CURSO INTRODUCTORIO 2013

MATEMÁTICA

Martha Elena Guzmán

Guzmán, Martha Elena
Matemática: Curso Introductorio 2013. - 1a ed. - Rosario: UNR Editora.
Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, 2009.
244 p.; 29,7 x 21 cm.

ISBN 978-950-673-764-1

1. Matemática. 2. Enseñanza Superior. I. Título
CDD 510.711

Fecha de catalogación: 13/07/2009

Título:
Matemática: Curso Introductorio 2013

Edición Nº 1
1.100 Ejemplares

ISBN 978-950-673-764-1

Esta edición se terminó de imprimir en el mes de Julio de 2012
en los Talleres Gráficos de TECNIGRAFICA
Avda. Pte. Perón 3747 - 2000 Rosario - República Argentina

INTRODUCCIÓN

En Matemática es fundamental que el conocimiento adquirido en un determinado contexto sea trasladado al aprendizaje de situaciones nuevas.

Por esta razón, se ofrece este curso que pretende recuperar un conjunto de contenidos, de la Matemática elemental, que son básicos para la comprensión de las materias que tienen a la Matemática como tema central o como herramienta de apoyo.

Con el objetivo de realizar una puesta al día de esos contenidos se ha organizado el material en once capítulos, en los que se dan definiciones, se recuerdan operaciones, se enuncian propiedades. A continuación se presentan ejercicios y problemas para resolver.

Es precisamente éste el tema central del curso, ya que la resolución de problemas:

- Facilita el aprendizaje de los conceptos.
- Ayuda a comprender el carácter dinámico de la Matemática.
- Estimula el pensamiento independiente.
- Reclama el gusto por descubrir, por cuestionar, por asumir el protagonismo del propio aprendizaje.
- Provoca satisfacción por el logro obtenido.

Al término de cada capítulo se propone una ejercitación para autoevaluación. Se incluyen además problemas y algunos acertijos que se presentan como pasatiempo, pero su sentido va más allá de una simple recreación, ya que ponen a prueba la comprensión, la curiosidad, la capacidad creativa y el ingenio, y permiten utilizar los conocimientos con decisión y soltura.

El material ofrecido exige, para su comprensión y resolución una base mínima de conocimientos puesto que los temas que se tratan han sido desarrollados en su gran mayoría, en la escuela media. Sin embargo, es oportuno recomendar:

- Hacer una lectura atenta y dedicada, teniendo presente que la misma servirá, particularmente, para facilitar el acceso a la Matemática que se aprende en el nivel universitario.
- Ordenar y disponer de tiempo suficiente para comprometerse con el aprendizaje, que requiere de un esfuerzo continuado.
- Resolver los ejercicios y problemas y sólo después consultar en "Soluciones".
- Realizar las autoevaluaciones, confrontar los resultados y reflexionar sobre los propios avances.
- Compartir con compañeros y docentes para superar dificultades y discutir estrategias y soluciones.

También es conveniente tener en cuenta al abordar la resolución de un problema las siguientes pautas:

- Tratar de entender a fondo el enunciado, con tranquilidad, a su ritmo.
- Analizar qué pide el problema, cuáles son sus incógnitas, cuáles son sus datos.
- Si es posible realizar un esquema, figura o diagrama.
- Probar, experimentar, buscar un problema semejante.
- Intentar diseñar una estrategia de solución.
- Llevarla a cabo, revisar el proceso, verificar.
- Reflexionar sobre lo que ha hecho y sacar conclusiones para el futuro.

Por último, bajo el título de "Miscelánea", se presentan ejercicios y problemas. Los mismos se elaboraron con diferentes grados de dificultad y sin seguir un orden temático, con la intención de realizar una revisión integradora de los contenidos tratados en el material.

Recuerde que:

- Aprender es descubrir por sí mismo.
- La autosatisfacción es el primer objetivo a lograr.
- La Matemática rigurosa se aprende con la mente, pero la Matemática hermosa se aprende con el corazón.

Martha E. Guzmán

CAPÍTULO 3 - NÚMEROS COMPLEJOS

Las sucesivas ampliaciones de los sistemas numéricos, a partir del conjunto **N** de los números naturales, se realizaron para dar solución a problemas no resolubles en el sistema conocido. Problemas que, en la mayoría de los casos, remiten a la resolución de ecuaciones algebraicas.

Así, los números reales no son suficientes para dar solución a toda ecuación cuadrática. Por ejemplo, la ecuación $x^2+1=0$ carece de solución real, ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo o cero; no existe x real tal que $x^2=-1$.

Fue necesario, entonces, ampliar el concepto de número para incluir aquellos que verificaran esta ecuación particular y para encontrar solución a toda ecuación polinómica.

La idea fue definir un nuevo número que verificara $x^2+1=0$. Tal fue "i" definido de modo que $i^2=-1$.

El sistema de números resultante de adjuntar i y sus combinaciones al conjunto **R** de los números reales es el ***sistema de los números complejos***, cuyo estudio es el objeto de este capítulo.

Definición:

Un número complejo es toda expresión de la forma $z=a+bi$ donde a y b son números reales e i se define por la relación $i^2=-1$

* a se llama parte o componente real de z y se representa mediante $\mathrm{Re}(z)$
* b es la parte o componente imaginaria de z y se representa por $\mathrm{Im}(z)$

La unidad imaginaria

El número i, recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptándose que i se comporta como un número real, respetando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

Son válidas también las propiedades de la potencia:

a) $i^r.i^s=i^{r+s}$ b) $(i^r)^s=i^{r.s}$ con $r,s\in\mathbf{Z}$

Comentario:

El número i (del latín imaginarius) fue llamado así por el matemático Euler (1707-1783).

Los nombres de imaginarios, complejos que hoy se emplean aparecen en el horizonte matemático hacia el siglo XVI y hacen referencia a las raíces cuadradas de números negativos como números imposibles o imaginarios o como " fantasmas de los números reales ".

Si bien los números complejos nacieron en una atmósfera de misterio y desconfianza, cuestionándose la validez de las operaciones, es en el siglo XIX cuando, a través de los trabajos de los matemáticos Wessell (1745-1818), Argand (1768-1822) y Gauss (1777-1855) sobre la interpretación geométrica de los números complejos, se lograron sentar las bases matemáticas sólidas para el nuevo sistema de números.

OBSERVACIONES:

- Es claro que la introducción de i permite resolver las raíces cuadradas de los números negativos. Así, por ejemplo:

  i y $-i$ son raíces cuadradas de -1 pues $i^2=-1$ y $(-i)^2=-1$

  $2i$ es una de las dos raíces cuadradas de -4
- Se puede comprobar, también fácilmente, que las sucesivas potencias de i se repiten periódicamente en grupos de 4.

  $i^0=1$ $\quad i^1=i$ $\quad i^2=-1$ $\quad i^3=i^2.i=(-1).i=-i$

  $i^4=i^2.i^2=1$ $\quad i^5=i^4.i=i$ $\quad i^6=i^4.i^2=-1$ $\quad i^7=i^4.i^3=-i$

  A partir de este reconocimiento es posible calcular cualquier **potencia de *i*.**

  Por ejemplo, para calcular:

  a) i^{21}

  como $21=4\times5+1$, se tiene $i^{21}=(i^4)^5 i^1=1^5 i^1=i$

  b) i^{-112}

  como $112=28\times4$ resto 0, resulta $i^{-112}=\dfrac{1}{i^{112}}=\dfrac{1}{(i^4)^{28}}=\dfrac{1}{1^{28}}=1$

Esta manera de operar es general como se muestra en el **teorema** siguiente:

Para todo $n \in \mathbf{Z}$ es $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división de n por 4 $(r = 0,1,2,3)$

Demostración:

El número entero n se expresa, en la división por 4 como:

$n = 4k + r$ donde $r < 4$, luego el resto de la división puede ser 0, 1, 2 ó 3

Entonces: $i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k . i^r = 1^k . i^r = i^r$

Por lo tanto:
$$\boxed{i^n = \begin{cases} 1 & si \quad r = 0 \\ i & si \quad r = 1 \\ -1 & si \quad r = 2 \\ -i & si \quad r = 3 \end{cases}}$$

➲ EJERCICIOS:

1- Verifique

a) $i + i^3 = 0$

b) $i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = 0$

c) $i^{-12} + i^{-14} = 0$

2- Exprese los siguientes números en la forma bi

$\sqrt{-2}$; $\sqrt{\frac{-9}{16}}$; $\sqrt{-80}$.

3- Para todo número $n \in N$, calcule $i^{n+\alpha}$ cuando α toma valores: 3; 0; 2

El conjunto de los números complejos

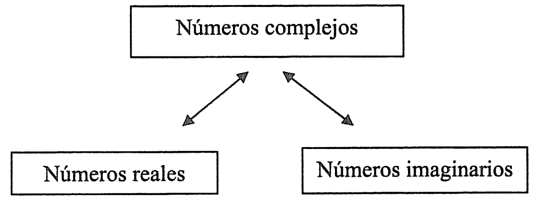
Se simboliza:

$$\boxed{C = \{z = a + bi \,/\, a, b \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}}$$

- **Todo número real *a* es un número complejo**, pues $a = a + 0i$. De este modo, los números reales se identifican con una parte de los números complejos por la correspondencia:

$$a \leftrightarrow a + 0i$$

- Todos los números de la forma bi, llamados **imaginarios puros**, son complejos de parte real nula: pues $bi = 0 + bi$



Igualdad de números complejos

Se dice que los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $d = c$

Ejemplo:

¿Para cuáles valores reales de x e y se verifica la igualdad: $3x + yi = 5x + 1 + 2i$?

Si igualamos las partes reales: $3x = 5x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Si igualamos las partes imaginarias, $y = 2$

Operaciones con números complejos

Suma:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Producto:

$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Opuesto de un número complejo

Dado $z = a + bi$ se llama **opuesto** de z al número que se indica $-z$ tal que

$$-z = -a - bi$$

Ejemplo:

$z = 2 + i \qquad -z = -2 - i \quad ; \quad z = i \qquad -z = -i$

La existencia de opuesto para todo $z \in \mathbb{C}$ hace posible la resta o diferencia de complejos.

Resta:

$(a+bi)-(c+di)=(a+bi)+(-c-di)=(a-c)+(b-d)i$

OBSERVACIÓN:

Para sumar, restar o multiplicar los números complejos se opera, considerándolos como efectivos binomios, manipulando i como si se tratase de una variable para la cual $i^2=-1$.

