogénea (1) se emplea el llamado método de *variación de la constante arbitraria*. Este método consiste en que, primeramente, se halla la solución general de la correspondiente ecuación lineal homogénea, es decir, la expresión (3). Después, suponiendo que en esta expresión C es función de x, se busca la solución de la ecuación no homogénea (1) en la forma (3). Para ello, ponemos en la ecuación (1) y e y', deducidas de (3), y de la ecuación diferencial así obtenida determinamos la función $C(x)$. De esta forma, obtenemos la solución general de la ecuación no homogénea (1) de la forma

$$y = C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

Solución. La correspondiente ecuación homogénea es

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

Resolviéndola, tenemos:

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Considerando C como función de x y derivando, hallamos:

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

Poniendo y e y' en la ecuación (4), obtenemos:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot C = \operatorname{tg} x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \quad \text{o} \quad \frac{dC}{dx} = \cos^2 x$$

de donde

$$C(x) = \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C_1.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (4) tiene la forma

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Para resolver la ecuación lineal (1) se puede emplear también la sustitución

$$y = uv, \tag{5}$$

donde u y v son funciones de x. En este caso, la ecuación (1) toma la forma

$$[u' + P(x)\,u]\,v + v'u = Q(x). \tag{6}$$

Si se exige que

$$u' + P(x)\,u = 0, \tag{7}$$

de (7) hallamos u, y después, de (6) hallamos v, y por fin, de (5) hallamos y.

Hallar las integrales generales de las ecuaciones:

2785. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$.

2786. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$.

2787*. $(1+y^2)\,dx = (\sqrt{1+y^2}\,\operatorname{sen} y - xy)\,dy$.

2788. $y^2\,dx - (2xy+3)\,dy = 0$.

Hallar las soluciones particulares que satisfagan a las condiciones que se indican:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ para $x = a$.

2790. $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$; $y = 0$ para $x = 0$.

2791. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; $y = 0$ para $x = 0$.

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

2796. Se dan tres soluciones particulares y, y_1 e y_2, de una ecuación lineal. Demostrar, que la expresión $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ conserva un valor constante para cualquier x. ¿Qué sentido geométrico tiene este resultado?

2797. Hallar las curvas, para las cuales, el área del triángulo formado por el eje OX, la tangente y el radio vector al punto de contacto es constante.

2798. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el segmento interceptado por la tangente en el eje de abscisas es igual al cuadrado de la ordenada del punto de contacto.

2799. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el segmento interceptado por la tangente en el eje de ordenadas es igual a la subnormal.

2800. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, el segmento interceptado por la tangente en el eje de ordenadas es proporcional al cuadrado de la ordenada del punto de contacto.

2801. Hallar la ecuación de la curva, para la cual, la longitud de la tangente es igual a la distancia desde el punto de intersección de esta tangente con el eje OX hasta el punto M (0, a).

§ 6. Ecuaciones diferenciales exactas.

1°. Ecuaciones diferenciales exactas (o en diferenciales totales). Si para la ecuación diferencial

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

se cumple la igualdad $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, la ecuación (1) se puede escribir de la forma $dU(x, y) = 0$ y se llama *ecuación diferencial exacta* (o en diferenciales totales). La integral general de la ecuación (1) es $U(x, y) = C$. La función $U(x, y)$ se determina por el método que se indicó en el cap. VI, § 8, o por la fórmula

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

(véase el cap. VII, § 9).

Ejemplo 1. Hallar la integral de la ecuación diferencial

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

Solución. Esta es una ecuación diferencial exacta, ya que $\frac{\partial (3x^2+6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial (6x^2y+4y^3)}{dx} = 12xy$ y, por consiguiente, la ecuación tiene la forma $dU = 0$.

Aquí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

de donde

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Derivando U con respecto a y, hallamos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

(por la condición); de donde $\varphi'(y) = 4y^3$ y $\varphi(y) = y^4 + C_0$. En definitiva obtenemos $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_0$, y, por consiguiente, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ es la integral general que se buscaba de la ecuación dada.

Hallar las integrales generales de las ecuaciones:

2802. $(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$.

2803. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2xy\,dy=0$.

2804. $(x^3-3xy^2+2)\,dx-(3x^2y-y^2)\,dy=0$.

2805. $x\,dx+y\,dy=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

2806. $\dfrac{2x\,dx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0$.

2807. Hallar la integral particular de la ecuación

$$(x+e^{\frac{x}{y}})\,dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0,$$

que satisfaga a la condición inicial $y(0)=2$.

§ 9. Ecuaciones diferenciales diversas de 1er orden

2833. Determinar el tipo de las siguientes ecuaciones diferenciales e indicar sus métodos de resolución:

a) $(x+y)\,y' = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

b) $(x-y)\,y' = y^2$;

c) $y' = 2xy + x^3$;

d) $y' = 2xy + y^3$;

e) $xy' + y = \operatorname{sen} y$;

f) $(y - xy')^2 = y'^3$;

g) $y = xe^{y'}$;

h) $(y' - 2x)\sqrt{y} = x^3$;

i) $y' = (x+y)^2$:

j) $x \cos y' + y \operatorname{sen} y' = 1$;

k) $(x^2 - xy)y' = y^4$;

l) $(x^2 + 2xy^3)\,dx + (y^2 + 3x^2y^2)\,dy = 0$;

m) $(x^3 - 3xy)dx + (x^2+3)dy = 0$;

n) $(xy^3 + \ln x)\,dx = y^2\,dy$.

Resolver las ecuaciones:

2834. a) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$;

b) $x \ln \frac{x}{y}\,dy - y\,dx = 0$.

2835. $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

2836. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dx = 0$.

2837. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

2838. $y = xy' + y' \ln y'$.

2839. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$.

2840. $x^2(y+1)\,dx + (x^3-1)(y-1)\,dy = 0$.

2841. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1+y)\,dy = 0$.

2842. $y' - y\frac{2x-1}{x^2} = 1$.

2843. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)\,y'$.

2844. $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.

2845. $(1-x^2)\,y' + xy = a$.

2846. $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$.

2847. $y'(x\cos y + a \operatorname{sen} 2y) = 1$.

2848. $(x^2y - x^2 + y - 1)\,dx + (xy + 2x - 3y - 6)\,dy = 0$.

2849. $y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x}\right)^2$.

2850. $xy^3\,dx = (x^2y + 2)\,dy$.

2851. $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$.

2852. $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx = 0$.

2853. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

2854. $yy' + y^2 = \cos x$.

2855. $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$.

2856. $y'(x + \operatorname{sen} y) = 1$.

2857. $y\frac{dp}{dy} = -p + p^2$.

2858. $x^3\,dx - (x^4 + y^3)\,dy = 0$.

2859. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

2860. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0$.

2861. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$.

2862. $y = 2xy' + \sqrt{1+y'^2}$

2863. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$.

2864. $(2e^x + y^4)\,dy - ye^x\,dx = 0$.

2865. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

2866. $xy\,(xy^2+1)\,dy - dx = 0$.

2867. $a\,(xy' + 2y) = xyy'$.

2868. $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx$.

2869. $(x^2-1)^{3/2}\,dy + (x^3 + 3xy\sqrt{x^2-1})\,dx = 0$.

2870. $\operatorname{tg} x\frac{dy}{dx} - y = a$.

2871. $\sqrt{a^2+x^2}\,dy + (x + y - \sqrt{a^2+x^2})\,dx = 0$.

2872. $xyy'^2 - (x^2+y^2)\,y' + xy = 0$.

2873. $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$.

2874. $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$.

2875. $2yp\frac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2$.

Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones, para las condiciones iniciales que se indican:

2876. $y' = \frac{y+1}{x}$; $y = 0$ para $x = 1$,

2877. $e^{x-y}y' = 1$; $y = 1$ para $x = 1$.

2878. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; $y = 2$ para $x = 0$.

2879. $e^y(y' + 1) = 1$; $y = 0$ para $x = 0$.

2880. $y' + y = \cos x$; $y = \frac{1}{2}$ para $x = 0$.

2881. $y' - 2y = -x^2$; $y = \frac{1}{4}$ para $x = 0$.

2882. $y' + y = 2x$; $y = -1$ para $x = 0$.

2883. $xy' = y$; a) $y = 1$ para $x = 1$; b) $y = 0$ para $x = 0$.

2884. $2xy' = y$; a) $y = 1$ para $x = 1$; b) $y = 0$ para $x = 0$.

2885. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$; a) $y = 0$ para $x = 0$; b) $y = 1$ para $x = 0$; c) $y = 0$ para $x = 1$.

2886. Hallar una curva que pase por el punto (0; 1) y que la subtangente sea igual a la suma de las coordenadas del punto de contacto.

2887. Hallar la curva, sabiendo, que la suma de los segmentos que intercepta la tangente a la misma en los ejes de coordenadas es constante e igual a $2a$.

2888. La suma de las longitudes de la normal y de la subnormal es igual a la unidad. Hallar la ecuación de la curva, sabiendo, que ésta pasa por el origen de coordenadas.

2889*. Hallar la curva, para la cual, el ángulo formado por la tangente con el radio vector del punto de contacto es constante.

2890. Hallar la curva, sabiendo, que el área comprendida entre los ejes de coordenadas, esta curva y la ordenada de cualquier punto situado en ella, es igual al cubo de esta ordenada.

2891. Hallar la curva, sabiendo, que el área del sector limitado por el eje polar, la propia curva y el radio polar de cualquiera de sus puntos, es proporcional al cubo de este radio.

2892. Hallar la curva, para la cual, el segmento que intercepta la tangente en el eje OX, es igual a la longitud de la propia tangente.

2893. Hallar la curva, para la cual, el segmento de tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide en dos partes iguales por la parábola $y^2 = 2x$.

2894. Hallar la curva, para la cual, la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto hasta el origen de coordenadas.

2895*. El área de la figura limitada por una curva, los ejes de coordenadas y la ordenada de cualquier punto de la curva, es igual a la longitud del coorrespondiente arco de la misma. Hallar la ecuación de esta curva, si se sabe, que pasa por el punto (0; 1).

2896. Hallar la curva, para la cual, el área del triángulo que forman el eje de abscisas, la tangente a la curva y el radio vector del punto de contacto, es constante e igual a a^2.

2897. Hallar la curva, sabiendo, que el punto medio del segmento, interceptado en el eje OX por la tangente y la normal a la misma, es constante, $(a; 0)$.

Al formar la ecuación diferencial de 1er orden, sobre todo en los problemas físicos, son frecuentes los casos en que conviene emplear el llamado *método de las diferenciales*, que consiste en que, las relaciones aproximadas entre los incrementos infinitamente pequeños de las magnitudes que se buscan, ciertas con una aproximación hasta de infinitésimos de orden superior, se sustituyen por las correspondientes relaciones entre sus diferenciales, cosa que no influye en el resultado.

Problema. En un depósito hay 190 litros de disolución acuosa que contiene 10 kg de sal. En este depósito se vierte agua con una velocidad de 3 litros por minuto y se expulsa la mezcla con velocidad de 2 litros por minuto. La concentración se mantiene homogénea removiendo el agua. ¿Cuánta sal habrá en el depósito después de transcurrida una hora?

Solución. Se da el nombre de concentración c de una substancia dada, a la cantidad de la misma que hay en una unidad de volumen. Si la concentración es homogénea, la cantidad de substancia en un volumen V será igual a cV.

