ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOS)

1.- Introducción

Consideremos los siguientes problemas.

Problema 1

¿Cuáles serán las curvas que verifican que la pendiente en cada uno de sus puntos es igual al doble de la suma de las coordenadas del punto?

Planteo:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x + y)$$
$$y' = 2(x + y)$$

derivada de la función y variable independiente función incógnita

Una ecuación de este tipo se llama *ecuación diferencial ordinaria*.

Problema 2

¿Cuál será el camino recorrido por un cuerpo durante el tiempo t , si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 segundos el cuerpo recorre 100 metros y en 15 segundos 200 metros?

Planteo:

$$v(t) = k x(t) \quad \rightarrow \quad x'(t) = k x(t) \quad \rightarrow \quad x' = k x$$

derivada de la función incógnita x función incógnita

En esta ecuación k es la constante de proporcionalidad y la variable independiente es t (tiempo). Además debe verificarse que $x(10) = 100$, $x(15) = 200$

Este problema también se modeliza mediante una *ecuación diferencial ordinaria* y ciertas restricciones.

Para dar respuesta a estos problemas tendremos que “aprender” a resolver este tipo de ecuaciones.

2.- Definición y conceptos generales

1.1 Definición: una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) es una ecuación que relaciona una variable independiente x , una función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= 0 && \text{(forma implícita)} && (1) \\ \text{ó} \quad y^{(n)} &= F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) && \text{(forma explícita)} \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$y' + 3xy = 0$$

$$xy''' - 4y' + x^3y = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} + x^2y + x = 0$$

La ecuación diferencial se llama *ordinaria* porque la función incógnita depende de una sola variable independiente.

Si la función incógnita depende de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial contendría derivadas parciales por lo que a estas ecuaciones se las llama *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*.

El *orden de una ecuación diferencial* es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación.

Ejemplos:

$y'' + 2y' = x$	EDO de segundo orden
$4xy''' - 3y = \sin x$	EDO de tercer orden

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) en un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ es una función $\varphi(x)$ que admite derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive en I , tal que al sustituir y por $\varphi(x)$ en la ecuación diferencial la convierte en una identidad, es decir

$$\begin{aligned} \varphi(x) \text{ es solución de la ecuación (1)} \\ \Leftrightarrow G(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Ejemplo: la función $y = e^x(1+x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$

En efecto, si derivamos dos veces la función dada tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x) \\ y'' &= e^x(2+x) + e^x = e^x(3+x) \end{aligned}$$

sustituyendo y, y' e y'' en la ecuación diferencial dada resulta la identidad

$$e^x(3+x) - 2e^x(2+x) + e^x(1+x) = e^x(3+x-4-2x+1+x) = 0$$

Resolver o integrar una ecuación diferencial ordinaria es hallar todas sus soluciones.

3.- Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Son de la forma:

$$G(x, y, y') = 0 \quad (\text{forma implícita})$$

$$\text{ó} \quad y' = F(x, y) \quad (\text{forma explícita})$$

donde $y = y(x)$ es la función incógnita.

Un ejemplo sencillo de ecuación diferencial ordinaria de primer orden es $y' = f(x)$

Si la función f es continua en algún intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$, se tiene que

$$y = \int f(x) dx + C \quad C: \text{constante real arbitraria}$$

De donde resulta que la ecuación diferencial dada tiene una familia infinita de soluciones. La solución contiene una constante arbitraria que puede determinarse, si se conoce que $y(x_0) = y_0$.

La condición $y(x_0) = y_0$ se llama *condición inicial*.

El problema de resolver la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$ en algún intervalo I que contenga a x_0 , se llama *problema con valor inicial* o *problema de Cauchy*. Este tipo de problema puede ser expresado de la siguiente manera:

$$(PVI) \quad \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Las infinitas soluciones de la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ constituyen la *solución general* de la ecuación, la cual contiene una constante arbitraria.

Se llama *solución particular* de la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ a la que se obtiene de la solución general para un valor determinado de la constante arbitraria.

Entonces dada la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$, la solución general puede expresarse como

$$g(x, y, C) = 0 \quad (\text{forma implícita})$$

$$\text{ó} \quad y = \varphi(x, C) \quad (\text{forma explícita})$$

Teorema de Existencia y unicidad local de solución. Teorema de Picard.