Ejemplos:

a) $(2+3i)+(4-i)-(2-3i)-(-1+i)=$

$(2+3i)+(4-i)+(-2+3i)+(1-i)=$

$(2+4-2+1)+(3-1+3-1)i=$

$5+4i$

b) $\left(\frac{2}{3}+i\right).\left(-1+\frac{i}{2}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}i-i+\frac{1}{2}i^2=$

$\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-1\right)i=-\frac{7}{6}-\frac{2}{3}i$

EJERCICIOS:

4- Efectúe las operaciones:

a) $(3+6i)+(2-3i)$	e) $(-1-i)+(1+i)$
b) $(7+5i)-(1+2i)$	f) $18-(13-2i)$
c) $(5+7i)(3+4i)$	g) $(1-i)^3$
d) $(2-3i)(-1+4i)$	h) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$

5- Dados $z_1=1+i$ y $z_2=1-i$ pruebe que $-z_1^{\,2}+2z_1-2=z_2^{\,2}-2z_2+2=0$

6- Encuentre el valor de $a\in\mathbb{R}$ de modo que z sea un número real.

$z=(2+i)+(1-ai)+(2a-5i)$

Conjugado de un número complejo

Definición:

El **conjugado** de un número complejo $z=a+bi$ es otro complejo, que se indica $\bar{z}$ y tal que $\bar{z}=a-bi$.

Ejemplo:

Si $z=5+3i$ entonces $\bar{z}=5-3i$.

Fácilmente se pueden probar las siguientes propiedades:

1- $z=\bar{z}$ si y sólo si $z\in\mathbb{R}$

2- $z+\bar{z}=2a$

3- $z-\bar{z}=2bi$

4- $z.\bar{z}=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

5- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

6- $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

7- $-\bar{z}=\overline{-z}$

Las demostraciones se proponen como ejercicio pero, como ejemplo, probamos (4)

Sea $z=a+bi$, luego $\bar{z}=a-bi$ y

$z.\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

Cociente de números complejos

La noción de conjugado permite hallar de manera práctica el cociente $\frac{a+bi}{c+di}$ multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 4+i$ y $z_2 = 2-3i$

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{2^2+3^2} = \frac{5}{13} + \frac{14i}{13}$$

Inverso de un número complejo

Dado $z = a+bi \neq 0$ se define $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi}$

Realizando el cociente resulta:

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\boxed{z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-bi}{a^2+b^2}}$$

Para $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di \neq 0$ verifique que $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$

Otras propiedades de los conjugados:

8- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\quad (z_2 \neq 0)$

9- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $\quad (z \neq 0)$

10- Si con $R(z_1, z_2, ..., z_r)$ se indica una operación efectuada combinando los complejos $z_1, z_2, ..., z_r$ en sumas, productos, potencias y cocientes, entonces $\overline{R(z_1, z_2, ..., z_r)} = R(\overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_r})$

➲ EJERCICIOS:

7- Calcule:

a) $\dfrac{(1-i)}{(1+i)}$ $\qquad$ c) $\overline{\left(\dfrac{6-i}{2i}\right)^2}$

b) $\dfrac{(1-i)(1+2i)}{1+i}$ $\qquad$ d) $\dfrac{(2-2i)^3}{(2+2i)^3}$

8- Efectúe las operaciones

a) $\dfrac{6i}{5+4i}$ $\qquad$ g) $4i.9i - 3i.(-2i)^2$

b) $(2+5i)(-3+i)$ $\qquad$ h) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

c) $-(4-3i)-(-3+7i)$ $\qquad$ i) $\overline{\dfrac{12+i}{1-i}}$

d) $\dfrac{(14+11i)-13i}{i}$ $\qquad$ j) $\overline{\left(\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right)}$

e) $i^{12}.i^{-121} + i^{100}$ $\qquad$ (k) $\dfrac{1+i}{\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$

f) $\dfrac{6+2i}{\overline{3-i}}$ $\qquad$ l) $\overline{a-bi}.\dfrac{1}{\overline{a+bi}}$

9- Calcule $\dfrac{1}{z}$ para:

a) $z = -4i$ $\qquad$ b) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i$ $\qquad$ c) $z = -4+\sqrt{3}i$

10- Encuentre los números complejos $z = a+bi$ tales que:

a) $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ $\qquad$ b) $z = -\overline{z}$

11- Encuentre los números reales x e y que satisfacen:

a) $(x+yi)(3-2i) = 4+i$

b) $(x+iy)(1+i) = 3-i$

c) $(x+iy)4i = 14i$

12- Compruebe que el número complejo dado satisface la ecuación dada.

a) $1+2i$; $\qquad x^2 - 2x + 5 = 0$

b) $3+2i$; $\qquad x^2 - (7+3i)x + (10+11i) = 0$

13- Encuentre el número z cuyo inverso es $5 + 6i$.

14- Calcule a de modo que el complejo $z = \dfrac{2+ai}{1-i}$ sea imaginario puro.

Raíz cuadrada de un número complejo en forma binómica

Se llama **raíz cuadrada** de un número complejo $z = a+bi$, a todo número x que sea solución de $x^2 = a+bi$. Se indica $x = \sqrt{a+bi}$ y resulta:

$$x = \sqrt{a+bi} \Leftrightarrow x^2 = a+bi$$

Ejemplo:

Calcular $\sqrt{3+4i}$.

Si existe solución x, será de la forma: $x = u + vi$ y deberá cumplir

$(u+vi)^2 = 3+4i$.

Después de resolver el cuadrado y de aplicar igualdad de números complejos, los números reales u y v buscados deben satisfacer el sistema:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 3 & (1) \\ 2uv = 4 & (3) \end{cases}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de las igualdades y las sumamos:

$$u^4 + v^4 - 2u^2v^2 = 9$$
$$4u^2v^2 = 16$$
$$\overline{u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = 25}$$
$$\left(u^2+v^2\right)^2 = 25$$
$$u^2 + v^2 = 5 \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2), obtenemos $2u^2 = 8$, luego

$$u = 2 \text{ o } u = -2.$$

Restando miembro a miembro (2) y (1), nos da $2v^2 = 2$ por lo tanto

$$v = 1 \text{ o } v = -1.$$

Ahora bien, los valores de u y v deben combinarse de modo que el signo de uv sea positivo, en virtud de la ecuación (3) $2uv = 4$.

Entonces las soluciones son:

$$x_1 = 2 + i \quad \text{y} \quad x_2 = -2 - i$$

El procedimiento seguido para resolver el problema es constructivo de modo que fácilmente puede ser empleado para demostrar el **teorema**:

> Si $x = u + vi$ es solución de $x^2 = a + bi$, entonces:
>
> $$u = \pm\sqrt{\frac{p+a}{2}}; \qquad v = \pm\sqrt{\frac{p-a}{2}}$$
>
> donde $p = \sqrt{a^2+b^2}$ y el signo de $u.v$ debe ser igual al signo de b.

El cuerpo de los números complejos

La suma y el producto definidos en $\mathbb{C}$ verifican propiedades semejantes a las de la suma y el producto de números reales. Por otra parte, los números reales mantienen en $\mathbb{C}$ las propiedades formales de la suma y el producto debido a su identificación con un subconjunto de los números complejos.

Propiedades de la suma y el producto de números complejos

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces

Suma

$S_1)$ $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	Clausura
$S_2)$ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	Conmutativa
$S_3)$ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	Asociativa
$S_4)$ $\exists\ 0 / z + 0 = z \ \ \forall z \in \mathbb{C}$	Existencia de neutro
$S_5)$ $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z \in \mathbb{C} / z + (-z) = 0$	Existencia de opuesto

Producto

$P_1)$ $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$	Clausura
$P_2)$ $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$	Conmutativa
$P_3)$ $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$	Asociativa
$P_4)$ $\exists 1 \in \mathbb{C} / z \times 1 = z \ \ \forall z \in \mathbb{C}$	Existencia de neutro
$P_5)$ $\forall z \in \mathbb{C} / z \neq 0, \exists z^{-1} \in \mathbb{C} / z \times z^{-1} = 1$	Existencia de inverso
$P_6)$ $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$	Distributiva del producto respecto de la suma

Cuando un sistema de números, con operaciones definidas en él, satisface las propiedades anteriores recibe el nombre de cuerpo. Podemos hablar, entonces, del ***cuerpo de los números complejos*** y también del cuerpo de los números reales.

➲ EJERCICIO:

15- Ejemplifique las propiedades anteriores.

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Demuestre el Teorema que establece las raíces cuadradas de un número complejo en forma binómica.

2. Encuentre dos números reales x, y que verifiquen

$$(x+yi)(3+2i)^2 = \overline{2+3i}$$

3. Verifique las igualdades:

   i) $i^0 + i^1 + i^2 + \ldots\ldots + i^{100} = 1$

   ii) $(2-\sqrt{5}i)^2 - 4(2-\sqrt{5}i) + 9 = 0$

   iii) $\left(\dfrac{2+2i}{2-2i}\right)\left(\dfrac{3+3i}{3-3i}\right) = -1$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones a coeficientes complejos:

   a) $(3+i)z = 4i$

   b) $(3+i)z = 6+2i$

   c) $z^2 = 3-4i$

5. Calcule las siguientes raíces cuadradas:

   a) $\sqrt{2i}$

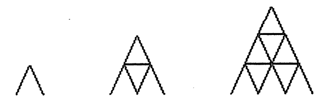
   b) $\sqrt{4-3i}$

   c) $\sqrt{-1+i}$

6. Sabiendo que una de las raíces cuadradas de un complejo es $\frac{1}{2} - i$, hallar dicho complejo y la raíz restante del mismo.

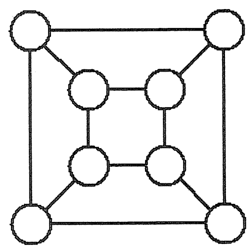
Un momento para la distracción.....

- Para hacer una torre de naipes de 1 piso se usan 2 naipes, para hacerla de 2 pisos se usan 7 naipes, para hacerla de 3 pisos se usan 15 naipes.

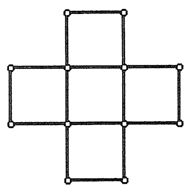


¿Cuántos naipes hay que usar para hacer una torre de 100 pisos?

- Distribuir en los círculos los números de tres dígitos 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222, sin repeticiones, de modo que los números escritos en círculos que están unidos entre si por un segmento no tengan más de una coincidencia (es decir, pueden tener exactamente una coincidencia o no tener coincidencias).



- Escribir en cada vértice un número entero del 1 al 12 inclusive, sin repeticiones, de modo que en cada uno de los 5 cuadrados la suma de los cuatro números de sus vértices sea la misma.