Supongamos, que la cantidad de sal que hay en el depósito después de transcurrir t min, es igual a x kg. La cantidad de mezcla que hay en el depósito en este instante será $(100+t)$ litros y, por consiguiente, la concentración $c = \dfrac{x}{100+t}$ kg por litro.

Durante el espacio de tiempo dt, del depósito salen $2dt$ litros de mezcla, que contienen $2c\,dt$ kg de sal. Por esto, la variación dx de la cantidad de sal que haya en el depósito se caracteriza por la relación

$$-dx = 2c\,dt, \text{ o bien } -dx = \frac{2x}{100+t}\,dt.$$

Esta es, precisamente, la ecuación diferencial que se buscaba. Separando las variables e integrando, tenemos:

$$\ln x = -2\ln(100+t) + \ln C$$

o sea,

$$x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

La constante C se determina partiendo de la condición de que, cuando $t=0$, $x=10$, es decir, $C=100.000$. Después de una hora, en el depósito quedarán

$$x=\frac{100.000}{160^2}\approx 3{,}9 \text{ kg de sal.}$$

2898*. Demostrar, que la superficie libre de un líquido pesado que gira alrededor de un eje vertical, tiene la forma de un paraboloide de revolución.

2899*. Hallar la dependencia que existe entre la presión del aire y la altura, conociendo, que esta presión es igual a 1 kgf por 1 cm^2 al nivel del mar y de 0,92 kgf por 1 cm^2 a 500 metros de altura.

2900*. Según la ley de Hooke, un cordón elástico de longitud l, bajo la acción de una fuerza de dilatación F, experimenta un incremento de longitud igual a klF ($k=\text{const}$). ¿En cuánto aumentará la longitud de este cordón, por la acción de su propio peso W, si se le cuelga por uno de sus extremos? (La longitud inicial del cordón es l).

2901. Resolver este mismo problema, pero con la condición de que en el extremo libre del cordón se suspende un peso P.

Al resolver los problemas 2902 y 2903, utilizar la ley de Newton, según la cual, la velocidad con que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio que le rodea.

2902. Hallar la dependencia entre la temperatura T y el tiempo t, si un cuerpo calentado hasta T_0 grados se introduce en un local cuya temperatura es constante e igual a a grados.

2903. ¿Dentro de cuánto tiempo, la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100°, descenderá hasta 30°, si la temperatura del local es igual a 20° y durante los primeros 20 min el cuerpo en cuestión se enfrió hasta 60°?

2904. El efecto retardador del rozamiento sobre un disco que gira dentro de un líquido, es proporcional a la velocidad angular de rotación. Hallar la dependencia de esta velocidad angular del tiempo, conociendo, que el disco, que comenzó a girar con una velocidad de 100 r.p.m., después de pasar 1 min gira a una velocidad de 60 r.p.m.

2905*. La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad del mismo. Se sabe, que transcurridos 1600 años queda la mitad de las reservas iniciales de radio. Hallar qué tanto por ciento de radio resultará desintegrado cuando pasen 100 años.

2906*. La velocidad de salida del agua por un orificio, que se encuentra verticalmente a una distancia h de la superficie

libre del líquido, se determina por la fórmula

$$v = c\sqrt{2gh},$$

donde $c \approx 0{,}6$ y g es la aceleración de la fuerza de gravedad. ¿Cuánto tiempo tardará en salir el agua que llena una caldera semiesférica de 2 m de diámetro, si sale por un orificio redondo que hay en el fondo y que tiene 0,1 m de radio?

2907*. La cantidad de luz que resulta absorbida al pasar por una capa delgada de agua, es proporcional a la cantidad de luz que cae sobre ella y al espesor de la misma capa. Si al atravesar una capa de agua de 3 m de espesor queda absorbida la mitad de la cantidad inicial de luz ¿qué parte de esta cantidad llegará hasta la profundidad de 30 m?

2908*. La resistencia del aire en el descenso de los cuerpos en paracaídas es proporcional al cuadrado de la velocidad con que se mueven. Hallar la velocidad límite de la caída.

2909*. El fondo de un depósito, de 300 litros de capacidad, está cubierto de una mezcla de sal y de una substancia indisoluble. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg de sal para 3 litros de agua) y que la cantidad de agua pura dada disuelve 1/3 de kg de sal por min, hallar qué cantidad de sal contendrá la disolución al cabo de una hora.

2910*. La fuerza electromotriz e de un circuito, con intensidad de corriente i, resistencia R e inductancia L, es igual a la caída de tensión Ri más la fuerza electromotriz de autoinducción $L\frac{di}{dt}$. Determinar la intensidad de la corriente i, en un instante t, si $e = E \operatorname{sen} \omega t$ (E y ω son constantes) e $i = 0$ cuando $t = 0$.

§ 12. Ecuaciones diferenciales lineales de 2° orden con coeficientes constantes

1°. Ecuaciones homogéneas. La ecuación lineal homogénea de 2° orden con coeficientes constantes p y q, es de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Si k_1 y k_2 son las raíces de la ecuación característica

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0, \tag{2}$$

la solución general de la ecuación (1) se escribe en una de las tres formas siguientes:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, si k_1 y k_2 son reales y $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, si $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$, si $k_1 = \alpha + \beta i$ y $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

2°. Ecuaciones no homogéneas. La solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

se puede escribir en forma de suma

$$y = y_0 + Y,$$

donde y_0 es la solución general de la correspondiente ecuación (1) sin segundo miembro, que se determina por las fórmulas 1) —3), e Y es una solución particular de la ecuación dada (3).

La función Y se puede hallar por el *método de los coeficientes indeterminados* en los siguientes casos simples:

1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Si a no es raíz de la ecuación característica (2), es decir, $\varphi(a) \neq 0$, se considera $Y = e^{ax} Q_n(x)$, donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes indeterminados.

Si a es raíz de la ecuacion característica (2), es decir, $\varphi(a) = 0$, se considera $Y = x^r e^{ax} Q_n(x)$, donde r es el grado de multiplicidad de la raíz a $(r = 1$ o $r = 2)$.

2. $f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \operatorname{sen} bx]$.

Si $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, se considera

$$Y = e^{ax}[S_N(x) \cos bx + T_N \operatorname{sen} bx],$$

donde $S_N(x)$ y $T_N(x)$ son polinomios de grado $N = \text{máx}\{n, m\}$.

Si por el contrario, $\varphi(a \pm bi) = 0$, se considera

$$Y = x^r e^{ax}[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \operatorname{sen} bx],$$

donde r es el grado de multiplicidad de la raíz $a \pm bi$ (para la ecuación de 2° orden $r = 1$).

En el caso general, para resolver la ecuación (3) se emplea el *método de variación de las constantes arbitrarias* (véase el § 11).

Ejemplo 1. Hallar la solución de la ecuación

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}.$$

Solución. La ecuación característica $2k^2 - k - 1 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 1$ y $k_2 = \frac{1}{2}$. La solución general de la correspondiente ecuación homogénea (de la forma primera) es $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$. El segundo miembro de la ecuación dada $f(x) = 4xe^{2x} = e^{ax} P_n(x)$. Por consiguiente, $Y = e^{2x}(Ax + B)$, ya que $n = 1$ y $r = 0$. Derivando Y dos veces y poniendo las derivadas en la

ecuación dada, obtenemos:

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+2B+A)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x}.$$

Simplificando por e^{2x} e igualando entre sí los coeficientes que corresponden a las primeras potencias de x y los términos independientes de ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$5A=4 \text{ y } 7A+3B=0, \text{ de donde } A=\frac{4}{5} \text{ y } B=-\frac{28}{25}.$$

De este forma, $Y=e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)$, y la solución general de la ecuación dada es

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right).$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación $y''-2y'+y=xe^x$.

Solución. La ecuación característica $k^2-2k+1=0$ tiene una raíz cuyo grado de multiplicidad es dos, $k=1$. El segundo miembro de la ecuación es, $f(x)=xe^x$; aquí, $a=1$ y $n=1$. La solución particular $Y=x^2e^x(Ax+B)$, puesto que a coincide con la raíz $k=1$ cuyo grado de multiplicidad es igual a dos y, por consiguiente, $r=2$.

Derivando Y dos veces, poniendo las derivadas en la ecuación e igualando los coeficientes, obtenemos $A=\frac{1}{6}$, $B=0$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación dada se escribe de la forma

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Ejemplo 3. Hallar la solución general de la ecuación $y''+y=x\operatorname{sen}x$.

Solución. La ecuación característica $k^2+1=0$ tiene las raíces $k_1=i$ y $k_2=-i$. La solución general de la correspondiente ecuación homogénea será [véase 3), donde $\alpha=0$ y $\beta=1$]:

$$y_0=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x.$$

El segundo miembro tiene la forma

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\operatorname{sen}bx],$$

donde $a=0$, $b=1$, $P_n(x)=0$, $Q_m(x)=x$. A él le corresponde la solución particular

$$Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\operatorname{sen}x]$$

(aquí $N=1$, $a=0$, $b=1$, $r=1$).

Derivando dos veces y poniendo las derivadas en la ecuación, igualamos entre sí los coeficientes de los dos miembros de la igualdad que corresponden a $\cos x$, $x\cos x$, $\operatorname{sen}x$ y $x\operatorname{sen}x$. Como resultado, obtenemos cuatro ecuaciones: $2A+2D=0$, $4C=0$, $-2B+2C=0$, $-4A=1$, de las cuales se determinan: $A=-1/4$, $B=0$, $C=0$, $D=1/4$. Por lo que $Y=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\operatorname{sen}x$.

La solución general será

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} x.$$

3°. Principio de superposición de soluciones. Si el segundo miembro de la ecuación (3) es una suma de varias funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

e $Y_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ son las correspondientes soluciones de las ecuaciones

$$y'' + py' + qy = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la suma

$$y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

es solución de la ecuación (3).

Hallar la solución general de las ecuaciones:

2976. $y'' - 5y' + 6y = 0$

2977. $y'' - 9y = 0$.

2978. $y'' - y' = 0$.

2979. $y'' + y = 0$.

2980. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

2981. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

2982. $y'' + 2y' + y = 0$.

2983. $y'' - 4y' + 2y = 0$.

2984. $y'' + ky = 0$.

2985. $y = y'' + y'$.

2986. $\frac{y' - y}{y''} = 3$.

Hallar las soluciones particulares que satisfagan a las condiciones que se indican:

2987. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y = 5$, $y' = 8$ para $x = 0$.

2988. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $y = 1$, $y' = -1$ para $x = 0$.

2989. $y'' + 4y = 0$, $y = 0$, $y' = 2$ para $x = 0$.

2990. $y'' + 2y' = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ para $x = 0$.

2991. $y'' = \frac{y}{a^2}$; $y = a$, $y' = 0$ para $x = 0$.

2992. $y'' + 3y' = 0$; $y = 0$ para $x = 0$ e $y = 0$ para $x = 3$.

2993. $y'' + \pi^2 y = 0$; $y = 0$ para $x = 0$ e $y = 0$ para $x = 1$.

2994. Indicar la forma de las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones no homogéneas:

a) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$;

b) $y'' + 9y = \cos 2x$;

c) $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sen} 2x + e^{2x}$;

d) $y'' + 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$;

e) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)\, e^x + xe^{2x}$;

f) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \operatorname{sen} 2x$.

Hallar la solución de las ecuaciones:

2995. $y''-4y'+4y=x^2$.

2996. $y''-y'+y=x^3+6$.

2997. $y''+2y'+y=e^{2x}$.