Sea el problema de valor inicial

$$(PVI) \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

siendo (x_0, y_0) un punto interior de la región rectangular del plano $x y$,
 $R = [a, b] \times [c, d]$

Si las funciones F y F_y son continuas en el rectángulo R entonces existe un intervalo abierto I con centro en x_0 , contenido en el intervalo $[a, b]$, y una única función $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ que satisface el PVI.

Observación

Es claro que la función φ es derivable en el intervalo I (es solución del PVI). Además φ' es continua en I , ya que $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ (F es continua por hipótesis) entonces la gráfica de la solución φ del PVI es una curva suave.

Comentarios

Las condiciones del Teorema de Picard son suficientes pero no necesarias. Esto significa que cuando F y F_y son continuas en una región rectangular R , podremos asegurar que el PVI tiene una única solución, siempre que (x_0, y_0) sea un punto interior de R . Sin embargo si las condiciones establecidas en las hipótesis del teorema no son válidas podría suceder que, el PVI tenga única solución o que tenga varias soluciones o que no tenga solución.

2.1.- Interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$

Sabemos que la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ tiene una familia infinita de soluciones que constituye la solución general. Esta solución general, que podía ser expresada como:

$$g(x, y, C) = 0 \text{ (forma implícita)} \quad \text{ó} \quad y = \varphi(x, C) \text{ (forma explícita)}$$

representa geoméricamente a una familia de curvas planas, llamadas *curvas soluciones* o *curvas integrales* (una curva para cada valor de la constante C).

Una solución particular que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$, geoméricamente será la curva (o las curvas) de la familia que contiene al punto (x_0, y_0) .

2.2.- Ecuaciones diferenciales ordinarias a variables separables.

Son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma:

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad (1)$$

es decir, $F(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ es el producto de una función que depende únicamente de x por otra función que depende únicamente de y .

Para resolverla tenemos en cuenta que $y' = dy/dx$ entonces la ecuación (1) puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

De donde para todo y tal que $h(y) \neq 0$ se tiene que

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

Si $g(x)$ y $1/h(y)$ son continuas, integramos ambos miembros, entonces

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

Si $H(y)$ es una antiderivada de $1/h(y)$ y $G(x)$ es una antiderivada de $g(x)$, resulta

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

que es la solución general de la ecuación (1).

En general, esta última igualdad, define implícitamente a y como función de x ; si es posible, obtendremos a y en términos de x , es decir $y = \varphi(x, C)$.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente problema con valor inicial

$$\begin{cases} (1+e^x) y y' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$(1+e^x) y y' = e^x \rightarrow (1+e^x) y \frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow y dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx \rightarrow \int y dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \ln(1+e^x) + C, \quad C \in \mathbf{R} \rightarrow y^2 = 2 \ln(1+e^x) + C, \quad C \in \mathbf{R}, \text{ de donde}$$

$$y = \pm \sqrt{2 \ln(1+e^x) + C} : \text{solución general en forma explícita.}$$

Aplicamos ahora la condición inicial

$$y(0) = 1 \xrightarrow{y>0} 1 = +\sqrt{2 \ln(1+e^0) + C} \rightarrow 1 = 2 \ln 2 + C \rightarrow C = 1 - 2 \ln 2$$

$$\text{Luego la solución particular del PVI dado es } y = \sqrt{2 \ln \frac{1}{2}(1+e^x) + 1}$$

Nota: El PVI dado tiene única, observar que se cumplen las hipótesis del teorema de Picard.

Ejemplo 2: ¿el siguiente PVI tiene solución?

$$(PVI) \begin{cases} x y' - 4 y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$x y' - 4 y = 0 \rightarrow x \frac{dy}{dx} = 4 y \xrightarrow{y \neq 0} \frac{dy}{y} = 4 \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = 4 \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y| = 4 \ln|x| + C, C \in \mathbf{R}$$

de donde $y = C x^4$ con $C \neq 0$.

Es fácil verificar que $y = 0$ también es solución de la ecuación diferencial dada, entonces la solución general será $y = C x^4$ con $C \in \mathbf{R}$.

Aplicando la condición inicial tenemos que $0 = C \cdot 0$, esta igualdad se verifica independientemente del valor de C , es decir para todo C , por lo que el PVI dado tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 3: De los dos problemas introductorios, en el problema 2 la ecuación diferencial es a variables separables. Resolveremos dicho problema.