CAPÍTULO 5- POLINOMIOS

Entre las expresiones algebraicas que se presentan con frecuencia en Matemática se encuentran los polinomios, razón por la cual se revisarán las operaciones usuales entre los mismos: suma, diferencia, producto y división; comenzando con la definición:

> Un polinomio en una variable es una expresión de la forma
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$$
>
> donde n es un entero no negativo, x es una variable y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números complejos que llamamos **coeficientes**.

Ejemplos:

i- $P(x) = (2-i)x^3 + 6ix^2 - (1-i)x + \sqrt{2}i$

ii- $Q(x) = 5x^6 - 3x - \frac{1}{7}$

Se indicará:

* $\mathbb{C}[x]$ para simbolizar el conjunto de polinomios con coeficientes complejos.

* $\mathbb{R}[x]$ para representar el conjunto de polinomios con coeficientes reales.

Utilizando el símbolo de sumatoria se puede expresar el siguiente polinomio:

$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ en la forma $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$

Generalizando, un polinomio se puede expresar en forma abreviada:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{, con } a_k \in \mathbb{C} \text{ y } n \in \mathbb{N}_0}$$

El número $a_n \neq 0$ se llama coeficiente principal.

El número a_0 es el término constante o independiente.

Si $a_n \neq 0$, se dice que n es el grado del polinomio y se simboliza $gr(P) = n$

Entonces, el grado de un polinomio es el mayor exponente de los términos de coeficientes no nulos.

Si el polinomio se reduce a un número, se llama polinomio **constante**: $P(x) = a_0$

En este caso, si $a_0 \neq 0$, el polinomio constante tiene grado 0.

Si todos los coeficientes son iguales a cero, $P(x) \equiv 0$ se denomina polinomio **nulo** y carece de grado.

Un **monomio** es un polinomio de un solo término. Un polinomio de dos términos se llama **binomio** y uno de tres términos es un **trinomio**.

Los polinomios de grado 1 son de la forma $a_1x + a_0$, con $a_1 \neq 0$ y se denominan polinomios **lineales** o de primer grado.

Los polinomios de grado 2 son de la forma $a_2x^2 + a_1x + a_0$ con $a_2 \neq 0$ y se llaman polinomios **cuadráticos** o de segundo grado.

Los polinomios de grado 3 son de la forma $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con $a_3 \neq 0$ y se llaman polinomios **cúbicos** o de tercer grado.

➲ EJERCICIOS:

1- Indique y justifique, cuales de las siguientes expresiones son polinomios:

a) $(x+1)^3$

b) $5^x - x^3 + 2x^2$

c) $(3+2i)x^5 - 2ix^2 + (1+i)$

d) $x^{\frac{2}{7}} + x^{\frac{1}{7}} - x + \frac{1}{7}$

e) $\sqrt{xi} + 2$

2- Complete:

a) $3x^5 + 2x^2 - 1$ es un polinomio de grado.............y su coeficiente principal es................

b) $1-i$ es un polinomio.........de grado..........

c) $x-(1-i)$ es un polinomio..........y su término constante es........

d) 0 es el polinomio.......... y carece de.........

Igualdad de polinomios

Dos polinomios pertenecientes a $\mathbb{C}[x]$ **son iguales** si y solo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.

➲ EJERCICIOS:

3- Complete:

Dados $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; $Q(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $P(x)=Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$

4- Determine los valores de $a,\ b,\ c,\ d$ para que: $P(x)=Q(x)$

a) $P(x)=-\frac{1}{2}x^4+4x^3+5x+2$

$Q(x)=(c+d)x^4+(b+c)x^3+(a+b)x+a$

b) $P(x)=ax^4+dx^3+(b-c)x^2+cx+2a$

$Q(x)=ix^4+(1-i)x^3+2x^2-x+2i$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma de polinomios:

Dados los polinomios

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$

$Q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0$

se define **suma** de $P(x)$ y $Q(x)$ al polinomio que se indica $P(x)+Q(x)$ tal que :

*.Si $m=n$ entonces

$$P(x)+Q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\dots+(a_0+b_0)$$

*.Si $m \neq n$ se puede suponer, sin perder generalidad, que $m > n$.

Entonces, llamando $P^*(x)$ a:

$$P^*(x)=0x^m+0x^{m-1}+\dots+a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0\ ,$$

se define: $P(x)+Q(x)=P^*(x)+Q(x)$

Ejemplo:

Dados $P(x)=x^5-ix^4+x^2-2ix+1$ y $Q(x)=3ix^2+5x$

$$P(x)+Q(x)=(x^5-ix^4+x^2-2ix+1)+(3ix^2+5x)$$
$$=x^5-ix^4+(1+3i)x^2+(5-2i)x+1$$

➲ EJERCICIOS:

5- Analice cuáles de las propiedades de la suma de números complejos se verifican para la suma de polinomios.

6- Dados $P(x)=x^4-2x^2+ix-1$ $\quad Q(x)=-2x^3+x^2+3$

$S(x)=-x^4+3x^3-(1+i)x+1$ $\quad T(x)=-x^3+2x^2-x+1$

Complete:

$P(x)+Q(x)=\dots\dots\dots\dots$ $\quad gr(P(x)+Q(x))=\dots\dots\dots$

$P(x)+S(x)=\dots\dots\dots\dots$ $\quad gr(P(x)+S(x))=\dots\dots\dots$

$P(x)+T(x)=\dots\dots\dots\dots$ $\quad gr(P(x)+T(x))=\dots\dots\dots$

7- Enuncie la propiedad sobre el grado de la suma de dos polinomios con respecto al grado de los sumandos.

8- Recordando que todo polinomio acepta polinomio opuesto defina la diferencia de dos polinomios.

Producto de polinomios:

Dados $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

y $Q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0$

El polinomio que se indica $P(x).Q(x)$ es el polinomio **producto** cuyos términos son de la forma: $a_i b_j x^{i+j}$ donde $i=0,1,2,\dots,n$ y $j=0,1,2,\dots,m$.

$$P(x).Q(x)=a_n b_m x^{n+m}+\dots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

Ejemplo:

Dados $P(x)=x^5-ix^4+x^2-2ix+1$ y $Q(x)=3ix^2+5x$

$$P(x).Q(x)=(x^5-ix^4+x^2-2ix+1)(3ix^2+5x)$$
$$=3ix^7+5x^6+3x^6-5ix^5+3ix^4+5x^3+6x^3-10ix^2+3ix^2+5x$$
$$=3ix^7+8x^6-5ix^5+3ix^4+11x^3-7ix^2+5x$$

EJERCICIOS:

9- Dados los polinomios:

$P(x) = -ix^3 + (1+i)x + \frac{1}{2}$

$Q(x) = x - 3$

$S(x) = x^2 + x + 1$

Efectúe los productos y verifique:

i) $P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$

ii) $(P(x).Q(x))S(x) = P(x)(Q(x).S(x))$

iii) $(P(x)+Q(x))S(x) = P(x).S(x) + Q(x).S(x)$

10- Dados los polinomios:

$P(x) = (1+i)x - i$ $\quad S(x) = x^3 - 2x^2 - ix$ $\quad R(x) = 0$

$Q(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad T(x) = 3i$

Complete:

$P(x).Q(x) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad gr(P(x).Q(x)) = \ldots\ldots\ldots$

$P(x).S(x) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad gr(P(x).S(x)) = \ldots\ldots\ldots$

$S(x).T(x) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad gr(S(x).T(x)) = \ldots\ldots\ldots$

$Q(x).R(x) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad gr(Q(x).R(x)) = \ldots\ldots\ldots$

11- Exprese la propiedad sobre el grado del producto de dos polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$.

12- ¿Existen polinomios con inverso para el producto?. Si existen, ¿cuáles son?

13- Justifique el enunciado: $P(x).Q(x) = 0$ si y solo si $P(x) = 0$ ó $Q(x) = 0$

División de polinomios:

Dado un polinomio $P(x)$ y otro $D(x) \neq 0$,

siempre existen otros dos polinomios $Q(x)$ **(cociente)** y $R(x)$ **(resto)** tal que $gr(R(x)) < gr(D(x))$ o $R(x) = 0$, de manera que:

$$P(x) = Q(x).D(x) + R(x)$$

El proceso de la división de un polinomio por otro se sistematiza en un esquema para obtener el cociente y el resto, tal como se muestra en los ejemplos que siguen:

i) $P(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$D(x) = x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & x^2 + x - 1 \\ \cline{3-3}
 & -x^6 - x^5 + x^4 & x^4 + 3x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
 & 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & \\
 & -3x^4 - 3x^3 + 3x^2 & \\ \cline{2-2}
 & -x^3 + 2x - 1 & \\
 & x^3 + x^2 - x & \\ \cline{2-2}
 & x^2 + x - 1 & \\
 & -x^2 - x + 1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Cociente: $Q(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$; Resto: $R(x) = 0$; se verifica:

$P(x) = D(x)(x^4 + 3x^2 - x + 1)$

$x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x^4 + 3x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$

ii) $P(x) = x^3 - 2ix^2 - x + 1$

$D(x) = x - i$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2ix^2 - x + 1 & x - i \\ \cline{2-2}
-x^3 + ix^2 & x^2 - ix \\ \hline
-ix^2 - x + 1 & \\
+ix^2 + x & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Cociente: $Q(x) = x^2 - ix$, Resto: $R(x) = 1$

Se verifica $x^3 - 2ix^2 - x + 1 = (x^2 - ix)(x - i) + 1$

OBSERVACIÓN:

Cuando el resto de la división de $P(x)$ por $D(x)$ es cero, como en el ejemplo i), se dice que "$D(x)$ divide a $P(x)$" o que "$P(x)$ es divisible por $D(x)$" o que

"$D(x)$ es un factor de $P(x)$" o que "$P(x)$ es un múltiplo de $D(x)$" y entonces $P(x) = Q(x).D(x)$

Regla de Ruffini

Se aplica para dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $Q(x) = x - a$ donde $a \in \mathbf{C}$.

Ejemplo:

Sea $P(x) = 4x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 5x + 6$ y $Q(x) = x - 2$

Queremos calcular el polinomio cociente y resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$

El proceso de aplicación de la Regla de Ruffini requiere:

1º) Completar, si no lo estuviere, el polinomio dividendo $P(x)$ y escribir los coeficientes en lista: $4 \quad -5 \quad -2 \quad -6 \quad -5 \quad 6$

Colocar a un lado el valor de x que anula el divisor, en nuestro caso $x = 2$ hace $Q(2) = 0$

2º) Dibujar una línea debajo de los coeficientes y bajar el primer coeficiente:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 4 & -5 & -2 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & \downarrow & & & & & \\ \hline & 4 & & & & & \end{array}$$

3º) Multiplicar por 2 el primer coeficiente y sumar éste producto al segundo coeficiente:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 4 & -5 & -2 & -6 & -5 & 6 \\ & & + & + & + & + & + \\ 2 & & 8 & 6 & 8 & 4 & -2 \\ \hline & 4 & 3 & 4 & 2 & -1 & 4 \end{array}$$

4º) Repetir este procedimiento sucesivamente con todos los coeficientes hasta agotarlos. De esta manera se obtienen los coeficientes del cociente. El último número es el resto de la división.