2998. $y''-8y'+7y=14$.

2999. $y''-y=e^x$.

3000. $y''+y=\cos x$.

3001. $y''+y'-2y=8\operatorname{sen} 2x$.

3002. $y''+y'-6y=xe^{2x}$.

3003. $y''-2y'+y=\operatorname{sen} x+\operatorname{sh} x$.

3004. $y''+y'=\operatorname{sen}^2 x$.

3005. $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$.

3006. Hallar la solución de la ecuación $y''+4y=\operatorname{sen} x$, que satisface a las condiciones $y=1$, $y'=1$ para $x=0$.

Resolver las ecuaciones:

3007. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=A\operatorname{sen} pt$. Examinar los casos: 1) $p\neq\omega$; 2) $p=\omega$.

3008. $y''-7y'+12y=-e^{4x}$.

3009. $y''-2y'=x^2-1$.

3010. $y''-2y'+y=2e^x$.

3011. $y''-2y'=e^{2x}+5$.

3012. $y''-2y'-8y=e^x-8\cos 2x$.

3013. $y''+y'=5x+2e^x$.

3014. $y''-y'=2x-1-3e^x$.

3015. $y''+2y'+y=e^x+e^{-x}$.

3016. $y''-2y'+10y=\operatorname{sen} 3x+e^x$.

3017. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\frac{x}{2}$.

3018. $y''-3y'=x+\cos x$.

3019. Hallar la solución de la ecuación $y''-2y'=e^{2x}+x^2-1$, que satisface a las condiciones: $y=\frac{1}{8}$, $y'=1$ para $x=0$.

Resolver las ecuaciones:

3020. $y''-y=2x\operatorname{sen} x$.

3021. $y''-4y=e^{2x}\operatorname{sen} 2x$.

3022. $y'' + 4y = 2 \operatorname{sen} 2x - 3 \cos 2x + 1$.

3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \operatorname{sen} x$.

3024. $y'' = xe^x + y$.

3025. $y'' + 9y = 2x \operatorname{sen} x + xe^{3x}$.

3026. $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$.

3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$.

3028. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

3029. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x+1)e^x$.

3030*. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$.

3031. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

Valiéndose del método de variación de las constantes arbitrarias, resolver las ecuaciones:

3032. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3034. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3035. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

3036. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3037. $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

3038. a) $y'' - y = \operatorname{th} x$;

b) $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$.

3039. Dos pesos iguales están colgados del extremo de un resorte. Hallar la ecuación del movimiento que efectuará uno de estos pesos, si el otro se desprende.

Solución. Supongamos que el aumento de longitud que experimenta el resorte bajo la acción de uno de los pesos, en estado de reposo, es igual a a y que la masa de dicho peso es m. Designemos con la letra x la coordenada de este peso, tomada en dirección vertical, a partir de la posición de equilibrio cuando sólo hay un peso.

En este caso,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x+a),$$

donde, evidentemente, $k = \dfrac{mg}{a}$, y por consiguiente, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{g}{a}x$. La solución general es $x = C_1 \cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$. Las condiciones iniciales nos dan $x = a$ y $\dfrac{dx}{dt} = 0$ para $t = 0$; de donde $C_1 = a$ y $C_2 = 0$, y, por consiguiente,

$$x = a \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t.$$

3040*. La fuerza que alarga a un resorte es proporcional al aumento de longitud del mismo e igual a 1 kgf, para un aumento de longitud de 1 cm. Del resorte está suspendida una carga cuyo peso es de 2 kgf. Hallar el período del movimiento oscilatorio que recibirá esta carga, si se tira de ella un poco hacia abajo y después se suelta.

3041*. Una carga, cuyo peso es $P = 4$ kgf, está suspendida de un resorte al que alarga en 1 cm. Hallar la ley del movimiento de esta carga, si el extremo superior del muelle efectúa las oscilaciones armónicas verticales $y = 2 \operatorname{sen} 30t$ cm y en el momento inicial la carga estaba en reposo (la resistencia del medio se desprecia).

3042. Un punto material de masa m, es atraído por dos centros. La fuerza de atracción de cada uno es proporcional a la distancia (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). Hallar la ley del movimiento de dicho punto, sabiendo que la distancia entre los centros es de $2b$, que en el momento inicial el punto en cuestión se encontraba en el segmento que une entre sí dichos centros, a una distancia c del punto medio del mismo y que su velocidad era igual a cero.

3043. Una cadena de 6 m de longitud se desliza, sin rozamiento, desde un soporte hacia abajo. Si el movimiento se inicia en el momento en que del soporte cuelga 1 m de cadena ¿cuánto tiempo tardará en deslizarse toda la cadena?

3044. Un tubo largo y estrecho gira con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical perpendicular a él. Una bola, que se encuentra dentro de dicho tubo, se desliza por él sin rozamiento. Hallar las leyes del movimiento de la bola con relación al tubo, considerando que:

a) en el momento inicial la bola se encontraba a una distancia a del eje de rotación y su velocidad en dicho momento era igual a cero;

b) en el momento inicial, la bola se encontraba en el eje de rotación y tenía una velocidad inicial de v_0.

1782. $V=\frac{2}{3}(y^2-x^2)\,x$. 1783. $S=\frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4z^2+3(x-y)^2}$. 1784. $f\left(\frac{1}{2};\ 3\right)=\frac{5}{3}$; $f(1;\ -1)=-2$. 1785. $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{x^2-y^2}{2xy}$, $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{2xy}{x^2-y^2}$. 1786. $f(x,\ x^2)=1+x-x^2$. 1787. $z=\frac{R^4}{1-R^2}$. 1788. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$. Indicación. Representar la función dada en la forma $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$ y sustituir $\frac{y}{x}$ por x. 1789. $f(x,\ y)=\frac{x^2-xy}{2}$. Solución. Designamos $x+y=u$, $x-y=v$. En este caso $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$; $f(u,\ v)=\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+$ $+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=\frac{u^2-uv}{2}$. No queda más que cambiar la denominación de los argumentos u y v por x e y. 1790. $f(u)=u^2+2u$; $z=x-1+\sqrt{y}$. Indicación. En la identidad $x=1+f(\sqrt{x}-1)$ ponemos $\sqrt{x}-1=u$; entonces, $x=(u+1)^2$ y, por consiguiente, $f(u)=u^2+2u$. 1791. $f(y)=\sqrt{1+y^2}$; $z=\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$. Resolución. Cuando $x=1$ tenemos la identidad $\sqrt{1+y^2}=1\cdot f\left(\frac{y}{1}\right)$, es decir, $f(y)=\sqrt{1+y^2}$. En este caso, $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ y $z=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$. 1792. a) Círculo unidad, con el centro en el origen de coordenadas, incluida la circunferencia ($x^2+y^2\leqslant 1$); b) la bisectriz $y=x$, del I y III ángulos coordenados; c) semiplano, situado sobre la recta $x+y=0$ ($x+y>0$); d) faja, comprendida entre las rectas $y=\pm 1$, incluidas éstas en ($-1\leqslant y\leqslant 1$); e) cuadrado, formado por los segmentos de las rectas $x=\pm 1$ e $y=\pm 1$, incluidos sus lados ($-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$); f) parte del plano, adyacente al eje OX y comprendida entre las rectas $y=\pm x$, incluyendo estas rectas y excluyendo el origen de coordenadas ($-x\leqslant y\leqslant x$, cuando $x>0$, $x\leqslant y\leqslant -x$ cuando $x<0$); g) dos fajas $x\geqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$ y $x\leqslant -2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$; h) anillo, comprendido entre las circunferencias $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=2a^2$, incluida la frontera; i) las fajas $2n\pi\leqslant x\leqslant$ $\leqslant(2n+1)\pi$, $y\geqslant 0$ y $(2n+1)\pi\leqslant x\leqslant(2n+2)\pi$, $y\leqslant 0$, donde n es un número entero; j) la parte del plano situada por encima de la parábola $y=-x^2$ ($x^2+y>0$); k) todo el plano XOY; l) todo el plano XOY, a excepción del origen de coordenadas; m) la parte del plano situada por encima de la parábola $y^2=x$ y a la derecha del eje OY, incluyendo los puntos del eje OY y excluyendo

los de la parábola ($x \geqslant 0$, $y > \sqrt{x}$); n) todo el plano, a excepción de los puntos de las rectas $x=1$ e $y=0$; o) la familia de anillos concéntricos $2\pi k \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi(2k+1)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$). **1793.** a) I octante (incluyendo la frontera); b) I, III, VI y VIII octantes (excluyendo la frontera); c) un cubo, limitado por los planos $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ y $z=\pm 1$, incluidas sus caras; d) una esfera de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, incluida su superficie. **1794.** a) Un plano; las líneas de nivel son rectas, paralelas a la recta $x+y=0$; b) un paraboloide de revolución; las líneas de nivel son círculos concéntricos cuyo centro está situado en el origen de coordenadas; c) paraboloide hiperbólico; las líneas de nivel son hipérbolas equiláteras; d) un cono de 2° orden; las líneas de nivel son hipérbolas equiláteras; e) cilindro parabólico, cuyas generatrices son paralelas a la recta $x+y+1=0$; las líneas de nivel son rectas paralelas; f) superficie lateral de una pirámide cuadrangular; las líneas de nivel son contornos de cuadrados; g) las líneas de nivel son parábolas $y=Cx^2$; h) las líneas de nivel son parábolas $y=C\sqrt{x}$; i) las líneas de nivel son circunferencias $C(x^2+y^2)=2x$. **1795.** a) Parábolas $y=C-x^2$ ($C>0$); b) hipérbolas $xy=C$ ($|C| \leqslant 1$); c) circunferencias $x^2+y^2=C^2$; d) rectas $y=ax+C$; e) rectas $y=Cx$ ($x \neq 0$). **1796.** a) Planos paralelos al plano $x+y+z=0$; b) esferas concéntricas cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas; c) cuando $u>0$, hiperboloides de revolución de una hoja alrededor del eje OZ; cuando $u<0$, hiperboloides de revolución de dos hojas, alrededor del mismo eje; ambas familias de curvas están divididas por el cono $x^2+y^2-z^2=0$ ($u=0$). **1797.** a) 0; b) 0; c) 2; d) e^k; e) no existe el límite; f) no existe el límite. Indicación. En el punto b) pasar a las coordenadas polares. En los puntos e) y f) examinar las variaciones de x e y a lo largo de las rectas $y=kx$ y demostrar, que la expresión dada puede tender a límites diferentes, que dependen del valor del k elegido. **1798.** Continua. **1799.** a) Punto de discontinuidad cuando $x=0$ e $y=0$; b) todos los puntos de la recta $x=y$ (línea de discontinuidad); c) la línea de discontinuidad es la circunferencia $x^2+y^2=1$; d) las líneas de discontinuidad son los ejes de coordenadas. **1800.** Indicación. Poniendo $y=y_1=\text{const}$, obtenemos la función $\varphi_1(x)=\dfrac{2xy_1}{x^2+y_1^2}$, que es continua en todas partes, ya que cuando $y_1 \neq 0$ el denominador $x^2+y_1^2 \neq 0$, mientras que cuando $y_1=0$ $\varphi_1(x) \equiv 0$. Análogamente, cuando $x=x_1=\text{const}$, la función $\varphi_2(y)=\dfrac{2x_1y}{x_1^2+y^2}$ es continua en todas partes. Por el conjunto de las variables x e y, la función z tiene una discontinuidad en el punto (0, 0), ya que no existe el $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$. Efectivamente, pasando a las coordenadas polares ($x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$), obtenemos $z=\operatorname{sen} 2\varphi$, de donde se aprecia que, si $x\to 0$ e $y\to 0$ de manera que $\varphi=\text{const}$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$), $z \to \operatorname{sen} 2\varphi$. Como estos valores extremos de la función z dependen de la dirección de φ, z no tiene límite cuando $x\to 0$ e $y\to 0$.