Vimos que la ecuación diferencial que modeliza dicho problema es: $x' = k x$ entonces

$$\frac{dx}{dt} = k x \xrightarrow{x \neq 0} \frac{dx}{x} = k dt \rightarrow \int \frac{dx}{x} = k \int dt \rightarrow \ln|x| = kt + C \rightarrow x = C e^{kt}, C \neq 0$$

Es fácil ver que la función $x = 0$ también es solución de la ecuación diferencial dada, luego la solución general será $x = C e^{kt}$ con $C \in \mathbf{R}$.

Apliquemos ahora las condiciones que se deben satisfacer en este problema.

$$x(10) = 100 \rightarrow 100 = C e^{10k}$$

$$x(15) = 200 \rightarrow 200 = C e^{15k}$$

Dividiendo miembro a miembro las igualdades anteriores resulta $2 = e^{5k}$, de donde

$k = \frac{1}{5} \ln 2$, reemplazando este valor de k en cualquiera de las dos igualdades anteriores y trabajando algebraicamente se obtiene que $C = 25$. Luego el camino recorrido

por un cuerpo durante el tiempo t viene descrito por $x(t) = 25 e^{\left(\frac{1}{5} \ln 2\right)t}$.

2.3.- Ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = F(x, y)$ es *homogénea* si y solo si $F(x, y) = g(y/x)$, es decir si es de la forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

Se resuelven efectuando la sustitución $z = y/x$ (notar que como $y = y(x)$ entonces $z = z(x)$), y la ecuación (1) se reduce a una ecuación diferencial a variables separables. En efecto:

$$z = \frac{y}{x} \text{ entonces } y = x \cdot z, \text{ de donde } y' = z + x z'$$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene

$$z + x z' = g(z) \xrightarrow{\forall x \neq 0} z' = \frac{g(z) - z}{x} \rightarrow z' = \frac{1}{x} [g(z) - z]$$

que es una ecuación a variables separables, con función incógnita $z = z(x)$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \rightarrow y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \rightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \rightarrow y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ lo que de-}$$

muestra que la ecuación diferencial dada es homogénea.

Efectuamos la sustitución $z = \frac{y}{x}$ entonces $y = x \cdot z$, de donde $y' = z + x z'$, reempa-

zando obtenemos la ecuación diferencial $z + x z' = \frac{1}{z} + z \rightarrow x z' = \frac{1}{z}$: ecuación a va-

riables separables. Resolvemos esta ecuación

$$x z' = \frac{1}{z} \rightarrow z dz = \frac{dx}{x} \rightarrow \int z dz = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + C \rightarrow z = \pm \sqrt{\ln x^2 + C}, \text{ de}$$

donde la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = \pm x \sqrt{\ln x^2 + C}$.

2.4.- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que pueden expresarse en la forma:

$$y' + p(x) y = q(x) \quad (1)$$

donde p y q son funciones continuas en un intervalo I .

Si $q(x)$ no es idénticamente nula en I , la ecuación (1) se llama *lineal no homogénea*.

Si $q(x) \equiv 0$ en I se dice que la ecuación (1) es *lineal homogénea* y resulta una ecuación a variables separables.

Una de las formas de resolver la ecuación (1) es mediante la sustitución

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Para ello calculamos $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, reemplazamos y e y' en (1) y obtenemos

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p \cdot u \cdot v = q$$

$$(u' + p \cdot u)v + u \cdot v' = q$$

hallamos una función u tal que $u' + p \cdot u = 0$ (esta es una ecuación diferencial a variables separables con función incógnita $u = u(x)$). Luego calculamos la función v resolviendo la ecuación $u \cdot v' = q$, ecuación diferencial a variables separables con función incógnita $v = v(x)$.

Finalmente $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial $x y' - y = x^3$

Esta ecuación puede escribirse como $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ con $x > 0$

Realizamos la sustitución $y = u \cdot v$ de donde $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ y reemplazando en la ecuación diferencial dada tenemos:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{1}{x}u \cdot v = x^2 \rightarrow \left(u' - \frac{1}{x}u \right) v + u v' = x^2$$

Hallamos una función u tal que $u' - \frac{1}{x}u = 0$. Esta es una ecuación diferencial a variables separables, resolviéndola obtenemos $u = Cx$, $C \in \mathbf{R}$, como interesa una función u elegimos $C = 1$, entonces $u = x$, con esta función hallamos v de manera que $x v' = x^2$, se trata también de una ecuación diferencial a variables separables, cuya solución general es $v = \frac{1}{2}x^2 + C$ con $C \in \mathbf{R}$. Luego la solución general de la ecuación

diferencial dada es $y = u \cdot v = x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right) \rightarrow y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$ con $C \in \mathbf{R}$.