El resultado es $C(x) = 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ y $R(x) = 4$

Para el ejemplo ii) anterior:

$P(x) = x^3 - 2ix^2 - x + 1$ y $D(x) = x - i$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2i & -1 & 1 \\ i & & i & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -i & 0 & 1 \end{array} \qquad Q(x) = x^2 - ix \qquad R(x) = 1$$

EJERCICIO:

14- Efectúe las divisiones entre los polinomios $P(x)$ y $D(x)$. En las que sea posible aplique la regla de Ruffini.

i) $P(x) = 6x^3 - x + 1$, $D(x) = 3ix^2$ ii) $P(x) = i^3x^3 + i$, $D(x) = x - i$ iii) $P(x) = x + 1$, $D(x) = x - i$

Raíces de un polinomio

Un número $\alpha \in \mathbf{C}$ es una **raíz**, o un cero del polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

si el valor numérico de $P(x)$ para $x = \alpha$ es igual a 0.

Es decir, α es raíz de $P(x)$ si $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$

OBSERVACIÓN:

$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0$ es el valor numérico del polinomio para $x = \alpha$

El **Teorema del Resto**, proporciona un elemento para el reconocimiento de una raíz de un polinomio.

El **resto** de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbf{C}$ es igual a $P(\alpha)$

Como corolario del teorema se tiene:

Un número complejo α es **raíz** de $P(x)$ si y solo si $P(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$

➲ EJERCICIOS:

15- Demuestre el Teorema del resto y su corolario.

16- Calcule el resto de la división de $P(x)=6x^3+2x^2-x+3i$ por $D(x)=x-i$

17- A partir de ejemplos conjeture para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, $P(x)$ es divisible por $Q(x)$. Demuestre esa conjetura y dé ejemplos.

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$ divisible por $Q(x)$ para n:
x^n+a^n	$x+a$	
x^n+a^n	$x-a$	
x^n-a^n	$x+a$	
x^n-a^n	$x-a$	

18- Calcule h, de modo que 1 sea raíz del polinomio $P(x)=3x^5-x^4+2x^3-ix+h$

19- Determine h de manera que el resto de la división de $P(x)=2x^4+3x^2-x+h$ por $Q(x)=x-2$ sea 0

Ecuaciones polinómicas

Dado un polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ con $a_j \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, se llama **ecuación polinómica** o ecuación asociada al polinomio $P(x)$ a la ecuación:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

Se llama grado de la ecuación al grado del polinomio que la define.

➭ OBSERVACIÓN:

De la misma definición de raíz de un polinomio resulta que encontrar las raíces de un polinomio $P(x)$ equivale a resolver la ecuación asociada $P(x)=0$

Ejemplos:

i- Las raíces del polinomio $P(x)=2x^2+3x-2$ son las soluciones de la ecuación $2x^2+3x-2=0$ (*)

Estas son: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-2$, obtenidas aplicando resolvente a (*).

ii- $Q(x)=x^2+1$ tiene dos raíces complejas que son las soluciones de la ecuación asociada $x^2+1=0$. Se obtienen calculando las raíces cuadradas de -1: $x=\pm i$.

➲ EJERCICIOS:

20- Halle las soluciones de la ecuación $x^4-1=0$

21- El polinomio $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ tiene sus coeficientes reales y positivos. Si admite una raíz real ¿cuál es su signo?

22- Demuestre la propiedad: los polinomios $P(x)$ y $Q(x)=kP(x)$, con $k \neq 0$ tiene las mismas raíces.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Si bien no hay fórmulas algebraicas para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro - Evaristo Galois (1811-1832), da una demostración rigurosa al respecto complementando los trabajos de los matemáticos Abel y Ruffini - existen algunos recursos para encontrar las raíces en forma exacta o aproximada.

En particular hay programas computacionales que permiten obtener las raíces reales y complejas de cualquier polinomio con suficiente aproximación.

En el proceso de la búsqueda de las raíces serán de utilidad las propiedades, que se enuncian a continuación, sobre el número de raíces, sobre las raíces complejas de polinomios a coeficientes reales y acerca de las raíces racionales de los polinomios a coeficientes enteros. Así también, el esquema de Ruffini es una posibilidad para verificar si un número es raíz de un polinomio.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio $P(x)$, tal que $gr(P(x))>0$, admite al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Este teorema permite probar que todo polinomio $P(x)$ de grado n $(n>0)$ tiene n raíces y que, además, se puede descomponer en producto de n factores.

Orden de multiplicidad de una raíz

α **es raíz de multiplicidad** h si $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha)^h$ y no es divisible por $(x-\alpha)^{h+1}$

Teorema de la descomposición factorial

Todo polinomio $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ de grado positivo admite una **única** descomposición en factores de la forma $P(x)=a_n(x-\alpha_1)^{h_1}(x-\alpha_2)^{h_2}\ldots(x-\alpha_r)^{h_r}$, donde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ son r raíces distintas de $P(x)$ y $h_1,h_2,\ldots,h_r$ indican las respectivas multiplicidades de $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ y $h_1+h_2+\ldots+h_r=n$.

OBSERVACIONES:

- la suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio es igual a su grado.
- todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas.
- si se conviene en contar cada raíz tantas veces como lo indica su multiplicidad, entonces se puede afirmar que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

Ejemplos:

i- El polinomio: $P(x)=3x^2+3x-6$, se descompone factorialmente como: $P(x)=3(x-1)(x+2)$, donde $x_1=1, x_2=-2$, son las raíces de la ecuación asociada: $3x^2+3x-6=0$

ii- Para factorizar el polinomio $P(x)=x^3+27$, busquemos las raíces del mismo.

Para ello, resolvamos la ecuación asociada al polinomio $P(x)$, $x^3+27=0$ (1)

Por el ejercicio 17, sabemos que:

$$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$$

Este producto, es cero si y sólo si $x+3=0$ ó $x^2-3x+9=0$ (2)

Entonces, $x_1=-3$ es una solución de (1) y $x_2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i$, $x_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i$ son las soluciones de (2) y por lo tanto son las otras soluciones de (1).

Luego, la factorización del polinomio es

$$P(x)=(x+3)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i\right)$$

iii-Factorizar el polinomio $P(x)=2x^4-8x^3+8x^2$

Para ello, resolvamos la ecuación asociada al mismo $2x^4-8x^3+8x^2=0$

Observemos que $2x^4-8x^3+8x^2=2x^2(x^2-4x+4)=2x^2(x-2)^2=0$ (*)

Entonces, las soluciones de la ecuación (*) son las raíces del polinomio $P(x)$; ellas son: 0 raíz doble y 2 raíz doble, el cual se factoriza: $P(x)=2x^2(x-2)^2$

iv- El ejemplo que se presenta a continuación muestra los lineamientos que se siguen para demostrar el teorema de la descomposición en factores de un polinomio.

Sea $P(x)=3x^5-15x^4+21x^3+3x^2-24x+12$

$\alpha=1$ es una raíz de $P(x)$,

la verificamos aplicando el esquema de Ruffini.

	3	-15	21	3	-24	12
1		3	-12	9	12	-12
	3	-12	9	12	-12	0

Entonces, por el teorema de la división, resulta:

$P(x)=(x-1)\underbrace{(3x^4-12x^3+9x^2+12x-12)}_{Q_1(x)}$ (1)

Nuevamente el teorema fundamental asegura que $Q_1(x)$ tiene una raíz.

Se comprueba, aplicando el esquema de Ruffini, que $\alpha_2=1=\alpha_1$, es raíz de $Q_1(x)$ y en consecuencia de $P(x)$.

	3	-12	9	12	-12
1		3	-9	0	12
	3	-9	0	12	0

$Q_1(x)=(x-1)(3x^3-9x^2+12)$ y reemplazando en (1)

$P(x)=(x-1)(x-1)\underbrace{(3x^3-9x^2+12)}_{Q_2(x)}$

Repitiendo el razonamiento observamos que $\alpha_3=-1$ es raíz de $Q_2(x)$.

	3	-9	0	12
-1		-3	12	-12
	3	-12	12	0

De modo que $Q_2(x)=(x+1)(3x^2-12x+12)$ y

$P(x)=(x-1)^2(x+1)(3x^2-12x+12)$

$P(x)=(x-1)^2(x+1)3(\underbrace{x^2-4x+4}_{Q_3(x)})$

El cociente $Q_3(x)$ admite a 2 como raíz doble de modo que $Q_3(x)=(x-2)^2$ y entonces $P(x)=3(x-1)^2(x+1)(x-2)^2$

Queda verificado, entonces, que $P(x)$ admite 5 raíces:

$\alpha_1=\alpha_2=1$ (1 es raíz doble), $\alpha_3=-1$ (-1 es raíz simple), $\alpha_4=\alpha_5=2$ (2 es raíz doble o de multiplicidad 2) y además queda expresado en su descomposición en factores.

➭ OBSERVACIÓN:

Si α es una raíz del polinomio $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$, $n\geq 2$ las restantes raíces de $P(x)$ son las raíces del polinomio cociente que se obtiene al dividir $P(x)$ por $(x-\alpha)$.

POLINOMIOS A COEFICIENTES REALES

Para polinomios a coeficientes reales de grado positivo es válido el siguiente teorema que afirma que si el polinomio es a coeficientes reales y admite una raíz compleja, entonces también admite la conjugada.

Teorema

Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ es un polinomio, con $a_i \in \mathbf{R}$ para $i=0,1,\ldots,n$ y $\alpha \in \mathbf{C}$ tal que $P(\alpha)=0$, entonces: $P(\overline{\alpha})=0$.