1801. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$. **1802.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{(x+y)^2}$.

1803. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$. **1804.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

1805. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **1806.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. **1807.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1808. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$. 1809. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$. 1810. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. 1811. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. 1812. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\,(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz\,(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$. 1813. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$. 1814. $f'_x(2,1)=\frac{1}{2}$, $f'_y(2,1)=0$. 1815. $f'_x(1;2;0)=1$, $f_y(1;2;0)=\frac{1}{2}$, $f^z(1;2;0)=\frac{1}{2}$. 1820. $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. 1821. r. 1826. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\varphi(x)$. 1827. $z=\frac{x^2}{2}+y^2\ln x+\operatorname{sen} y-\frac{1}{2}$. 1828. 1) $\operatorname{tg}\alpha=4$, $\operatorname{tg}\beta=\infty$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\infty$, $\operatorname{tg}\beta=4$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}$. 1829. $\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{1}{2}h$, $\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{1}{2}h$, $\frac{\partial S}{\partial h}=\frac{1}{2}(a+b)$. 1830. Indicación. Comprobar, que la función es igual a cero en todo el eje OX y en todo el eje OY y valerse de la definición de las derivadas parciales. Cerciorarse de que $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. 1831. $\Delta f=4\Delta x+\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta x\,\Delta y+\Delta x^2\Delta y$; $df=4dx+dy$; a) $\Delta f-df=8$; b) $\Delta f-df=0{,}062$. 1833. $dz=3(x^2-y)\,dx+3(y^2-x)\,dy$. 1834. $dz=2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy$. 1835. $\partial z=\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(y\,dx-x\,dy)$. 1836. $dz=\operatorname{sen}2x\,dx-\operatorname{sen}2y\,dy$. 1837. $dz=y^2x^{y-1}\,dx+x^y(1+y\ln x)\,dy$. 1838. $dz=\frac{2}{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy)$. 1839. $df=\frac{1}{x+y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)$. 1840. $dz=0$. 1841. $dz=\frac{2}{x\operatorname{son}\frac{2y}{x}}\left(dy-\frac{y}{x}dx\right)$. 1842. $df(1,1)=dx-2dy$. 1843. $du=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$. 1844. $du=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$. 1845. $du=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\times\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)z\,dx+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)xz\,dy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz\right]$. 1846. $du=\frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(y\,dx+x\,dy-\frac{2xy}{z}dz\right)$. 1847. $df(3,4,5)=\frac{1}{25}(5\,dz-3dx-4dy)$. 1848. $dl=0{,}062$ cm; $\Delta l=0{,}065$ cm. 1849. 75 cm^3 (con relación a las dimensiones interiores). 1850. $\frac{1}{8}$ cm. Indicación. Suponer que la diferencial de superficie del sector es igual a cero y de aquí hallar la diferencial del radio. 1851. a) 1,00; b) 4,998; c) 0,273. 1853. Con exactitud hasta 4 m (más exactamente 4,25 m). 1854. $\pi\frac{\alpha g-\beta l}{g\sqrt{lg}}$.

1855. $d\alpha = \frac{1}{\rho}(dy\cos\alpha - dx\operatorname{sen}\alpha)$. 1856. $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$.

1857. $\frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$. 1858. $\frac{du}{dt} = 2t\ln t\operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$. 1859. $\frac{du}{dt} = 0$. 1860. $\frac{dz}{dx} = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{ctg} x - \operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x)$.

1861. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. 1862. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{dz}{dx} = x^y\left[\varphi'(x)\ln x + \frac{y}{x}\right]$.

1863. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_u(u, v) + ye^{xy}f'_v(u, v)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_u(u, v) + xe^{xy}f'_v(u, v)$.

1864. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$. 1865. $\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{x}\right)f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$. 1867. $\frac{du}{dx} = f'_x(x, y, z) + \varphi'(x)f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z)[\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)\varphi'(x)]$. 1873. El perímetro crece con una velocidad de 2 m/seg., el área aumenta con la velocidad de 70 m²/seg.

1874. $\frac{1+2t^2+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. 1875. $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ km/hora. 1876. $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. 1877. 1.

1878. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1879. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1880. $\frac{68}{13}$. 1881. $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$.

1882. a) (2; 0); b) (0; 0) y (1; 1); c) (7; 2; 1). 1884. $9i - 3j$. 1885. $\frac{1}{4}(5i - 3j)$.

1886. $6i + 3j + 2k$. 1887. $|\operatorname{grad} u| = 6$; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

1888. $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. 1889. $\operatorname{tg}\varphi \approx 8{,}944$; $\varphi \approx 83°37'$. 1891. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$. 1892. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$. 1893. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. 1894. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$. 1895. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$. 1896. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = 1$. 1897. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \alpha\beta\gamma x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$.

1898. $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = -x^2y\cos(xy) - 2x\operatorname{sen}(xy)$. 1899. $f''_{xx}(0, 0) = m(m-1)$; $f''_{xy}(0, 0) = mn$; $f''_{yy}(0, 0) = n(n-1)$. 1902. Indicación. Comprobar, utilizando las reglas de derivación y la definición de derivada parcial, que $f'_x(x, y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{y^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ (cuando $x^2+y^2 \neq 0$), $f'_x(0, 0) = 0$ y, por consiguiente, $f'_x(0, y) = -y$ cuando $x = 0$ y para cualquier y. De donde $f''_{xy}(0, y) = -1$, en particular, $f''_{xy}(0, 0) = -1$. Análogamente, hallamos que $f''_{xy}(0, 0) = 1$.

1903. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'_u(u,v)+4x^2f''_{uu}(u,v)+4xyf''_{uv}(u,v)+y^2f''_{vv}(u,v)$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f'_v(u,v)+4xyf''_{uu}(u,v)+2(x^2+y^2)f''_{uv}(u,v)+xyf''_{vv}(u,v)$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'_u(u,v)+4y^2f''_{uu}(u,v)+4xyf''_{uv}(u,v)+x^2f''_{vv}(u,v)$.

1904. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{xx}+2f''_{xz}\varphi'_x+f''_{zz}(\varphi'_x)^2+f'_z\varphi''_{xx}$.

1905. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{uu}(\varphi'_x)^2+2f''_{uv}\varphi'_x\psi'_x+f''_{vv}(\psi'_x)^2+f'_u\varphi''_{xx}+f'_v\psi''_{xx}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f''_{uu}\varphi'_x\varphi'_y+f''_{uv}(\varphi'_x\psi'_y+\psi'_x\varphi'_y)+f''_{vv}\psi'_x\psi'_y+f'_u\varphi''_{xy}+f'_v\psi''_{xy}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{uu}(\varphi'_y)^2+2f''_{uv}\varphi'_y\psi'_y+f''_{vv}(\psi'_y)^2+f'_u\varphi''_{yy}+f'_v\psi''_{yy}$.

1914. $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$. **1915.** $u(x,y)=x\varphi(y)+\psi(y)$.

1916. $d^2z=e^{xy}[(y\,dx+x\,dy)^2+2dx\,dy]$. **1917.** $d^2u=2(x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy)$.

1918. $d^2z=4\varphi''(t)(x\,dx+y\,dy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$. **1919.** $dz=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{xy}\times$

$\times\left(y\ln\dfrac{ex}{y}\,dx+x\ln\dfrac{x}{ey}\,dy\right)$; $d^2z=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\dfrac{ex}{y}+\dfrac{y}{x}\right)dx^2+\right.$

$\left.+2\left(xy\ln\dfrac{ex}{y}\ln\dfrac{x}{ey}+\ln\dfrac{x}{y}\right)dx\,dy+\left(x^2\ln^2\dfrac{x}{ey}-\dfrac{x}{y}\right)dy^2\right]$. **1920.** $d^2z=$

$=a^2f''_{uu}(u,v)\,dx^2+2abf''_{uv}(u,v)\,dx\,dy+b^2f''_{vv}(u,v)\,dy^2$. **1921.** $d^2z=$

$=(ye^xf'_v+e^{2y}f''_{uu}+2ye^{x+y}f''_{uv}+y^2e^{2x}f''_{vv})\,dx^2+2(e^yf'_u+e^xf'_v+xe^{2y}f''_{uu}+e^{x+y}\times$

$\times(1+xy)f''_{uv}+ye^{2x}f''_{vv})\,dx\,dy+(xe^yf'_u+x^2e^{2y}f''_{uu}+2xe^{x+y}f''_{uv}+e^{2x}f''_{vv})\,dy^2$.

1922. $d^3z=e^x(\cos y\,dx^3-3\operatorname{sen}y\,dx^2\,dy-3\cos y\,dx\,dy^2+\operatorname{sen}y\,dy^3)$. **1923.** $d^3z=$

$=-y\cos x\,dx^3-3\operatorname{sen}x\,dx^2\,dy-3\cos y\,dx\,dy^2+x\operatorname{sen}y\,dy^3$. **1924.** $df(1;2)=0$;

$d^2f(1;2)=6dx^2+2dx\,dy+4{,}5\,dy^2$. **1925.** $d^2f(0,0,0)=2dx^2+4dy^2+6dz^2-$

$-4dx\,dy+8dx\,dz+4dy\,dz$. **1926.** $xy+C$. **1927.** $x^3y-\dfrac{y^3}{3}+\operatorname{sen}x+C$.

1928. $\dfrac{x}{x+y}+\ln(x+y)+C$. **1929.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+C$.

1930. $\dfrac{x}{y}+C$. **1931.** $\sqrt{x^2+y^2}+C$. **1932.** $a=-1$, $b=-1$, $z=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

1933. $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+C$. **1934.** $x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C$.

1935. $x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+3z+C$. **1936.** $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}+C$.

1937. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. **1938.** $\lambda=-1$. Indicación. Escribir las condiciones de diferencial exacta para la expresión $X\,dx+Y\,dy$. **1939.** $f'_x=f'_y$.

1940. $u=\int\limits_a^{xy}f(z)\,dz+C$. **1941.** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$.

1942. La ecuación que determina a y, es la ecuación de un par de rectas.

1943. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^x \ln y}{1-xy^{x-1}}$. 1944. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(1-y)^3}$. 1945. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=3$ ó -1; $\left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)_{x=1}=8$ ó -8. 1946. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+ay}{ax-y}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$. 1947. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}$. 1948. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$. 1949. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z \operatorname{sen} x-\cos y}{\cos x-y \operatorname{sen} z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x \operatorname{sen} y-\cos z}{\cos x-y \operatorname{sen} z}$. 1950. $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$. 1951. $\frac{\partial z}{xx}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$. 1953. $\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}}{\psi'_y}$. 1954. $dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$; $d^2z=$ $=\frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dx\,dy+\frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2$. 1955. $dz=0$; $d^2z=\frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$. 1956. $dz=\frac{z}{1-z}(dx+dy)$; $d^2z=\frac{z}{(1-z)^3}(dx^2+2dx\,dy+dy^2)$.