Ejercicio: la ecuación diferencial que modeliza el problema 1 de la introducción es una ecuación diferencial lineal de primer orden, resolver dicho problema.

2.5.- Ecuaciones diferenciales exactas

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y) y' = 0 \quad (1) \quad \text{ó} \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas en una región plana D y $Q(x, y)$ no es idénticamente nula en D , es una *ecuación diferencial exacta* en D , si existe una función $f(x, y)$ diferenciable en D tal que $f_x(x, y) = P(x, y)$ y $f_y(x, y) = Q(x, y)$ en D .

Veremos ahora como se puede obtener la solución general de una ecuación diferencial exacta.

Sea $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ (1) una ecuación diferencial exacta en D entonces existe una función f diferenciable en D tal que $f_x(x, y) = P(x, y)$ y $f_y(x, y) = Q(x, y)$ en D . Sea φ una solución de la ecuación (1) en un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$, entonces $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in I$, por ser exacta se verifica que $f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in I$, de donde resulta que $\frac{d}{dx}f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I$, y por lo tanto $f(x, \varphi(x)) = C \quad \forall x \in I$, lo que significa que la ecuación $f(x, y) = C$ define implícitamente a la solución φ en I .

Recíprocamente, supongamos que la ecuación $f(x, y) = C$ define implícitamente a una función φ en un intervalo I , entonces $f(x, \varphi(x)) = C \quad \forall x \in I$, derivando por medio de la regla de la cadena tenemos que $f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in I$, pero por ser la ecuación (1) exacta podemos escribir $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in I$, lo que significa que la función φ es solución de la ecuación (1) en I .

Luego queda probado que "toda solución de una ecuación diferencial exacta está definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = C$ "

El siguiente teorema nos proporciona un método para determinar si una ecuación diferencial de la forma (1) es o no exacta.

Teorema: Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en una región del plano $D = (a, b) \times (c, d)$ entonces la ecuación diferencial $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ es exacta si y solo si $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ en D .

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial $2xy + (x^2 - 1)y' = 0$

$$P(x, y) = 2xy, \quad P_y(x, y) = 2x$$

$$Q(x, y) = x^2 - 1, \quad Q_x(x, y) = 2x$$

de donde $P_y = Q_x$, además las funciones P y Q tienen derivadas parciales continuas en $\mathbf{R}^2$ entonces por teorema anterior la ecuación dada es exacta en $D = \mathbf{R}^2$ y por definición existe una función $f(x, y)$ diferenciable tal que $f_x(x, y) = 2xy$ y $f_y(x, y) = x^2 - 1$. Veamos ahora como hallar la función f , para ello partimos de

$$f_x(x, y) = 2xy \rightarrow f(x, y) = \int 2xy \, dx \rightarrow f(x, y) = x^2y + C(y)$$

al integrar con respecto a x , la y se mantiene constante, por lo que la constante de integración se puede considerar como una función de y .

$$f_y(x, y) = x^2 + C'(y) = x^2 - 1 \rightarrow C'(y) = -1 \rightarrow C(y) = - \int dy \rightarrow C(y) = -y + K$$

tomando $K = 0$ pues interesa una función f , obtenemos $f(x, y) = x^2y - y$

Luego la solución general está definida implícitamente por la ecuación $x^2 y - y = C$.

3.- Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Son de la forma

$$\begin{aligned} G(x, y, y', y'')=0 & \quad (\text{forma implícita}) \\ \text{ó} \quad y''=F(x, y, y') & \quad (\text{forma explícita}) \end{aligned}$$

Un problema con valores iniciales o problema de Cauchy es de la forma

$$PVI: \begin{cases} y'' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

La solución general de una ecuación diferencial de segundo orden es una función que depende de dos constantes arbitrarias y que satisface la ecuación para cualquier valor de dichas constantes, es decir, la solución general será

$$g(x, y, C_1, C_2)=0 \quad (\text{forma implícita}) \quad \text{ó} \quad y = \varphi(x, C_1, C_2) \quad (\text{forma explícita})$$

La solución particular es la que se obtiene de la solución general por valores determinados a las constantes arbitrarias C_1 y C_2 .