Demostración:

Recordando las propiedades de las operaciones de los números complejos y sus conjugados se tiene:

$$P(\overline{\alpha})=\sum_{j=0}^{n} a_j(\overline{\alpha})^j=\sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\,\overline{\alpha^j}=\sum_{j=0}^{n} \overline{a_j\alpha^j}=\overline{\sum_{j=0}^{n} a_j\alpha^j}=\overline{P(\alpha)}=\overline{0}=0$$

Ejemplo:

El polinomio $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ admite las raíces $\alpha_1=i$ y $\overline{\alpha_2}=-i$, como se verifica aplicando la regla de Ruffini

	1	-1	-1	-1	-2
i		i	$-1-i$	$1-2i$	2
	1	$-1+i$	$-2-i$	$-2i$	0
$-i$		$-i$	i	$2i$	
	1	-1	-2	0	

Las otras raíces son $\alpha_3=-1$ y $\alpha_4=2$, obtenidas al resolver la ecuación $x^2-x-2=0$. Entonces: $P(x)=(x-i)(x+i)(x+1)(x-2)$

➲ EJERCICIO:

23- Justifique las propiedades siguientes:

i- Si un polinomio es a coeficiente reales y tiene raíces complejas, éstas aparecen en número par.

ii-Si $\alpha \in \mathbf{C}$ es raíz de un polinomio a coeficientes reales con multiplicidad h, entonces $\overline{\alpha}$ es también raíz de multiplicidad h.

iii- Todo polinomio a coeficientes reales de grado impar admite al menos una raíz real.

➭ OBSERVACIÓN:

En la descomposición factorial de un polinomio a coeficientes reales con raíces complejas aparecen los factores $x-\alpha$ y $x-\overline{\alpha}$. Si se quiere que en esa descomposición no aparezcan números complejos, bastará multiplicar esos factores para obtener factores de segundo grado con coeficientes reales de la forma x^2+px+q.

Así, el polinomio del ejemplo $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ se puede expresar: $P(x)=(x^2+1)(x+1)(x-2)$

Ejemplo:

En el polinomio $P(x)$ expresado en factores del siguiente modo:

$$P(x) = 3(x-5)(x-i)(x+i).$$

Como $(x-i)(x+i) = x^2+1$, se obtiene la descomposición de $P(x)$ en $\mathbf{R}$;

$$P(x) = 3(x-5)(x^2+1)$$

➲ EJERCICIOS:

24- Determine β para que $P(x)$ sea a coeficientes reales.

$$P(x) = 3(x-1)^2(x-(4-i)).(x-\beta)$$

25- Construya el polinomio $P(x)$ a coeficientes reales y de menor grado posible que tenga como raíces $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = -2$ con multiplicidad 3 y $\alpha_3 = 3+i$; sabiendo además que $P(0) = -1$

POLINOMIOS A COEFICIENTES ENTEROS

Si $P(x)$ es un polinomio a coeficientes enteros el siguiente teorema permite hallar, si existen, las raíces racionales.

Teorema de Gauss

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbf{Z}\ \forall i$, admite la raíz $\dfrac{p}{q}$ con p y q enteros primos entre si y $q \neq 0$, entonces:

(a) a_0 es múltiplo de p

(b) a_n es múltiplo de q

Ejemplo:

Sea $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 27x - 18$. Como se trata de un polinomio a coeficientes enteros es posible aplicar el Teorema de Gauss; entonces;

Divisores de $a_0 = -18$: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 18$

Divisores de $a_n = 2$: $\pm 1;\ \pm 2$

Posible raíces racionales: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 18; \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{9}{2};\ \pm\frac{1}{2}$

$\alpha_1 = -1$ es raíz, pues $P(-1) = 0$.

Verificamos aplicando la regla de Ruffini resulta:

	2	-7	-27	-18
-1		-2	9	18
	2	-9	-18	0

$P(x) = (x+1)(2x^2 - 9x - 18)$. Las otras dos raíces $\alpha_2 = -\frac{3}{2}$ y $\alpha_3 = 6$ son las soluciones de: $2x^2 - 9x - 18 = 0$.

$P(x)$ se descompone en factores $P(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+1)(x-6)$

Demostración del teorema:

Si $\dfrac{p}{q}$ es raíz de $P(x)$ entonces $a_n\left(\dfrac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right) + a_0 = 0$

Distribuyendo las potencias respecto del cociente y multiplicando ambos miembros por q^n se obtiene:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p^1 q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad (1)$$

Entonces:

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) \qquad (2)$$

El número $(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1})$ es entero pues los coeficientes del polinomio dado como así también p y q son enteros y están sometidos a operaciones enteras: suma, producto y potencia con exponente natural.

Se acepta $p \neq 0$ (si $p = 0$, debe ser $a_0 = 0$)

Como p no divide a q ya que $\dfrac{p}{q}$ es una fracción irreducible p tampoco divide a q^n.

En consecuencia p divide a a_0, es decir a_0 es un múltiplo de p, con lo cual queda probado la parte (a) del teorema.

Escribiendo la igualdad (1) del modo siguiente:

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \qquad (3)$$

y reproduciendo el razonamiento se llega fácilmente a probar la parte (b) del teorema.

OBSERVACIONES:

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbf{Z}$ $\forall i$, entonces:

- Si $a_n = 1$ y $P(x)$ tiene raíces racionales, éstas son enteras.
- Si p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n, $\frac{p}{q}$ no es necesariamente una raíz de $P(x)$.
- Si $a_0 = 0$, entonces $\alpha = 0$ es una raíz de $P(x)$.

EJERCICIOS:

26- Calcule las raíces de los polinomios siguientes y luego factorice:

i) $P(x) = 3x^5 - 11x^4 + 11x^3 - 7x^2 + 8x + 4$

ii) $R(x) = x^5 - 5x^3 + 6x$

iii) $S(x) = (x^2+1)(x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2)$

iv) $T(x) = x^4 + x^2 - 2$

v) $R(x) = (x+3)^2 - (x-2)^2$

vi) $S(x) = x^4 - 16$

vii) $T(x) = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

viii) $U(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

27- Sea $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

i) Calcule $P(i)$

ii) Escriba la descomposición en factores de $P(x)$

28- Construya un polinomio a coeficientes reales, del menor grado, que admita las raíces $\alpha_1 = i$; $\alpha_2 = 1 - i$; $\alpha_3 = -1$ doble.

29- Encuentre los valores de α y β para que el polinomio $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + 1$ admita la raíz $x = 1$ de multiplicidad 2.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS REALES

Una expresión algebraica se dice **fraccionaria, fracción algebraica** o **expresión racional** si es el cociente de dos polinomios, teniendo en cuenta que el conjunto de valores que puede asumir está limitado a los números que no anulan el denominador.

Nos limitaremos a considerar sólo polinomios en una variable con coeficientes reales.

Por ejemplo $\frac{x^2+1}{5x+3}$ $(x \neq -\frac{3}{5})$; $\frac{x^2-2}{x-1}$ $(x \neq 1)$

Dos expresiones racionales $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ se dicen **equivalentes** si asumen los mismos valores numéricos para toda asignación de la variable en las dos expresiones.

Se indica: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

Propiedades:

1) Las expresiones racionales $\frac{A}{B}$ y $\frac{AM}{BM}$ son equivalentes, siempre que $M \neq 0$

Ejemplo:

$\frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}$ $\forall x \in \mathbf{R} - \{0,1\}$

2) Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son equivalentes, entonces $A \cdot D = B \cdot C$.

Aplicando esta propiedad se puede decidir cuando dos expresiones no son equivalentes. Por ejemplo, $\frac{x+7}{x^2}$ y $\frac{7}{x}$ $(x \neq 0)$ no son equivalentes pues $(x+7).x \neq 7x^2$.

EJERCICIOS:

30- Escriba una expresión equivalente con la dada:

i) $\frac{8}{x-2} = \frac{?}{x^2-2x}$ $(x \neq 0 \wedge x \neq 2)$

ii) $\dfrac{x-y}{2x}=\dfrac{?}{-2x}$ $(x \neq 0)$

31- Compruebe que son equivalentes las siguientes expresiones:

i) $\dfrac{x+2}{x}$ y $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$ $(x \neq 0 \wedge x \neq 1)$

ii) $\dfrac{7}{x}$ y $\dfrac{7x}{x^2}$ $(x \neq 0)$

Simplificación de expresiones fraccionarias

También se conoce este proceso como **"reducir a la expresión mínima"**. El método consiste en descomponer el numerador y el denominador en factores a coeficientes reales, observar los factores comunes a ambos y dividir numerador y denominador por esos factores comunes.

Se obtiene así una expresión racional, **reducida** o **simplificada**, equivalente con la dada.

Ejemplo:

$$\frac{4x^2+7x}{x^2}=\frac{x(4x+7)}{xx}=\frac{4x+7}{x} \quad (x \neq 0)$$

➲ EJERCICIO:

32- Simplifique: (indique previamente la restricción para la variable)

i) $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$

ii) $\dfrac{x^2+5x}{x}$

iii) $\dfrac{9-x^2}{3+x}$

iv) $\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{(x-3)^2}$

v) $\dfrac{x^4-b^4}{x^2-b^2}$

vi) $\dfrac{8x^3+36x^2+54x+27}{x(2x+3)}$

Mínimo común múltiplo de varios polinomios

Se llama **mínimo común múltiplo (m.c.m)** de dos o más polinomios, al polinomio de menor grado que es divisible por cada uno de ellos.

Ejemplo:

Entre x, x^2-1 y $x-1$ el m.c.m es: $x(x^2-1)$.En efecto:

$$x(x^2-1)\div x = x^2-1$$

$$x(x^2-1)\div (x^2-1) = x$$

$$x(x^2-1)\div (x-1) = x(x+1)$$

Para encontrar el m.c.m, se descomponen en factores cada uno de los polinomios y luego se efectúa el producto de los factores distintos, tomados con su mayor grado.

Ejemplo:

Hallar el m.c.m entre $2x^2$, $4x^2-25$ y $4x^2+20x+25$.

Observe que: $2x^2 = 2x^2$

$$4x^2-25=(2x+5)(2x-5)$$

$$4x^2+20x+25=(2x+5)^2$$

Luego m.c.m $=2x^2(2x-5)(2x+5)^2$

➲ EJERCICIO:

33- Encuentre el mínimo común múltiplo de los polinomios:

i) $x^2-16;\ x^2+8x+16$

ii) $x+3;\ x^2-9;$

iii) $x^2y;\ 9xy^2-36y$

iv) $x^2-1;\ x^2-x-2$

Operaciones con expresiones fraccionarias

Suma y diferencia

Se procede como en el caso de las fracciones ordinarias de números enteros, respetando las restricciones de las variables.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A.\frac{M}{B}+C.\frac{M}{D}}{M} \qquad B\neq 0, D\neq 0, M\neq 0$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A.\frac{M}{B}-C.\frac{M}{D}}{M} \qquad B\neq 0, D\neq 0, M\neq 0$$

La expresión M es el mínimo común múltiplo entre los denominadores B y D, y se llama **denominador común**.