1981. a) $2x-4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$; b) $3x+4y-6z=0$; $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$; c) $x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-R=0$, $\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{z-R}{0}$. 1982. $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. 1983. $2x+4y+12z-169=0$ 1985. $x+4y+6z=\pm 21$. 1986. $x\pm y\pm z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 1987. En los puntos $(1;\pm 1;0)$ los planos tangentes son paralelos al plano XOZ y en los puntos $(0;0;0)$ y $(2;0;0)$ al plano YOZ. La superficie carece de puntos en los cuales el plano tangente sea paralelo al XOY. 1991. $\frac{\pi}{3}$. 1994. La proyección sobre el plano XOY: $\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2-xy-1=0. \end{cases}$ La proyección sobre el plano YOZ: $\begin{cases} x=0, \\ \frac{3y^2}{4}+z^2-1=0. \end{cases}$ La proyección sobre el plano XOZ: $\begin{cases} y=0, \\ \frac{3x^2}{4}+z^2-1=0. \end{cases}$

Indicación. La línea de contacto de la superficie con el cilindro, que proyecta esta superficie sobre algún plano, representa de por sí el lugar geométrico de los puntos, en los que el plano tangente a la superficie dada es perpendicular al plano de proyección.

2008. $z_{\text{mín}}=0$ cuando $x=1$, $y=0$. 2009. No hay extremos. 2010. $z_{\text{mín}}=-1$ cuando $x=1$ e $y=0$. 2011. $z_{\text{máx}}=108$ cuando $x=3$ e $y=2$. 2012. $z_{\text{mín}}=-8$ cuando $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ y cuando $x=-\sqrt{2}$ e $y=\sqrt{2}$. Cuando $x=y=0$ no hay extremos. 2013. $z_{\text{máx}}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ en los puntos $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ y $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$; $z_{\text{mín}}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ en los puntos $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$, y $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$, y $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$. 2114. $z_{\text{máx}}=1$ cuando $x=y=0$.

2015. $z_{\text{mín}}=0$ cuando $x=y=0$; un máximo amplio $z=\frac{1}{e}$ en los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=1$. 2016. $z_{\text{máx}}=\sqrt{3}$ cuando $x=1$, $y=-1$. 2016. 1. $z_{\text{mín}}=6$ cuando $x=4$, $y=2$. 2016. 2. $z_{\text{máx}}=8e^{-2}$ cuando $x=-4$, $y=-2$; no hay extremo cuando $x=0$, $y=0$. 2017. $u_{\text{mín}}=-\frac{4}{3}$ cuando $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$ y $z=1$. 2018. $u_{\text{mín}}=4$ cuando $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$. 2019. Esta ecuación determina dos funciones, de las cuales, una tiene máximo ($z_{\text{máx}}=8$) cuando $x=1$, $y=-2$, y la otra, un mínimo ($z_{\text{mín}}=-2$) cuando $x=1$, $y=-2$; en los puntos de la circunferencia $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ cada una de estas funciones tiene un extremo en la frontera, $z=3$. Indicación. Las funciones que se mencionan en la respuesta se determinan explícitamente por las igualdades $z=3\pm\sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$ y existen, por consiguiente, solamente dentro y en la frontera de la circunferencia $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, en cuyos puntos ambas funciones toman el valor $z=3$. Este valor es el menor para la primera función y el mayor para la segunda. 2020. Una de las funciones determinada por la función tiene máximo ($z_{\text{máx}}=-2$) cuando $x=-1$, $y=2$; la otra tiene mínimo ($z_{\text{mín}}=1$) cuando $x=-1$, $y=2$; ambas funciones tienen extremo en la frontera en los puntos de la curva $4x^3-4y^2-12x+16y-33=0$. 2021. $z_{\text{máx}}=\frac{1}{4}$ cuando $x=y=\frac{1}{2}$. 2022. $z_{\text{máx}}=5$ cuando $x=1$, $y=2$; $z_{\text{mín}}=-5$ cuando $x=-1$, $y=-2$. 2023. $z_{\text{mín}}=\frac{36}{13}$ cuando $x=\frac{18}{13}$, $y=\frac{12}{13}$. 2024. $z_{\text{máx}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ cuando $x=\frac{7\pi}{8}+k\pi$, $y=\frac{9\pi}{8}+k\pi$; $z_{\text{mín}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ cuando $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$, $y=\frac{5\pi}{8}+k\pi$. 2025. $u_{\text{mín}}=-9$ cuando $x=-1$, $y=2$, $z=-2$; $u_{\text{máx}}=9$ cuando $x=1$, $y=-2$, $z=2$. 2026. $u_{\text{máx}}=a$ cuando $x=\pm a$, $y=z=0$; $u_{\text{mín}}=c$ cuando $x=y=0$, $z=\pm c$. 2027. $u_{\text{máx}}=2\cdot4^2\cdot6^3$ cuando $x=2$, $y=4$, $z=6$. 2028. $u_{\text{máx}}=4\frac{4}{27}$ en los puntos $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$; $u_{\text{mín}}=4$ en los puntos (2; 2; 1) (2; 1; 2) (1; 2; 2). 2030. a) El valor del máximo absoluto es $z=3$ cuando $x=0$, $y=1$, b) el valor del máximo absoluto es $z=2$ cuando $x=1$, $y=0$. 2031. a) El valor del máximo absoluto es $z=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ cuando $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=\sqrt{\frac{1}{3}}$; el valor del mínimo absoluto es $z=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ cuando $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=-\sqrt{\frac{1}{3}}$; b) el valor del máximo absoluto es $z=1$ cuando $x=\pm1$, $y=0$; el valor del mínimo absoluto es $z=-1$ cuando $x=0$, $y=\pm1$. 2032. El valor del máximo absoluto es $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cuando $x=y=\frac{\pi}{3}$ (máximo interno); el valor del mínimo abso-

luto es $z=0$ cuando $x=y=0$ (mínimo de frontera). 2033. El valor del máximo absoluto es $z=13$ cuando $x=2$, $y=-1$ (máximo de frontera); el valor del mínimo absoluto es $z=-1$ cuando $x=y=1$ (mínimo interno) y cuando $x=0$, $y=-1$ (mínimo de frontera). 2034. Cubo. 2035. $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. 2036. Triángulo equilátero. 2037. Cubo. 2038. $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. 2039. $M\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. 2040. Los lados del triángulo son: $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ y $\frac{p}{2}$. 2041. $x=\frac{m_1x_1+m_2x^2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$. 2042. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. 2043. Las dimensiones del paralelepípedo son $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, donde a, b y c son los semiejes del elipsoide. 2044. $x=y=2\delta+\sqrt[3]{2V}$, $z=\frac{x}{2}$. 2045. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. 2046. El eje mayor es $2a=6$, el eje menor, $2b=2$. Indicación. El cuadrado de la distancia del punto (x, y) de la elipse a su centro (origen de coordenadas) es igual a x^2+y^2. El problema se reduce a buscar el extremo de la función x^2+y^2, con la condición de que $5x^2+8xy+5y^2=9$. 2047. El radio de la base del cilindro es $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, la altura, $R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$, donde R es el radio de la esfera. 2048. El canal debe unir el punto $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$ de la parábola con el punto $\left(\frac{11}{8};\ -\frac{5}{8}\right)$ de la recta; su longitud es igual a $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. 2049. $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$. 2050. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. Indicación. Es evidente, que el punto M, en que el rayo pasa de un medio a otro, deberá encontrarse entre A_1 y B_1, siendo $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M=b\operatorname{tg}\beta$. La duración del movimiento del rayo es igual a $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. El problema se reduce a buscar el mínimo de la función $f(\alpha, \beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ con la condición de que $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=c$. 2051. $\alpha=\beta$. 2052. $I_1:I_2:I_3=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\frac{1}{R_3}$. Indicación. Hallar el mínimo de la función $f(I_1, I_2, I_3)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3$, con la condición de que $I_1+I_2+I_3=I$.

2071. $7\frac{1}{3}$. 2072. $\sqrt{9+4\pi^2}$. 2073. $\sqrt{3}\,(e^t-1)$. 2074. 42. 2075. 5. 2076. x_0+z_0. 2077. $11+\frac{\ln 10}{9}$. 2079. a) recta; b) parábola; c) elipse; d) hipérbola. 2080. 1) $\frac{da}{dt}\,a^0$; 2) $a\,\frac{da^0}{dt}$; 3) $\frac{da}{dt}\,a^0+a\,\frac{da^0}{dt}$. 2081. $\frac{d}{dt}(abc)=$ $=\left(\frac{da}{dt}\,bc\right)+\left(a\,\frac{db}{dt}\,c\right)+\left(ab\,\frac{dc}{dt}\right)$. 2082. $4t\,(t^2+1)$. 2083. $x=3\cos t$; $y=4\operatorname{sen} t$ (elipse); $v=4\boldsymbol{j}$, $w=-3\boldsymbol{i}$ cuando $t=0$; $v=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$, $w=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{i}-2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$ cuando $t=\frac{\pi}{4}$; $v=-3\boldsymbol{i}$, $w=-4\boldsymbol{j}$ cuando $t=\frac{\pi}{2}$. 2084. $x=2\cos t$, $y=2\operatorname{sen} t$, $z=3t$ (hélice circular); $v=-2\boldsymbol{i}\operatorname{sen} t+2\boldsymbol{j}\cos t+$ $+3\boldsymbol{k}$; $v=\sqrt{13}$ para cualquier t; $w=-2\boldsymbol{i}\cos t-2\boldsymbol{j}\operatorname{sen} t$; $w=2$ para cualquier t, $v=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $w=-2\boldsymbol{i}$ cuando $t=0$; $v=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$, $w=-2\boldsymbol{j}$ cuando $t=\frac{\pi}{2}$. 2085. $x=\cos\alpha\cos\omega t$; $y=\operatorname{sen}\alpha\cos\omega t$; $z=\operatorname{sen}\omega t$ (circunferencia); $v=$ $=-\omega\boldsymbol{i}\cos\alpha\operatorname{sen}\omega t-\omega\boldsymbol{j}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega t+\omega\boldsymbol{k}\cos\omega t$; $v=|\omega|$; $w=-\omega^2\boldsymbol{i}\cos\alpha\cos\omega t=$ $-\omega^2\boldsymbol{j}\operatorname{sen}\alpha\cos\omega t-\omega^2\boldsymbol{k}\operatorname{sen}\omega t$; $w=\omega^2$. 2086. $v=\sqrt{v_{x_0}^2+v_{y_0}^2+(v_{x_0}-gt)^2}$; $w_x=w_y=0$; $w_z=-g$; $w=g$. 2088. $\omega\sqrt{a^2+h^2}$, donde $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular de rotación del tornillo. 2089. $\sqrt{a^2\omega^2+v_0^2-2a\omega v_0\operatorname{sen}\omega t}$.