Ejercicio: verificar que la función $y=C_1+C_2 e^{2x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $y''-2y=0$ y hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0)=1, y'(0)=2$.

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \quad (1)$$

donde $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en un intervalo I y $a_0(x)$ no es idénticamente nula en I .

Si $f(x) \equiv 0$ en I , la ecuación (1) se llama *lineal homogénea*. Si $f(x)$ no es idénticamente nula en I , se dice que la ecuación (1) es *lineal no homogénea*.

Si las funciones $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ son constantes la ecuación diferencial lineal es a *coeficientes constantes*, si son variables se tiene una ecuación diferencial a *coeficientes variables*.

Supongamos que $a_0(x) \neq 0 \forall x \in J \subseteq I \subseteq \mathbf{R}$ ó $I=J$, entonces dividimos la ecuación (1) por la función $a_0(x)$

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

llamando

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

se tiene

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = q(x) \quad \forall x \in J \quad (2)$$

donde p_1, p_2, q son funciones continuas en el intervalo J .

La ecuación (2) se llama *ecuación lineal normalizada* y al intervalo J , *intervalo de normalidad*.

Dada la ecuación (2), se llama *ecuación lineal homogénea asociada* a (2) a la ecuación $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \quad \forall x \in J$

Definición: Llamaremos *operador diferencial lineal* a:

$$L_2[y] = y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y$$

Este operador posee las siguientes propiedades (propiedades de linealidad)

i) $L_2[k y] = k L_2[y] \quad k: \text{constante}$

ii) $L_2[y_1 + y_2] = L_2[y_1] + L_2[y_2], \quad y_1, y_2 : \text{funciones de } x$

Como consecuencia de estas propiedades resulta

$$L_2[k_1 y_1 + k_2 y_2] = k_1 L_2[y_1] + k_2 L_2[y_2], \quad y_1, y_2 : \text{funciones de } x, \quad k_1, k_2 : \text{constantes}$$

Utilizando el operador diferencial lineal L_2 la ecuación diferencial lineal no homogénea puede escribirse $L_2[y] = q(x)$ y la ecuación diferencial lineal homogénea como $L_2[y] = 0$.

3.1.1 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

Teorema I:

Si las funciones y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea $L_2[y] = 0$ y C_1, C_2 son constantes arbitrarias entonces $C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ también es solución de dicha ecuación diferencial.

Demost: ejercicio

Teorema II: *Caracterización de la solución general de la ecuación diferencial $L_2[y] = 0$*

Si y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $L_2[y] = 0$ en I entonces la solución general de dicha ecuación diferencial es $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

Resolución de la ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes

Sea la ecuación diferencial

$$L_2[y] = y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \quad p_1, p_2 : \text{constantes}$$

Para hallar la solución general de esta ecuación, debemos encontrar, según el teorema anterior, dos soluciones linealmente independientes. Dichas soluciones pueden ser halladas en la forma $y = e^{rx}$ donde r es una constante real o compleja.

En efecto:

$$y = e^{rx}, \quad y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

$$L_2[e^{rx}] = r^2 e^{rx} + p_1 r e^{rx} + p_2 e^{rx} = \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} (r^2 + p_1 r + p_2) = 0 \Leftrightarrow r^2 + p_1 r + p_2 = 0$$

A la ecuación $r^2 + p_1 r + p_2 = 0$ se la llama *ecuación característica*, es una ecuación de segundo grado que determina los valores de r para los cuales la función $y = e^{rx}$ es solución de la ecuación diferencial $L_2[y] = 0$. Esta ecuación tiene dos raíces r_1 y r_2 .

1) Las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas

Entonces $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$ son dos soluciones de la ecuación $L_2[y] = 0$, puede probarse que son linealmente independientes, luego la solución general será:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

Ejemplo: resolver la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 0$

La ecuación característica es $r^2 - 3r + 2 = 0$ y sus raíces son $r_1 = 2, r_2 = 1$, entonces $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^x$ son dos soluciones linealmente independientes, luego la solución general será $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

2) Las raíces r_1 y r_2 son reales e iguales: $r_1 = r_2 = r$

Entonces $y_1 = e^{rx}$ es solución de la ecuación diferencial $L_2[y] = 0$.