Ejemplos:

i) $\dfrac{x^2-x}{x+2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x^2-x+x-2}{x+2}=\dfrac{x^2-2}{x+2}$

ii) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}+\dfrac{x}{(x^2-25)}$

Se busca primero el denominador común:

$x^2-10x+25=(x-5)^2$

$(x^2-25)=(x-5)(x+5)$

De modo que el común denominador es: $(x-5)^2(x+5)$

Luego: $\dfrac{1}{x^2-10x+25}+\dfrac{x}{(x^2-25)}=\dfrac{x+5+x(x-5)}{(x-5)^2(x+5)}=\dfrac{x^2-4x+5}{(x-5)^2(x+5)}$

iii) $\dfrac{x-b}{bx}-\dfrac{bx}{bx^2+x+b^2x+b}$, $b\in\mathbf{R}$

Factoreando los denominadores:

$bx=bx$

$bx^2+x+b^2x+b=(bx^2+b^2x)+(x+b)=bx(x+b)+(x+b)=(x+b)(bx+1)$,

resulta el denominador común: $bx(x+b)(bx+1)$

Luego:

$$\frac{x-b}{bx}-\frac{bx}{bx^2+x+b^2x+b}=\frac{(x-b)(x+b)(bx+1)-bx.bx}{bx(x+b)(bx+1)}=\frac{(x^2-b^2)(bx+1)-b^2x^2}{bx(x+b)(bx+1)}$$

➲ EJERCICIO:

34- Efectúe la siguientes operaciones indicando la restricción de la variable:

i) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{3}{x^2-a^2}$

ii) $\dfrac{5}{xc+c^2}-\dfrac{3}{x^2+xc}$

iv) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+1}$

v) $2-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x^2-1}$

Producto y cociente de expresiones fraccionarias

Como en el caso de la suma y de la resta, el producto y el cociente son extensiones del producto y el cociente de las fracciones numéricas.

Se define:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D} \qquad B\neq 0, D\neq 0$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C} \qquad B\neq 0, D\neq 0, C\neq 0$$

Ejemplos:

i) $\dfrac{x+1}{x}.\dfrac{2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2x(x+1)}{x(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)}$ $\quad x\neq 0, x\neq -1$

ii) $\dfrac{x^2-4}{2x+8}\div\dfrac{x-2}{x+4}=\dfrac{(x^2-4)(x+4)}{(2x+8)(x-2)}=\dfrac{(x-2)(x+2)(x+4)}{2(x+4)(x-2)}=\dfrac{x+2}{2}$ $\quad x\neq -4, x\neq 2$

➲ EJERCICIO:

35- Efectúe las operaciones y simplifique (indique las restricciones de las variables).

i) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$

ii) $\dfrac{x^3-27}{x^2}\cdot\dfrac{9}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+6x+9}{x+9}$

iii) $\dfrac{(x+2)^2-36}{x-2}\div\dfrac{x+2}{(x-2)x}$

iv) $\dfrac{4x+8}{3x}\div\dfrac{2.(x+2)}{9x}$

Fracciones Compuestas

Son expresiones fraccionarias cuyos numeradores y denominadores son a su vez expresiones fraccionarias.

Ejemplo: La fracción compuesta $\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-1}{x}}$ se puede transformar:

$$\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2}{x^3-x^2-x+1}$$

➲ EJERCICIO:

36- Calcule y simplifique:

i) $\dfrac{\frac{2x-1}{2x+6\sqrt{2}x+9}}{\frac{1-2x}{\sqrt{2}-1}}$ ii) $\dfrac{3+\frac{4x}{x+5a}}{\frac{2x}{x+5a}}$ iii) $\dfrac{\frac{x^2}{x+5}}{\frac{x+5}{x^2}}\cdot\dfrac{x+\frac{2}{5x}}{5+\frac{2}{5x}}$

Ecuaciones Racionales

Las **ecuaciones racionales** son aquellas que contienen una o más expresiones algebraicas fraccionarias.

Ejemplos:

i) Para hallar las soluciones de la ecuación racional:

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$$

Se la transforma en una ecuación entera multiplicando por x^2-1 (mínimo común múltiplo de los denominadores). De modo que para $x \neq \pm 1$ se pasa a:

$$\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{2(x^2-1)}{x-1}-\frac{(x^2-1)}{x+1}=0$$
$$x+2(x+1)-(x-1)=0$$
$$x+2x+2-x+1=0$$
$$2x+3=0$$
$$x=-\frac{3}{2}$$

ii) Para hallar las soluciones de la ecuación racional:

$$\frac{x+3}{x^2-1}=1-\frac{1}{x+1}$$

al igual que en el ejemplo anterior se multiplica por x^2-1 (mínimo común múltiplo de los denominadores) para transforma la ecuación en entera. De modo que para $x \neq \pm 1$ se pasa a:

$$x+3=x^2-1-(x-1)$$
$$x+3=x^2-x$$
$$0=x^2-2x-3$$

de donde, resolviendo la ecuación cuadrática, se obtiene $x=3$ y $x=-1$.

Como $x \neq \pm 1$, la única solución de la ecuación es $x=3$

➲ EJERCICIOS:

37- Resuelve:

i) $\dfrac{(x-2)^2}{x-1}-2=\dfrac{x+2}{x-1}$ iii) $\dfrac{7}{5x-2}=\dfrac{5}{4x}$

ii) $\dfrac{x^3+8}{x+2}=x^2-2x+4$ iv) $\dfrac{x}{2x-6}-\dfrac{3}{x^2-6x+9}=\dfrac{x-2}{3x-9}$

38- Escriba una ecuación racional que no admita como soluciones a los números 2 ó -5.

39- Pruebe las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{x+2}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}=\dfrac{x+2}{x-1}$, $\forall x \in \mathbf{R}-\{-2,1,2\}$

b) $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{5}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{-4}{x-2}$, $\forall x \in \mathbf{R}-\{-2,2\}$

40- Un aeroplano vuela 1062km con el viento a favor. En el mismo tiempo puede volar 738km con el viento en contra. La velocidad del aeroplano cuando no sopla el viento es de 200km/h. Determine la velocidad del viento.

AUTOEVALUACIÓN 5

1. Calcule los valores de α y β para que sean iguales los polinomios:

   $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ y $Q(x) = (x-3)(x+\alpha)(x+\beta)$

2. Dados: $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$ $\quad Q(x) = x^5 - i$

   $R(x) = 2x^2 - x$ $\quad S(x) = x - (1+i)$

   Calcule: i) $P(x) + Q(x) - S(x)$

   ii) $(Q(x))^2$

   iii) $P(x) \div R(x)$

3. Dados los polinomios $P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + k$ y $Q(x) = x - i$ encuentre el valor de k para que el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$ sea cero.

4. Construya un polinomio de cuarto grado a coeficientes reales que tenga entre sus ceros $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ y $\alpha_3 = 1 + i$.

5. Encuentre el polinomio $P(x)$ a coeficientes reales que verifique:

   i) $P(i) = 0$

   ii) es divisible por $(x+1)$

   iii) el resto de dividir $P(x)$ por $(x-2)$ es igual a 8

6. ¿Puede ser el grado de un polinomio $P(x)$ igual a 7 sabiendo que es a coeficientes reales y divisible por $Q(x) = (x - (2+i))^3 . (x-1)^2$?

7. Resuelve indicando la restricción de la variable:

$$\frac{\dfrac{x+a}{x} + \dfrac{x-a}{a}}{\dfrac{x-a}{x} - \dfrac{x+a}{a}} \quad , \; a \in \mathbf{R} - \{0\}$$

Un momento para la distracción....

- Exprese el número 10 empleando cinco nueves. Indique por lo menos dos procedimientos.

- A un herrero le trajeron cinco trozos de cadena, de tres eslabones cada uno, y le encargaron que los uniera formando una cadena continua. Antes de poner manos a la obra, el herrero comenzó a meditar sobre el número de anillos que tendría que cortar y forjar de nuevo. Decidió que le haría falta abrir y cerrar cuatro anillos. ¿No es posible efectuar este trabajo abriendo y enlazando un número menor de anillos?

- Dos padres regalaron dinero a sus hijos. Uno de ello dio a su hijo 150 pesos, el otro entregó al suyo 100 pesos. Resultó, sin embargo, que ambos hijos juntos aumentaron su capital solamente en 150 pesos. ¿De qué modo se explica esto?

- Tres amigos juntaron sus dineros e imaginaron una cadena Cyber-Ham, donde Ud. puede saborear una jugosa hamburguesa mientras navega por Internet. Deduzca de cuál local se hizo cargo cada socio, que actividad desarrolla y que % aportó cada uno de ellos.

  Se sabe:

  1) Joaquín no es actor.
  2) El que menos aportó administra el local de Rosario.
  3) Sebastián (que no aportó el 40%) administra la casa de Santa Fe.
  4) El pintor está a cargo de la filial de Córdoba.
  5) Juan José puso más capital que el músico.
  6) El capital se constituyó en 25%, 35% y 40%.

CAPÍTULO 10 – EL PLANO COMPLEJO. FORMA TRIGONOMETRÍCA Y POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En este capítulo se verá cómo se pueden representar geométricamente los números complejos, así como también otras formas de presentarlos que entre otras cosas nos servirán para calcular raíces de índice mayor que dos.

EL PLANO COMPLEJO

Otra forma de presentar los números complejos

Los números complejos pueden ser definidos como el conjunto de pares ordenados (a,b) de números reales donde a es la parte o componente real y b es la parte o componente imaginaria. Con ellos se definen:

- **Igualdad**: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$
- **Suma**: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- **Producto**: $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Según esta definición se establece una correspondencia biunívoca entre los pares $(a,0)$ y los números reales *a*. Entonces **R** se identifica con un subconjunto $\mathbf{C}^*$ de **C** y esta correspondencia se establece también, entre sumas en **R** y sumas en $\mathbf{C}^*$ y entre productos en **R** y productos en $\mathbf{C}^*$.

$$\begin{array}{ccccc} (a,0) & + & (c,0) & = & (a+c,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a & + & c & = & a+c \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (a,0) & \times & (c,0) & = & (ac,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a & \times & c & = & a\times c \end{array}$$

La unidad imaginaria se define por: $i=(0,1)$, que verifica

$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

Por otra parte: $(b,0)\times(0,1)=(0,b)=bi$

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

$$\boxed{(a,b)=a+bi}$$

Esta última igualdad muestra la equivalencia entre las dos formas de expresión de un número complejo, como **par ordenado**: (a,b) y en **forma binómica**: $a+bi$.

OBSERVACIÓN:

Todavía no hemos definido ninguna relación de la forma $z<w$ con $z,w\in\mathbf{C}$, ya que es **imposible** dar una relación de orden para los números complejos a diferencia de los números reales como lo hicimos en el capítulo 6.