2113. $4\frac{2}{3}$. **2114.** $\ln\frac{25}{24}$. **2115.** $\frac{\pi}{12}$. **2116.** $\frac{9}{4}$. **2117.** 50,4. **2118.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **2119.** 2,4. **2120.** $\frac{\pi}{6}$. **2121.** $x=\frac{y^2}{4}-1$; $x=2-y$; $y=-6$; $y=2$. **2122.** $y=x^2$; $y=x+9$; $x=1$; $x=3$. **2123.** $y=x$; $y=10-x$; $y=0$; $y=4$. **2124.** $y=\frac{x}{3}$; $y=2x$; $x=1$; $x=3$. **2125.** $y=0$; $y=\sqrt{25-x^2}$; $x=0$; $x=3$. **2126.** $y=x^2$; $y=x+2$; $x=-1$; $x=2$. **2127.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 f(x, y)\,dx = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy$. **2128.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x, y)\,dx =$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy. \qquad \textbf{2129.} \qquad \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x, y)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy. \qquad \textbf{2130.} \qquad \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x}^{2x+3} f(x, y)\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_4^5 dy \int\limits_1^2 f(x, y)\,dx + \int\limits_5^7 dy \int\limits_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x, y)\,dx. \qquad \textbf{2131.} \qquad \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x, y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\,dx = \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

$$\textbf{2132.} \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{2x^2}^2 f(x, y)\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y)\,dx. \quad \textbf{2133.} \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx. \qquad \textbf{2134.} \quad \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy +$$

$$+\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\, dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\, dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx +$$

$$+\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\, dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

2135. a) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx$; b) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy =$

$$= \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx; \quad \text{c)} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y)\, dx; \quad \text{d)} \int_{-1}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y)\, dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y} f(x, y)\, dx;$$

e) $$\int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x, y)\, dx = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_a^{2a} dx \int_0^a f(x, y)\, dy +$$

$$+\int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^{a} f(x, y)\, dy. \quad \textbf{2136.} \int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt[3]{\frac{y}{3}}} f(x, y)\, dx. \quad \textbf{2137.} \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\, dx +$$

$$+\int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)\, dx. \quad \textbf{2138.} \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

2139. $$\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x, y)\, dx.$$

2140. $\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx + \int_0^{2\sqrt{2a}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\,dx.$

2141. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\,dy.$ 2142. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy +$

$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y)\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\,dy.$ 2143. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\,dx.$

2144. $\int_0^1 dy \int_{\arcsen y}^{\pi-\arcsen y} f(x, y)\,dx.$ 2145. $\frac{1}{6}$. 2146. $\frac{1}{3}$. 2147. $\frac{\pi}{2}a$. 2148. $\frac{\pi}{6}$.

2149. 6. 2150. $\frac{1}{2}$. 2151. $\ln 2$. 2152. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{15\pi-16}{150}$; c) $2\frac{2}{5}$. 2153. $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$.

2154. $\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy = \frac{4}{3}$. 2155. $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. 2156. $\frac{5}{2}\pi R^3$. Indicación

$\iint_{(S)} y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi R} dx \int_0^{y=f(x)} y\,dy = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)\,dt \int_0^{R(1-\cos t)} y\,dy,$ donde esta

última integral se obtiene de la anterior como resultado del cambio $x = R(t - \operatorname{sen} t)$. 2157. $\frac{R^4}{80}$. 2158. $\frac{1}{6}$. 2159. $a^2 + \frac{R^2}{2}$.

2160. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,dr.$

2161. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r^2)\,dr.$ 2162. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,dr.$

2163. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}} r\,dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr.$

2164. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,dr.$

2165. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr = \frac{a^3}{12}$. 2166. $\frac{3}{2}\pi a^4$. 2167. $\frac{\pi a^3}{3}$. 2168. $\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right)a^3$.

2169. $\frac{\pi a^3}{6}$. 2170. $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$. 2171. $\frac{2}{3}\pi ab$. Indicación. El jacobiano $I=abr$. Los límites de integración: $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant 1$.

2175. a) $4\frac{1}{2}$; $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx +$

$+\int_1^2 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$; b) $\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{2}$; $\int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$. 2176. a) $\frac{9}{2}$; b) $\left(2+\frac{\pi}{4}\right)a^2$.

2177. $\frac{7a^2}{120}$. 2178. $\frac{10}{3}a^2$. 2179. π. Indicación. $-1\leqslant x\leqslant 1$. 2180. $\frac{16}{3}\sqrt{15}$.

2181. $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$. 2182. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. 2183. $\frac{5}{4}\pi a^2$. 2184. 6.

2188. $v=\int_0^1 dy \int_y^1 (1-x)\,dx=$

$=\int_0^1 dx \int_0^x (1-x)\,dy$. 2193. $\frac{\pi a^3}{6}$. 2194. $\frac{3}{4}$. 2195. $\frac{1}{6}$. 2196. $\frac{a^3}{3}$. 2197. $\frac{\pi r^4}{4a}$.

2198. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. 2199. $\frac{88}{105}$. 2200. $\frac{a^3}{18}$. 2201. $\frac{abc}{3}$. 2202. $\pi a^3(\alpha-\beta)$.

2203. $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$. 2204. $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$. 2205. $\frac{\pi a^3}{3}$. 2206. $\frac{4}{3}\pi abc$.

2207. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$. 2208. $\frac{32}{9}a^3$. 2209. $\pi a(1-e^{-R^2})$. 2210. $\frac{3\pi ab}{2}$.

2211. $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$. 2212. $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$. Indicación. Efectuar el cambio de variables $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$. 2213. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. 2214. $4(m-n)R^2$.

2215. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. Indicación. Integrar en el plano YOZ. 2216. $4a^2$.

2217. $8a^2 \operatorname{arcsen}\frac{b}{a}$. 2218. $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1)$. 2219. $8a^2$. 2220. $3\pi^2$. Indicación. Pasar a las coordenadas polares. 2220. 1. Indicación. Proyectar la superficie sobre el plano de coordenadas XOY. 2220. 2. $a^2\sqrt{2}$. 2221. $\sigma=$

$=\frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. Indicación. Pasar a las coordenadas polares. 2222. $\frac{16}{9}a^3$ y $8a^2$. Indicación Pasar a las coordenadas polares.

2223. $8a^2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{5}$. Indicación. $\sigma = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$

$= 8a \int_0^{\frac{a}{2}} \operatorname{arcsen} \frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$. Integrar por partes y después hacer la sustitución $x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} t$; el resultado debe transformarse. 2224. $\frac{\pi}{4}\left(b\sqrt{b^2+c^2} - a\sqrt{a^2+c^2} + c^2 \ln \frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. Indicación. Pasar a las coordenadas polares. 2225. $\frac{2\pi\delta R^2}{3}$. 2226. $\frac{a^3b}{12}$; $\frac{a^2b^2}{24}$. 2227. $\bar{x} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$; $\bar{y} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}$.

2228. $\bar{x} = \frac{5}{6}a$; $\bar{y} = 0$. 2229. $\bar{x} = \frac{2a \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$; $\bar{y} = 0$. 2230. $\bar{x} = \frac{2}{5}$; $\bar{y} = 0$. 2231. $I_X = 4$.

2232. a) $I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$; b) $I_X = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$. 2233. $I = \frac{2}{3}a^4$. 2234. $\frac{8}{5}a^4$.

Indicación. $I = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2\,dy$. 2235. $16 \ln 2 - 9\frac{3}{8}$. Indicación. La distancia desde el punto (x, y) a la recta $x = y$ es igual a $d = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, y se halla valiéndose de la ecuación normal de la recta.

2236. $I = \frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2}+1)]$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. Indicación. Situando el origen de coordenadas en el vértice, a partir del cual, la distancia es proporcional a la densidad de la lámina, dirigimos los ejes de coordenadas según los lados del cuadrado. El momento de inercia se determina con respecto al eje OX. Pasando a las coordenadas polares, tenemos: $I_x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a \sec \varphi} kr\,(r \operatorname{sen} \varphi)^2\, r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \operatorname{cosec} \varphi} kr\,(r \operatorname{sen} \varphi)^2 r\,dr$.

2237. $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$. 2238. $I_0 = \frac{\pi a^4}{2}$. 2239. $\frac{35}{12}\pi a^4$. Indicación. Tomar por variables de integración t e y (véase el problema 2156).

2240. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\,dz$. 2241. $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{H} f(x, y, z)\,dz$.

2242. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x, y, z)\, dz$. 2243. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \times$

$\times dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz$. 2244. $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$. 2245. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$.

2246. $\frac{\pi^2 a^2}{8}$. 2247. $\frac{1}{720}$. 2248. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. 2249. $\frac{\pi a^2}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

2250. $\frac{59}{480}\pi R^5$. 2251. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 2252. $\frac{4}{5}\pi abc$. 2253. $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$. 2254. πR^3. 2255. $\frac{8}{9}a^2$.

2256. $\frac{8}{3}r^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2257. $\frac{4}{15}\pi R^5$. 2258. $\frac{\pi}{10}$. 2259. $\frac{32}{9}a^2h$. 2260. $\frac{3}{4}\pi a^3$.

Resolución. $v=2\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dz = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} r\, dr \int\limits_{0}^{\frac{r^2}{2a}} dh =$

$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} \frac{r^3\, dr}{2a} = \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a\cos\varphi)^4}{4}\, d\varphi = \frac{3}{4}\pi a^3$. 2261. $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. Indicación. Pasar a las coordenadas esféricas. 2262. $\frac{19}{5}\pi$. Indicación. Pasar a las coordenadas cilíndricas. 2263. $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$. 2264. πabc.

2264.1. $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$. 2264.2. $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$. 2265. $\frac{abc}{2}(a+b+c)$.

2266. $\frac{ab}{24}(6c^2-a^2-b^2)$. 2267. $\bar{x}=0$; $\bar{y}=0$; $\bar{z}=\frac{2}{5}a$. Indicación. Introducir las coordenadas esféricas. 2268. $\bar{x}=\frac{4}{3}$, $\bar{y}=0$, $\bar{z}=0$. 2269. $\frac{\pi a^2 h}{12}(3a^2+4h^2)$. Indicación. El eje del cilindro se toma como eje OZ, el plano de la base del cilindro como plano XOY. El momento de inercia se calcula con respecto al eje OX. Después de pasar a las coordenadas cilíndricas, el cuadrado de la distancia del elemento $r\,d\varphi\,dr\,dz$ al eje OX es igual a $r^2\operatorname{sen}^2\varphi+z^2$. 2270. $\frac{\pi\rho h a^2}{60}(2h^2+3a^2)$. Indicación. La base del cono se toma como plano XOY; el eje del cono, como eje OZ. El momento de inercia se calcula con respecto al eje OX. Pasando a las coordenadas cilíndricas, para los puntos de la superficie del cono tenemos: $r=\frac{a}{h}(h-z)$, y el cuadrado de la distancia del elemento $r\,d\varphi\,dr\,dz$ al eje OX será igual a $r^2\operatorname{sen}^2\varphi+z^2$. 2271. $2\pi k\rho h(1-\cos\alpha)$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad y ρ, la densidad. Resolución. El vértice del cono se toma como origen de coordenadas y su eje, como eje OZ. Si se introducen las

coordenadas esféricas, la ecuación de la superficie lateral del cono será $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, y la ecuación del plano de la base, $r = \frac{h}{\operatorname{sen} \psi}$. A causa de la simetría se tiene, que la tensión resultante está dirigida por el eje OZ. La masa del elemento de volumen $dm = \rho r^2 \cos \psi \, d\varphi \, d\psi \, dr$, donde, ρ, es la densidad. La componente, por el eje OZ, de la atracción que ejerce este elemento sobre la unidad de masa situada en el punto 0 es igual a $\frac{k \, dm}{r^2} \operatorname{sen} \psi = k\rho \operatorname{sen} \psi \cos \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr$. La atracción resultante es igual a $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\psi \int_0^{h \operatorname{cosec} \psi} k\rho \operatorname{sen} \psi \cos \psi \, dr$. **2272.** Resolución. Introducimos las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) con el origen en el centro de la esfera y de forma que el eje OZ pase por el punto material, cuya masa se supone igual a m. La distancia desde este punto hasta el centro de la esfera, la designamos con la letra ξ. Sea $r = \sqrt{\rho^2 + (\xi - z)^2}$ la distancia entre el elemento de volumen dv y la masa m. La fuerza de atracción del volumen elemental dv de la esfera y del punto material m, está dirigida a lo largo de r y numéricamente es igual a $-k\gamma m \frac{dv}{r^2}$, donde $\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ es la densidad de la esfera y $dv = \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$ el volumen elemental. La proyección de esta fuerza sobre el eje OZ será: $dF = -\frac{km\gamma \, dv}{r^2} \cos(\widehat{rz}) = -km\gamma \frac{\xi - z}{r^3} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$.