Veremos que $y_2 = x e^{rx}$ es otra solución de dicha ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{rx} + x r e^{rx}, & y_2'' &= 2 r e^{rx} + x r^2 e^{rx} \\ L_2[x e^{rx}] &= 2 r e^{rx} + x r^2 e^{rx} + p_1 e^{rx} + p_1 x r e^{rx} + p_2 x e^{rx} = \\ &= e^{rx} [2 r + x r^2 + p_1 + p_1 x r + p_2 x] = \\ &= e^{rx} [x \underbrace{(r^2 + p_1 r + p_2)}_{=0 \text{ pues } r \text{ es raíz}} + \underbrace{(2r + p_1)}_{=0 \text{ pues } r \text{ es raíz doble}}] = 0 \end{aligned}$$

Se puede probar que el conjunto $\{e^{rx}, x e^{rx}\}$ es linealmente independiente, luego la solución general es:

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

Ejemplo: resolver la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$

La ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$ que tiene dos raíces reales e iguales $r_1 = r_2 = 3$, entonces las funciones $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = x e^{3x}$ son dos soluciones linealmente independientes, luego la solución general será $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

3) Las raíces r_1 y r_2 son complejas

Puesto que los coeficientes de la ecuación característica se presuponen reales, las raíces r_1 y r_2 son números complejos conjugados, es decir, si $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi$, entonces las funciones $y_1 = e^{(a+bi)x}$ e $y_2 = e^{(a-bi)x}$ son dos soluciones complejas de la ecuación diferencial $L_2[y] = 0$. Estas dos soluciones complejas pueden ser sustituidas por dos soluciones reales. Veamos esto:

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{bxi} \stackrel{\text{Euler}}{=} e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$$

$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-bxi} \stackrel{\text{Euler}}{=} e^{ax} (\cos(-bx) + i \operatorname{sen}(-bx)) = e^{ax} (\cos bx - i \operatorname{sen} bx)$$

Como y_1 e y_2 son soluciones, por *teorema I*, $\tilde{y}_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 = e^{ax} \cos bx$ también es solución de la ecuación diferencial $L_2[y] = 0$. También $\tilde{y}_2 = \frac{1}{2i} y_1 - \frac{1}{2i} y_2 = e^{ax} \operatorname{sen} bx$ es solución de la misma ecuación diferencial.

De esta manera, al par de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ le corresponden dos soluciones reales $\tilde{y}_1 = e^{ax} \cos bx$, $\tilde{y}_2 = e^{ax} \operatorname{sen} bx$. Se puede probar que el conjunto $\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}$ es linealmente independiente, luego la solución general es:

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx, \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

Ejemplo: resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 5y = 0$

La ecuación característica es $r^2 + 4r + 5 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -2 + i, r_2 = -2 - i$, entonces por lo visto anteriormente la solución general es:

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x, \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias}$$

3.1.2.-Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden

Teorema: Caracterización de la solución general de la ecuación diferencial $L_2[y] = q(x)$

Sea la ecuación diferencial $L_2[y] = q(x)$ (1) con q función continua en un intervalo I , si y_p es una solución particular de esta ecuación en I , entonces y es solución general de la ecuación (1) en I si y solo si $y = y_h + y_p$ donde y_h es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada $L_2[y] = 0$.

Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas a coeficientes constantes

Sea la ecuación diferencial

$$L_2[y] = y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

con p_1 y p_2 constantes y q una función continua en un intervalo I .

Por teorema anterior para hallar la solución general de esta ecuación diferencial debemos encontrar y_h , solución general de la ecuación homogénea asociada, e y_p solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Ya vimos como hallar y_h . Para hallar la solución particular y_p podemos utilizar dos métodos: *el método de variación de los parámetros (de Lagrange)* o *el método de los coeficientes indeterminados*.

I) Método de variación de los parámetros o método de Lagrange

Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea a coeficientes constantes

$$L_2[y] = y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

La ecuación diferencial homogénea asociada es $L_2[y] = y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ y su solución general es $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

El método consiste en reemplazar las constantes C_1 y C_2 por funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ y buscar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea de la forma

$$y_p = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

Para ello calculamos $y_p' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'$

Imponemos la condición de que $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$