Para justificar esto, supongamos que fuese posible definir una relación "<" como lo hicimos con los números reales. Como $i\neq 0$, entonces $i<0$ ó $0<i$.

Supongamos que $0<i$, entonces $0\cdot i<i\cdot i$, es decir $0<i^2=-1$ lo cual es un absurdo. Análogamente, si suponemos $i<0$.

Por lo tanto, el cuerpo de los números complejos **C** no puede ser ordenado.

Representación geométrica de los números complejos

Sabemos que fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, se establece naturalmente una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números reales.

Esta correspondencia es adecuada para representar los números complejos, atendiendo a que cada $z=a+bi$ es un par ordenado de números reales. Entonces cada *z* se corresponde con un punto *P* del plano y recíprocamente

$$\boxed{P\leftrightarrow z=a+bi}$$

P recibe el nombre de **afijo** de *z*.

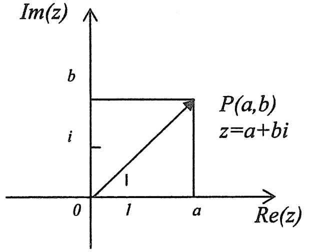
En virtud de esta correspondencia biunívoca entre puntos y números complejos se identifica **C** con el plano que por este motivo se llama ***plano complejo.***

En este plano:

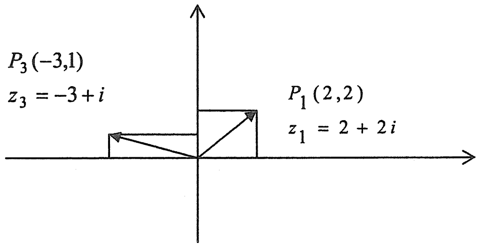
- El eje de abscisas se llama **eje real** (*Re(z)*) y en él se presentan todos los números reales, es decir los complejos $z=a+0i=(a,0)$

- El eje de ordenadas se llama **eje imaginario** (*Im(z)*) y sus puntos representan los números imaginarios puros $z = 0 + bi = (0,b)$. Además a cada complejo z le corresponde un vector $\overline{0P}$ de origen 0 y extremo el afijo P de z, de modo que:

$$\boxed{z = a + bi \leftrightarrow P \leftrightarrow \overline{0P}.}$$



Ejemplo:



EJERCICIOS:

1- Represente los afijos y vectores correspondientes a los complejos:

$(1,3)$; $-2-4i$; i^7; $-5i$

2- Indique a que cuadrante pertenece cada uno de los siguientes complejos:

$z_1 = 3-2i$; $z_2 = -2\sqrt{3} - 5i^2 + i$; $z_3 = (1-2i).(i-\sqrt{5})$

3- Para $z_1 = 4 - i$; $z_2 = 2+3i$ represente gráficamente:

a) $z_1 + z_2$ c) $\overline{z_2}$

b) $-z_1$ d) $z_1 - z_2$

4- Represente los siguientes conjuntos del plano complejo

a) $A = \{z \,/ |\mathrm{Re}\,(z)| \le 2 ; |\mathrm{Im}\,(z)| \le 3\}$

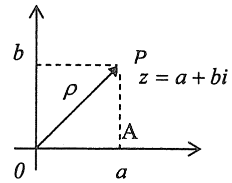
b) $B = \{z / 1 \le \mathrm{Re}(z) \le 4 ; \mathrm{Im}\, z = 2\}$

c) Determine si $z_1 = \sqrt{2} - \frac{7}{5} i \in A$ y si $z_2 = \left(\frac{5}{2} - 2i\right)^2 \in B$. Justifique.

Módulo y argumento de un número complejo

Se llama **módulo** del complejo $z = a + bi$ al número real no negativo, igual a la longitud del vector $\overline{0P}$ asociado a z.

Para indicar módulo de z se usará $|z|$ o bien se empleará la letra griega ρ.



De la observación del triángulo $0PA$ es sencillo comprobar, utilizando el teorema de Pitágoras, que: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo:

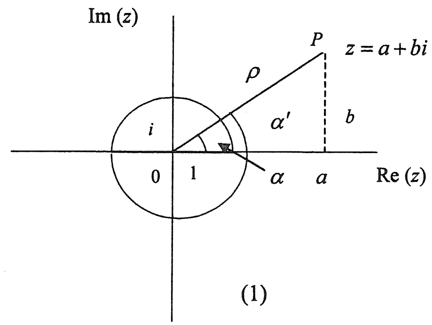
Si $z = 2 + 5i$ entonces $|z| = \sqrt{29}$

EJERCICIO:

5- a) Dado $z = a + bi$ represente: z ; $-z$; $\bar{z}$; $-\bar{z}$; y verifique: $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

b) Pruebe: $|z|^2 = z.\bar{z}$

Se llama **argumento** del número complejo z al ángulo α que forma la dirección positiva del eje *Re(z)* con el vector asociado a z.



(1)

OBSERVACIONES:

- El argumento de un complejo $z \neq 0$ no está unívocamente determinado, ya que puede variar en un múltiplo de 2π radianes.
- El complejo nulo $z = 0$ no posee argumento.

Si α y α' son dos argumentos de z, entonces $\alpha - \alpha' = 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}_0$;

$$\boxed{\alpha' = \alpha + 2\pi k \ ; \ k \in Z}$$

En lo que sigue se adoptará, salvo mención en contrario, el llamado **argumento principal** de z que se define como el ángulo α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$.

$$\boxed{\alpha = \arg z \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < 2\pi}$$

La razón $tg\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ (siempre que $a \neq 0$), permite calcular α

Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Si $a = 0$ y $b < 0$, entonces $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi$

En el triángulo de la figura (1) se puede notar que:

$a = \rho.\cos\,\alpha$ $\qquad$ $b = \rho.\text{sen}\,\alpha$ $\qquad$ y por lo tanto

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\alpha \ + i\ \text{sen}\ \alpha\,)}$$

Ésta expresión recibe el nombre de **forma trigonométrica** del complejo z.

Ejemplos:

Para escribir la forma trigonométrica de

1) $z = -2 + 2i$ calculamos $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ y su argumento α por la relación

$tg\ \alpha\ = \dfrac{-2}{2} = -1$ de modo que $\alpha\ = 135°$.

Así: $z = 2\sqrt{2}$ (cos 135° + i sen 135°)

2) $z = -2i$, como su módulo es 2 y su argumento es $\alpha\ = 270°$ resulta

$z = 2$ (cos 270° + i sen 270°)

Para el complejo $z = a + bi = \rho\,(\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha\,)$, se puede adoptar también otra expresión llamada **forma polar** de z que se indica:

$$\boxed{z = \rho_\alpha}$$

ρ y α se llaman las **coordenadas polares** de z.

Ejemplos:

a) La forma polar de $z = -2 + 2i$ es $z = 2\sqrt{2}_{135°}$

b) La forma polar de $z = -3$ es $z = 3_\pi$

Hemos visto como determinar la forma polar de z cuando éste está expresado en forma binómica. Interesa el caso recíproco, esto es, hallar la forma binómica de z cuando éste está expresado en forma polar.

Por ejemplo si $z = 2_{\frac{\pi}{4}}$, dado que $\rho = 2$ y $\arg\ z = \dfrac{\pi}{4}$; se tiene

$a = 2\ \cos\ \dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad b = 2\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; luego $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

En el cuadro siguiente se muestran las **formas de pasaje** de una a otra forma.

$z = a + bi$ $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $tg\ \alpha = \dfrac{b}{a} \qquad a \neq 0$ $\therefore z = \rho_\alpha$	$z = \rho_\alpha$ $a = \rho\cos\,\alpha$ $b = \rho\ \text{sen}\,\alpha$ $\therefore z = \rho\ (\cos\ \alpha\ + i\ \text{sen}\ \alpha\,)$

EJERCICIOS:

6- Escriba en forma polar los complejos z:

$1 + i$; $\qquad$ 5; $\qquad$ -2 ; $\qquad$ $-i$

7- Escriba en forma binómica los complejos $3_{\frac{\pi}{6}}$; $\quad 1_{\frac{\pi}{2}}$; $\quad \left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2$

8- Represente los conjuntos del plano complejo:

$A = \{z / 1 < |z| \leq 2\}$

$B = \{z / \arg z = 45°\}$

$C = \left\{ z / 1 \le |z| < 2;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4} \right\}$

9- Represente:

$z_1 = 3(\cos 45° + i \ \mathrm{sen}\, 45°)$

$z_2 = 3(\cos 405° + i \ \mathrm{sen}\, 405°)$

¿cómo son los afijos de z_1 y z_2?

Igualdad de complejos expresados en forma polar

Dados $z_1 = \rho_{1\alpha_1}$ y $z_2 = \rho_{2\alpha_2}$ se define:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

Producto y cociente de complejos en forma polar

Dados $z_1 = \rho_{1\alpha_1}$ y $z_2 = \rho_{2\alpha_2}$ se define:

1) $\boxed{z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2\,_{(\alpha_1+\alpha_2)}}$ 2) $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}}$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 2_{\frac{\pi}{2}}$ y $z_2 = 5_{\frac{\pi}{4}}$, entonces:

a) $z_1.z_2 = 10_{\frac{3}{4}\pi}$ b) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{5}\right)_{\frac{\pi}{4}}$

Potencia entera de un número complejo

Dado $z = \rho_\alpha$ y $n \in \mathbf{Z}$ se puede demostrar que

$$\boxed{z^n = \rho^n\,_{n\alpha}}$$

Esta expresión de la potencia se conoce con el nombre de fórmula de De Moivre (matemático inglés 1667-1754)

Ejemplo:

Si $z = 1_{\frac{\pi}{6}}$ entonces, $z^9 = 1_{9.\frac{\pi}{6}} = 1_{\frac{3}{2}\pi}$

➲ EJERCICIO:

10- Para $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{3}+i$; $z_3 = 2_{\frac{\pi}{4}}$; $z_4 = 2_{60°}$, calcule en forma polar:

a) $(z_1.z_2)z_3$ b) $\frac{z_2}{z_4}$ c) z_3^{-1} d) z_1^8

Raíces enésimas de un número complejo

Dado un complejo $z = a+bi$, se llama **raíz de índice *n*** (enésima) a toda solución de la ecuación $x^n = a+bi$. Se indica $x = \sqrt[n]{a+bi}$.

Expresado *z* en su forma polar $z = \rho_\alpha$ es posible obtener las soluciones de manera simple.

Antes de dar una expresión general, veamos un ejemplo:

Dado $z = 8_{60°}$, queremos hallar $x = \sqrt[3]{8_{60°}}$.