De donde $F = -km\gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^{R} (\xi - z) \, dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{\rho \, d\rho}{r^3} = km\gamma \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{\xi^2}$, pero, como $\frac{4}{3}\gamma\pi R^3 = M$, tendremos $F = \frac{kMm}{\xi^2}$.

2293. 0. 2294. $\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$. 2295. $\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

2296. $\dfrac{256}{15}a^3$. 2297. $\dfrac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$. 2298. $\dfrac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$. 2299. $a^2\sqrt{2}$.

2300. $\dfrac{1}{54}(56\sqrt{7}-1)$. 2301. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\dfrac{2\pi b}{a}$. 2302. $2\pi a^2$. 2303. $\dfrac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

Indicación. $\int\limits_C f(x, y)\,ds$ geométricamente se puede interpretar como el área de la superficie cilíndrica que tiene la generatriz paralela al eje OZ, cuya base es el contorno de integración y las alturas iguales a los valores de la función subintegral. Por esto, $S=\int\limits_C x\,ds$, donde C es el arco OA de la parábola $y=\dfrac{3}{8}x^2$, que une los puntos (0; 0) y (4; 6). 2304. $a\sqrt{3}$.

2305. $2\left(b^2+\dfrac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$. 2306. $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\right.$

$\left.+\dfrac{a^2}{2b}\ln\dfrac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)$. 2307. $\left(\dfrac{4}{3}a,\ \dfrac{4}{3}a\right)$. 2308. $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$.

2309. $\dfrac{kMmb}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}$. 2310. $40\dfrac{19}{30}$. 2311. $-2\pi a^2$. 2312. a) $\dfrac{4}{3}$; b) 0; c) $\dfrac{12}{5}$;

d) -4; e) 4. 2313. En todos los casos 4. 2314. -2π. Indicación. Utilícese las ecuaciones paramétricas de la circunferencia. 2315. $\dfrac{4}{3}ab^2$.

2316. $-2\operatorname{sen}2$. 2317. 0. 2318. a) 8; b) 12; c) 2; d) $\dfrac{3}{2}$; e) $\ln(x+y)$;

f) $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. 2319. a) 62; b) 1; c) $\dfrac{1}{4}+\ln 2$; d) $1+\sqrt{2}$.

2320. $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. 2322. a) $x^2+3xy-2y^2+C$; b) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$;

c) $e^{x-y}(x+y)+C$; d) $\ln|x+y|+C$. 2323. $-2\pi a(a+b)$. 2324. $-\pi R^2\cos^2\alpha$.

2325. $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$. 2326. a) -2; b) $abc-1$; c) $5\sqrt{2}$; d) 0. 2327. $I=$ $=\iint\limits_{(S)} y^2\,dx\,dy$. 2328. $-\frac{4}{3}$. 2329. $\frac{\pi R^4}{2}$. 2330. $-\frac{1}{3}$. 2331. 0. 2332. a) 0; b) $2n\pi$. Indicación. En el caso b), la fórmula de Green se emplea en el recinto comprendido entre el contorno C y un círculo de radio suficientemente pequeño con centro en el origen de coordenadas. 2333. Resolución. Si se supone que la dirección de la tangente coincide con la dirección del recorrido positivo del contorno, tendremos que $\cos(X, n)=$ $=\cos(Y, t)=\frac{dy}{ds}$, por consiguiente, $\oint\limits_C \cos(X, n)\,ds=\oint\limits_C \frac{dy}{ds}\,ds=\oint\limits_C dy=0$. 2334. $2S$, donde S es el área limitada por el contorno C. 2335. -4. Indicación. La fórmula de Green no se puede emplear. 2336. πab. 2337. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2338. $6\pi a^2$. 2339. $\frac{3}{2}a^2$. Indicación. Poner $y=tx$, donde t es un parámetro. 2340. $\frac{a^2}{60}$. 2341. $\pi(R+r)(R+2r)$; $6\pi R^2$ cuando $R=r$. Indicación. La ecuación de la epicicloide tiene la forma $x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y=(R+r)\operatorname{sen} t-r\operatorname{sen}\frac{R+r}{r}t$, donde t es el ángulo de giro del radio del círculo fijo, trazado en el punto de contacto. 2342. $\pi(R-r)(R-2r)$; $\frac{3}{8}\pi R^2$ cuando $r=\frac{R}{4}$. Indicación. La ecuación de la hipocicloide se obtiene de la ecuación de la epicicloide correspondiente (véase el problema 2341) sustituyendo r por $-r$. 2343. FR. 2344. $mg(z_1-z_2)$. 2345. $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. 2346. a) El potencial $U=-mgz$, el trabajo $mg(z_1-z_2)$; b) el potencial $U=\frac{\mu}{r}$, el trabajo $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; c) el potencial $U=-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$, el trabajo $\frac{k^2}{2}(R^2-r^2)$. 2347. $\frac{8}{3}\pi a^4$. 2348. $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. 2349. 0. 2350. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2351. $\frac{\pi a^4}{2}$. 2352. $\frac{3}{4}$. 2353. $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. 2354. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. 2355. a) 0; b) $-\iint\limits_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$. 2356. 0. 2357. 4π. 2358. $-\pi a^2$. 2359. $-a^3$. 2360. $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 2361. 0. 2362. $2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

2363. $2\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2364.** $\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz$.

2365. $3a^4$. **2366.** $\frac{a^3}{2}$. **2367.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **2368.** $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

2704. Sí. 2705. No. 2706. Sí. 2707. Sí. 2708. Sí. 2709. a) Sí. b) no. 2710. Sí. 2714. $y-xy'=0$. 2715. $xy'-2y=0$. 2716. $y-2xy'=0$. 2717. $x\,dx+y\,dy=0$. 2718. $y'=y$. 2719. $3y^2-x^2=2xyy'$. 2720. $xyy'(xy^2+1)=1$. 2721. $y=xy'\ln\frac{x}{y}$. 2722. $2xy''+y'=0$. 2723. $y''=y'-2y=0$. 2724. $y''+4y=0$. 2725. $y''-2y'++y=0$. 2726. $y''=0$, 2727. $y'''=0$. 2728. $(1+y'^2)\,y'''-3y'y''^2=0$. 2729. $y^2--x^2=25$. 2730. $y=xe^{2x}$. 2731. $y=-\cos x$. 2732. $y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$.

2742. $\operatorname{ctg}^2 y=\operatorname{tg}^2 x+C$. 2743. $x=\frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$; $y=0$. 2744. $x^2+y^2=\ln Cx^2$. 2745. $y=a+\frac{Cx}{1+ax}$. 2746. $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$; $x=0$. 2747. $y=C\operatorname{sen} x$. 2748. $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}(1+e^x)$ 2749. $1+y^2=\frac{2}{1-x^2}$. 2750. $y=1$. 2751. $\operatorname{arctg}(x+y)=$ $=x+C$. 2752. $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$. 2753. $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$. 2754. $5x+10y+C=3\ln|10x-5y+6|$. 2755. $\rho=\frac{C}{1-\cos\varphi}$ o $y^2=2Cx+C^2$.

2756. $\ln \rho = \frac{1}{2\cos^2 \varphi} - \ln|\cos \varphi| + C$ o $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C$. 2757. La recta $y = Cx$ o la hipérbola $y = \frac{C}{x}$. Indicación. El segmento de tangente es igual a $\sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}$. 2758. $y^2 - x^2 = C$. 2759. $y = Ce^{\frac{x}{a}}$. 2760. $y^2 = 2px$. 2761. $y = ax^2$. Indicación. Por la condición $\frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx} = \frac{3}{4}x$. Derivando dos veces respecto a x, obtenemos la ecuación diferencial. 2762. $y^2 = \frac{1}{3}x$. 2763. $y = \sqrt{4 - x^2} + 2\ln\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}$.

2768. $y = x \ln \frac{C}{x}$.

2769. $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$. 2770. $x = Ce^{\frac{x}{y}}$. 2771. $(x - C)^2 - y^2 = C^2$; $(x - 2)^2 - y^2 = 4$; $y = \pm x$. 2772. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$. 2773. $y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$; $x = 0$.

2779. $x^2 = 1 - 2y$. 2780. Paraboloide de revolución. Resolución. Gracias a su simetría, el espejo que se busca es una superficie de revolución. El origen de coordenadas se sitúa en el foco luminoso; el eje OX es la dirección del haz de rayos. Si la tangente a cualquier puntó $M(x, y)$ de la curva de la sección hecha por el plano XOY en la superficie que se busca, forma con el eje OX un ángulo φ, mientras que el segmento que une el origen de coordenadas con este punto $M(x, y)$ forma un ángulo α con el mismo eje, tendremos que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}$. Pero, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ y $\operatorname{tg}\varphi + y'$. La ecuación diferencial que se busca es $y - yy'^2 = 2xy'$ y su solución $y^2 = 2Cx + C^2$. La sección plana es una parábola. La superficie buscada, un paraboloide de revolución. 2781. $(x - y)^2 - Cy = 0$. 2782. $x^2 = C(2y + C)$. 2783. $(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2$. Indicación. Partir de que el área es igual a $\int_a^x y\,dx$. 2784. $y = Cx - x\ln|x|$. 2785. $y = Cx + x^2$. 2786. $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$. 2787. $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = C$. Indicación. La ecuación es lineal con respecto a x y $\frac{dx}{dy}$.

2788. $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$. 2789. $y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}$. 2790. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsen x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 2791. $y = \frac{x}{\cos x}$.

2797. $xy = Cy^2 + a^2$.

2798. $y^2 + x + ay = 0$. 2799. $x = y \ln \frac{y}{a}$. 2800. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$. 2801. $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$. 2802. $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$. 2803. $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$. 2804. $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$. 2805. $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$. 2806. $x^2 - y^2 = Cy^3$. 2807. $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$.