Calculamos y_p'' teniendo en cuenta la condición impuesta

$$y_p'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$$

Reemplazando y, y' e y'' en la ecuación diferencial no homogénea, resulta

$$C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' + p_1 C_1 y_1' + p_1 C_2 y_2' + p_2 C_1 y_1 + p_2 C_2 y_2 = q(x)$$

$$\text{o sea } C_1' y_1' + C_1 \underbrace{[y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1]}_{=0} + C_2' y_2' + C_2 \underbrace{[y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2]}_{=0} = q(x)$$

de donde $C_1' y_1' + C_2' y_2' = q(x)$

Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = q(x) \end{cases}$$

Resolviéndolo obtenemos $C_1'(x), C_2'(x)$, luego $C_1(x) = \int C_1'(x) dx$, $C_2(x) = \int C_2'(x) dx$, y con ellas podemos escribir la solución particular.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$

La ecuación lineal homogénea asociada a la no homogénea dada es $y'' - 2y' + y = 0$

Ecuación característica: $r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1 \rightarrow \underline{y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x}$

Proponemos $y_p = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$

Planteamos el sistema

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' (e^x + x e^x) = \frac{e^x}{2x} \end{cases}$$

Resolviéndolo obtenemos $C_1'(x) = -\frac{1}{2}$, $C_2'(x) = \frac{1}{2x}$

De donde $C_1(x) = \int \left(-\frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{2}x + \underbrace{K_1}_{=0} = -\frac{1}{2}x$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x + \underbrace{K_2}_{=0} = \ln \sqrt{x}$$

Las constantes K_1 y K_2 se consideran nulas porque buscamos una solución particular.

Luego una solución particular de la ecuación lineal no homogénea es:

$$\underline{y_p = -\frac{1}{2}x e^x + (\ln \sqrt{x}) x e^x}$$

y la solución general de la ecuación dada es:

$$\underline{y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2}x e^x + (\ln \sqrt{x}) x e^x}$$

II) Método de los coeficientes indeterminados

Se propone una posible solución particular con coeficientes a determinar. El tipo de solución que proponemos depende de la expresión de $q(x)$. Para poder aplicar este método $q(x)$ debe ser de la forma:

- e^{kx}
- un polinomio
- $\text{sen } kx$ ó $\text{cos } kx$
- suma o producto de las funciones anteriores

En la siguiente tabla se muestra la solución particular y_p que se propone, según la expresión de $q(x)$

$q(x)$	y_p
e^{kx}	$A e^{kx}$
$P_n(x)$ (polinomio de gr n)	$Q_n(x)$ (polinomio de gr n completo)
$\text{sen}kx$ ó $\text{cos}kx$	$A \text{sen}kx + B \text{cos}kx$

Lo anterior es válido si la solución particular y_p propuesta no es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. Caso contrario, se debe multiplicar la solución propuesta por x^t donde t es el menor entero positivo tal que $x^t y_p$ no sea solución de la ecuación homogénea asociada (en nuestro caso tendremos que multiplicar por x ó por x^2).

Ejercicios: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $y'' - 2y' = 5e^{3x}$

2) $y'' + 4y' + 5y = 2x - x^2$

3) $y'' - 2y' + y = 3e^{-x}$

4) $y'' + y' = 4x^2 + 1 - \text{sen } 2x$

4.- Ecuación diferencial de una familia de curvas

Nos planteamos el problema recíproco al hasta ahora estudiado, es decir, dada la ecuación de una familia de curvas buscar una ecuación diferencial que la admita como solución general. Si la familia de curvas contiene una constante arbitraria, podemos encontrar una ecuación diferencial de primer orden que la tenga como solución general. Si la familia de curvas contiene dos constantes arbitrarias, la ecuación diferencial de la cual es solución general será de segundo orden.

Ejemplos:

1) Sea la familia de curvas $y = C x^2$, C : constante arbitraria. Para hallar la ecuación diferencial que la admite como solución general, derivamos con respecto a x entonces $y' = 2 C x$, eliminando la constante C entre ambas igualdades obtenemos:

$y' = \frac{2y}{x}$, $x \neq 0$ esta es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución general es la familia de curvas dada.

2) Sea la familia de curvas $y = C_1 x^2 + C_2 x$, C_1, C_2 : constantes arbitrarias. Como esta familia contiene dos constantes arbitrarias será solución de una ecuación diferencial de segundo orden, entonces derivamos dos veces con respecto a x y consideramos el siguiente sistema

$$\begin{cases} y = C_1 x^2 + C_2 x \\ y' = 2 C_1 x + C_2 \\ y'' = 2 C_1 \end{cases}$$

eliminando las constantes C_1, C_2 entre estas tres igualdades obtenemos:

$x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = 0$ que es la ecuación diferencial que admite como solución general es la familia de curvas dada.