2832. La astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. 2833. a) Homogénea; $y=xu$; b) lineal con respecto a x; $x=uv$; c) lineal con respecto a y; $y=uv$; d) ecuación de Bernoulli; $y=uv$; e) con variables separables; f) ecuación de Clairaut; reducirla a la forma $y=xy'\pm\sqrt{y'^3}$; g) ecuación de Lagrange; derivarla con respecto a x; h) ecuación de Bernoulli; $y=uv$; i) reducible a una ecuación con variables separables; $u=x+y$; j) ecuación de Lagrange; derivarla con respecto a x; k) ecuación de Bernoulli con relación a x; $x=uv$; l) ecuación en diferenciales exactas; m) lineal; $y=uv$; n) ecuación de Bernoulli; $y=uv$. 2834. a) $\operatorname{sen}\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$; b) $x=y\cdot e^{Cy+1}$. 2835. $x^2+y^4=Cy^2$. 2836. $y=\frac{x}{x^2+C}$. 2837. $xy\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)=1$. 2838. $y=Cx+C\ln C$; la solución singular es $y=-e^{-(x+1)}$. 2839. $y=Cx+\sqrt{-aC}$; la solución singular es $y=\frac{a}{4x}$. 2840. $3y+\ln\frac{|x^3-1|}{(y+1)^6}=C$. 2841. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\operatorname{arctg} y-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$. 2842. $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$. 2843. $x=y^2(C-e^{-y})$. 2844. $y=Ce^{-\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen} x-1$. 2845. $y=ax+C\sqrt{1-x^2}$. 2846 $y=\frac{x}{x+1}(x+\ln|x|+C)$. 2847. $x=Ce^{\operatorname{sen} y}-2a(1+\operatorname{sen} y)$. 2848. $\frac{x^2}{2}+3x+y+\ln[(x-3)^{10}|y-1|^3]=C$. 2849. $2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{2x}=\ln Cx$. 2850. $x^2=1-\frac{2}{y}+Ce^{-\frac{2}{y}}$. 2851. $x^3=Ce^y-y-2$. 2852. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$. 2853. $y=x\operatorname{arcsen}(Cx)$. 2854. $y^2=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\operatorname{sen} x+\frac{4}{5}\cos x$. 2855. $xy=C(y-1)$. 2856. $x=Ce^y-\frac{1}{2}(\operatorname{sen} y+\cos y)$. 2857. $py=C(p-1)$. 2858. $x^4=Ce^{4y}-y^3-\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{8}y-\frac{3}{32}$ 2859. $(xy+C)(x^2y+C)=0$. 2860. $\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x}{y}=C$. 2861. $xe^y-y^2=C$. 2862. $\begin{cases}x=\frac{C}{p^2}-\frac{\sqrt{1+p^2}}{2p}+\frac{1}{2p^2}\ln(p+\sqrt{1+p^2}),\\ y=2px+\sqrt{1+p^2}.\end{cases}$

2863. $y=xe^{Cx}$. 2864. $2e^x-y^4=Cy^2$. 2865. $\ln|y+2|+2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}=C$. 2866. $y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{x}-2=0$. 2867. $x^2\cdot y=Ce^{\frac{y}{n}}$. 2868. $x+\frac{x}{y}=C$. 2869. $y=\frac{C-x^4}{4(x^2-1)^{3/2}}$. 2870. $y=C\operatorname{sen} x-a$. 2871. $y=\frac{a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$. 2872. $(y-Cx)(y^2-x^2+C)=0$. 2873. $y=Cx+\frac{1}{C^2}$, $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$. 2874. $x^3+x^2y-y^2x-y^3=C$. 2875. $p^2+4y^2=Cy^3$. 2876. $y=x-1$. 2877. $y=x$.

2878. $y=2$. 2879. $y=0$. 2880. $y=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x+\cos x)$. 2881. $y=\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)$. 2882. $y=e^{-x}+2x-2$. 2883. a) $y=x$; b) $y=Cx$, donde C es arbitraria; el punto (0; 0) es el punto singular de la ecuación diferencial. 2884. a) $y^2=x$; b) $y^2=2px$; (0, 0) es el punto singular. 2885. a) $(x-C)^2+y^2=C^2$; b) no tiene solución; c) $x^2+y^2=x$; (0, 0) es el punto singular. 2886. $y=e^{x/y}$. 2887. $y=(\sqrt{2a}+\sqrt{x})^2$. 2888. $y^2=1-e^{-x}$. 2889. $r=Ce^{a\varphi}$. Indicación. Pasar a las coordenadas polares. 2890. $3y^2-2x=0$. 2891. $r=k\varphi$. 2892. $x^2+(y-b)^2=b^2$. 2893. $y^2+16x=0$. 2894. La hipérbola $y^2-x^2=C$ o la circunferencia $x^2+y^2=C^2$. 2895. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. Indicación. Partir de que el área es igual a $\int_0^x y\,dx$, y la longitud del arco $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$. 2896. $x=\frac{a^2}{y}+Cy$. 2897. $y^2=4C(C+a-x)$. 2898. Indicación. Aplicar el hecho de que la resultante de la fuerza de gravedad y de la centrífuga es normal a la superficie. Tomando el eje de giro como eje OY y designando por ω la velocidad angular de la rotación, obtenemos, para la sección plana axial de la superficie que se busca, la ecuación diferencial $g\frac{dy}{dx}=\omega^2 x$. 2899. $p=e^{-0{,}000167h}$. Indicación. La presión en cada nivel de la columna vertical de aire se puede considerar como dependiente exclusivamente de las capas que descansan más arriba. Empléese la ley de Boyle—Mariotto, según la cual, la densidad es proporcional a la presión. La ecuación diferencial buscada es $dp=-kp\,dh$. 2900. $s=\frac{1}{2}klw$. Indicación. La ecuación es $ds=kw\cdot\frac{l-x}{l}dx$. 2901. $s=\left(p+\frac{1}{2}w\right)kl$. 2902. $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$. 2903. Dentro de una hora. 2904. $\omega=100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ r. p. m. 2905. En 100 años se desintegra un 4,2% de la cantidad inicial Q_0. Indicación. La ecuación es $\frac{dQ}{dt}=kQ$; $Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$. 2906. $t\approx 35{,}2$ seg. Indicación. La ecuación es $\pi(h^2-2h)\,dh=\pi\left(\frac{1}{10}\right)^2 v\,dt$. 2907. $\frac{1}{1024}$. Indicación. La ecuación es $dQ=-kQ\,dh$; $Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{3}}$. 2908. $v\to\sqrt{\frac{gm}{k}}$ cuando $t\to\infty$ (k es el coeficiente de proporcionalidad) Indicación. La ecuación es $m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$; $v=\sqrt{\frac{gm}{k}}\operatorname{th}\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$. 2909. 18,1 kg. Indicación. La ecuación es $\frac{dx}{dt}=k\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{300}\right)$. 2910. $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left[(R\operatorname{sen}\omega t-L\omega\cos\omega t)+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right]$.

Indicación. La ecuación es $Ri + L\,\frac{di}{dt} = E \operatorname{sen} \omega t$.

2976. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. 2977. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$. 2978. $y = C_1 + C_2 e^{x}$. 2979. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. 2980. $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. 2981. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$. 2982. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}$. 2983. $y = e^{2x}(C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}})$. 2984. Si $k > 0$, $y = C_1 e^{x\sqrt{k}} + C_2 e^{-x\sqrt{k}}$, si $k < 0$, $y = C_1 \cos \sqrt{-kx} + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-kx}$. 2985. $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x})$. 2986. $y = e^{\frac{x}{6}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6}\, x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{11}}{6}\, x\right)$. 2987. $y = 4e^{x} + e^{4x}$. 2988. $y = e^{-x}$. 2989. $y = \operatorname{sen} 2x$. 2990. $y = 1$. 2991. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. 2992. $y = 0$. 2993. $y = C \operatorname{sen} \pi x$. 2994. a) $xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$; b) $A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$; c) $A \cos 2x + B \operatorname{son} 2x + Cx^2 e^{2x}$; d) $e^{x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$;

c) $e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$; f) $xe^x[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\operatorname{sen} 2x]$. 2995. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$. 2996. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\operatorname{sen}\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^3+3x^2$. 2997. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$. 2998. $y=C_1e^x+C_2e^{7x}+2$. 2999. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$. 3000. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$. 3001. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\operatorname{sen} 2x+\cos 2x)$. 3002. $y=C_1e^{2x}+C_1e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$. 3003. $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$. 3004. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos 2x-\operatorname{sen} 2x)$. 3005. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)+\frac{x}{4}e^x\operatorname{sen} 2x$. 3006. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x)$. 3007. 1) $x=C_1\cos\omega t+C_2\operatorname{sen}\omega t+\frac{A}{\omega^2-p^2}\operatorname{sen} pt$; 2) $x=C_1\cos\omega t+C_2\operatorname{sen}\omega t-\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t$. 3008. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}-xe^{4x}$. 3009. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$. 3010. $y=e^x(C_1+C_2x+x^2)$. 3011. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{5}{2}x$. 3012. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{5}(3\cos 2x+\operatorname{sen} 2x)$. 3013. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^x+\frac{5}{2}x^2-5x$. 3014. $y=C_1+C_2e^x-3xe^x-x-x^2$. 3015. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$. 3016. $y=(C_1\cos 3x+C_2\operatorname{sen} 3x)e^x+\frac{1}{37}(\operatorname{sen} 3x+6\cos 3x)+\frac{e^x}{9}$. 3017. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$. 3018. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{10}(\cos x+3\operatorname{sen} x)-\frac{x^2}{6}-\frac{x}{9}$. 3019. $y=\frac{1}{8}e^{2x}(4x+1)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. 3020. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x\operatorname{sen} x-\cos x$. 3021. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}-\frac{e^{2x}}{20}(\operatorname{sen} 2x+2\cos 2x)$. 3022. $y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x-\frac{x}{4}(3\operatorname{sen} 2x+2\cos 2x)+\frac{1}{4}$. 3023. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x-2x\cos x)$. 3024. $y=C_1e^x+C_1e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^x$. 3025. $y=C_1\cos 3x+C_2\operatorname{sen} 3x+\frac{1}{4}x\operatorname{sen} x-\frac{1}{16}\cos x+\frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$. 3026. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{9}(2-3x)+\frac{1}{16}(2x^2-x)e^{3x}$. 3027. $y=C_1+C_2e^{2x}-2xe^{x}-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}x^2$. 3028. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$. 3029. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-\frac{1}{8}(2x^2+x)e^{-3x}+\frac{1}{16}(2x^2+3x)e^x$. 3030. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\frac{x}{4}\cos x+\frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x-\frac{x}{8}\cos 3x+\frac{3}{32}\operatorname{sen} 3x$. Indicación. Transformar el producto de cosenos en suma de cosenos. 3031. $y=C_1e^{-x\sqrt{2}}+C_2e^{x\sqrt{2}}+xe^x\operatorname{sen} x+e^x\cos x$. 3032. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+$

$+\cos x \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **3033.** $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **3034.** $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$. **3035.** $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$. **3036.** $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+x\operatorname{son} x+\cos x\ln|\cos x|$. **3037.** $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x-x\cos x+\operatorname{sen} x\ln|\operatorname{sen} x|$. **3038.** a) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x+e^{-x})\operatorname{arctg} e^x$; b) $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+e^{x^2}$. **3040.** La ecuación del movimiento es $\frac{2}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2-k\,(x+2)\;(k=1)$; $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ seg. **3041.** $x=\frac{2g\operatorname{sen} 30t-60\sqrt{g}\operatorname{sen}\sqrt{g}t}{g-900}$ cm. Indicación. Si x se cuenta a partir de la posición de reposo de la carga, $\frac{4}{g}x''=4-k\,(x_0+x-y-l)$, donde x_0 es la distancia desde el punto de reposo de la carga hasta el punto inicial de enganche del resorte, l es la longitud del resorte en estado de reposo; por lo cual $k\,(x_0-l)=4$, por consiguiente, $\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k\,(x-y)$, donde $k=4$, $g=981$ cm²/seg. **3042.** $m\frac{d^2x}{dt^2}=k\,(b-x)-k\,(b+x)$; $x=c\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$. **3043.** $6\frac{d^2s}{dt^2}=gs$; $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$. **3044.** a) $r=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$; b) $r=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$. Indicación. La ecuación diferencial del movimiento es $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2r$.