Suponemos: $x = \gamma_\theta$, entonces debe verificar: $\gamma^3_{3\theta} = 8_{60°}$

Pero: $\gamma^3_{3\theta} = 8_{60°} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^3 = 8 \\ 3\theta = 60° + k.360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \sqrt[3]{8} \\ \theta = \dfrac{60° + k.360°}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \theta = 20° + k.120° \end{cases}$

Entonces: $\boxed{x = 2_{20°+k.120°} \text{ donde } k \in \mathbf{Z}}$

Se podría pensar que para cada valor de *k* hay una solución distinta. Sin embargo, se puede observar que variando *k* en los enteros se obtienen tres argumentos distintos entre 0° y 360°, siendo los restantes congruentes con ellos. De modo que es suficiente tomar tres valores sucesivos para *k* (resulta conveniente tomar para *k* los valores 0; 1 y 2) para obtener las tres soluciones distintas de $x^3 = 8_{60°}$.

$k = 0 \longrightarrow x_0 = 2_{20°}$

$k = 1 \longrightarrow x_1 = 2_{140°}$

$k = 2 \longrightarrow x_2 = 2_{260°}$

$k = 3 \longrightarrow x_3 = 2_{380°} = x_0$

$k = 4 \longrightarrow x_4 = 2_{500°} = x_1$

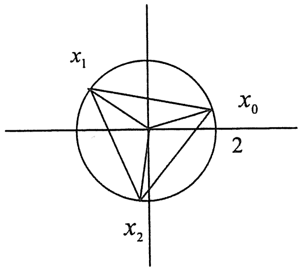
$k = 5 \longrightarrow x_5 = 2_{620°} = x_2$

$k = -1 \longrightarrow x_{-1} = 2_{-100°} = x_2$

Podríamos seguir asignando valores a *k*, pero siempre obtendremos complejos x de módulo 2 y argumentos congruentes con $\alpha = 20°$ o con $\alpha = 140°$ o con $\alpha = 260°$

OBSERVACIÓN:

La representación de los afijos de x_0, x_1 y x_2, muestra que son los vértices de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Todo lo expuesto para el ejemplo proporciona los lineamientos para probar el siguiente **teorema**, que generaliza el resultado, y cuya demostración se deja como ejercicio.

Todo complejo $z = |z|_\alpha$ tiene exactamente n raíces enésimas dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}_{\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k} \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \quad (*)$$

OBSERVACIÓN:

Todas las raíces enésimas tienen igual módulo: $\sqrt[n]{|z|}$ y sus argumentos difieren en $\frac{2\pi}{n}$ radianes, por lo tanto, los afijos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

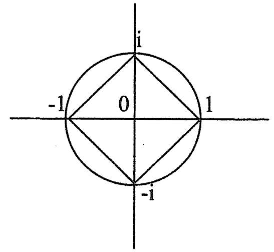
A continuación se verá otro ejemplo:

Calcule las raíces cuartas de la unidad.

Se trata de hallar $\sqrt[4]{1_{0°}}$.

La aplicación de (*) da:

$\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{2\pi}{4}k} = 1_{\frac{\pi}{2}k}$ $\qquad k = 0, 1, 2, 3$



entonces para:

$k = 0 \longrightarrow x_0 = 1$

$k = 1 \longrightarrow x_1 = 1_{\frac{\pi}{2}} = i$

$k = 2 \longrightarrow x_2 = 1_\pi = -1$

$k = 3 \longrightarrow x_3 = 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i$

EJERCICIOS:

11- Calcule:

a) $\sqrt[3]{i}$ d) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

b) $\sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt[4]{-16}$ f) $\sqrt[5]{1+i}$

12- Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 0$

b) $x^2 - (2+i)x + (1+i) = 0$

c) $x^2 + x(4+3i) + (1+5i) = 0$

13- Calcule las raíces cúbicas de 1. Sean éstas: $x_0 = 1$, x_1 y x_2. Pruebe que x_1 y x_2 son conjugadas y verifican, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

AUTOEVALUACIÓN N°10

1. Calcule z^{-5} para $z = 1 - i$
2. Represente gráficamente los siguientes números complejos

   a) $z_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$

   b) $z_2 = 2.(1+i) + 3.(2-i)$

   c) $z_3 = 6.i^{10}$
3. Sabiendo que una de las raíces quintas de un número $z \in \mathbb{C}$ es $1 - \sqrt{3}i$, halle las restantes raíces quintas. ¿Cuál es z?
4. Resuelva la ecuación $z^5 + 32i = 0$
5. Sea $z = (1+\sqrt{3}i)^n$ con $n \in \mathrm{N}$. Encuentre $n \in \mathrm{N}$ tal que $z \in \mathbf{R}^+$.
6. ¿Puede un número complejo no real tener alguna raíz enésima real? Justifique.
7. Pruebe que el producto, el cociente y potencia entera de raíces enésimas de la unidad son también raíces enésimas de la unidad.
8. a) Represente gráficamente los siguientes conjuntos:

   $A = \{z \in C / 2 \le |\mathrm{Re}(z)| \le 5\ , -4 \le \mathrm{Im}(z) \le 3\}$

   $B = \{z \in C / \ |\mathrm{Re}(z)| \le 2; -4 \le \mathrm{Im}(z) \le 3\}$

   $C = \left\{z \in C / 2 \le |z| \le 5, 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{6}\right\}$

   $D = \left\{z \in \mathrm{C} : \mathrm{Im}(z) \le 2, |z| > 1, \dfrac{\pi}{4} \le \arg(z) \le \pi\right\}$

   Dé en cada uno de los casos un elemento que pertenezca y uno que no pertenezca al conjunto indicado.

b) ¿$z = \dfrac{(2-i)^2}{1+i} \in A$?, y ¿$z \in B$?

Un momento para la distracción.....

Los socios desconfiados...

Tres socios comparten una caja fuerte, pero no se fían mucho unos de otros. Quieren poner varias cerraduras y repartir las llaves de tal modo que uno sólo no pueda abrir la caja, pero dos cualesquiera de ellos sí puedan hacerlo.

¿Cuántas cerraduras deberán poner y cómo deben distribuir las llaves?

¿Y si fueran cuatro socios?

Jaimito, generoso...

Jaimito sale de su casa con un montón de bolitas y vuelve sin ninguna. Su madre le pregunta qué ha hecho con ellas:

- *A cada amigo con que me encontré le di la mitad de las bolitas que tenía más una.*
- *¿Con cuántos amigos te encontraste?*
- *Con seis*

¿Podrías decir con cuántas bolitas salió Jaimito de su casa?

Números mágicos....

- Escoge un número de tres cifras y forma otro repitiendo el primero. Por ejemplo: 234234.
- Divide este número entre 7; después entre 13 y, por último, entre 11.
- ¡Has obtenido el número inicial!

Explicar por qué.

19- i) $x^{\frac{3}{4}}$ ii) $x^2 y^{-\frac{1}{4}}$

20- i) $2\sqrt{2}x^3$ ii) $2x^{\frac{1}{6}} - 3x^{-1}$

21- i) $\sqrt[4]{27}$ iii) $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{7}}{42}$ iv) $\frac{x-\sqrt{x}}{x}$ con $x>0$

ii) $18\sqrt[3]{25}$

22-

n	2	4	8	16	32	64	128	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\log_2$n	1	2	3	4	5	6	7	-1	-2	-3	-4

N	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$\log_{10}$n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

23- i) $\frac{7}{2}$ iii) 10

ii) $\frac{7}{3}$ iv) 2

24- i) $\log_a \frac{A^4}{B}$ ii) $\log_a \frac{A^4 B}{C\sqrt{D}}$

25- i) 3.459431619 ii) 1.160964047 iii) 0.185636577

27- a) 3 y $\frac{1}{3}$ b) 2 y $\frac{1}{2}$ c) 2 y $\frac{1}{2}$

En general $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

28- i) F ii) F iii) F

AUTOEVALUACIÓN 2

1. i) No ii) No iii) Si iv) No

2. i) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$ ii) $\frac{717}{722}$

3. $\frac{104791}{16830}$

5. i) $9.11\ 10^{-28}$ ii) 5.895×10^9

7. $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

CAPÍTULO 3 – NÚMEROS COMPLEJOS

2- $\sqrt{2}i$; $\frac{3}{4}i$; $4\sqrt{5}i$

3- $i^r(-i)$; i^r ; $-i^r$ donde $r = 0, 1, 2, 3$

4- a) $5+3i$; b) $6+3i$; c) $-13+41i$; d) $10+11i$; e) 0 ;
f) $5+2i$; g) $-2-2i$; h) $24i$

6- $a = -4$

7- a) $-i$; b) $2-i$; c) $-\frac{35}{4}-3i$; d) i

8- a) $\frac{24}{41}+\frac{30}{41}i$
b) $-11-13i$
c) $-1-4i$
d) $-2-14i$
e) $1-i$
f) 2
g) $-36+12i$
h) -1
i) $\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i$
j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
k) $\frac{\sqrt{2}i}{2}$
l) $\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$

9- a) $\frac{1}{4}i$ b) $\frac{8}{13}-\frac{12}{13}i$ c) $-\frac{4}{19}-\frac{\sqrt{3}}{19}i$

10- a) Los reales tales que $a^2+b^2=1$
b) Todos los imaginarios puros

11- a) $x=\frac{10}{13}; y=\frac{11}{13}$
b) $x=1, y=-2$
c) $x=\frac{7}{2}; y=0$

13- $\frac{5}{61}-\frac{6}{61}i$

14- $a=2$

AUTOEVALUACIÓN 3

2. $x = -\frac{2}{13}$; $y = -\frac{3}{13}$

4. a) $\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$

   b) 2

   c) $2 - i; -2 + i$

5. a) $1 + i, -1 - i$

   b) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

   c) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}i, -\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}i$

6. $-\frac{3}{4} - i$; $-\frac{1}{2} + i$

CAPÍTULO 4 - ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1- i) $x = 2$ iii) $x = -\frac{23}{7}$ v) $x = -\frac{1}{2}$

ii) $x = \frac{5}{6}$ iv) $x = -9$

2- $k = 1$

4- i) $1 + i$; $1 - i$ iii) 2, -2

ii) 1; 2   iv) $2a$; $\frac{1}{2}a$

5- $k = 2$

6- $k = -3$

7- $a\,(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = 0$, siendo a un número real arbitrario distinto de cero

8- i) $x = 3 \vee x = 7$ iii) $x = -1$

ii) $x = 4$ iv) $x = 4$

9- i) S ={-1; 1; -2$\sqrt{2}$; 2$\sqrt{2}$ }   ii) $x = 16$

10- Rta: 5,75m y 17,25m

11- Rta: $\frac{1}{2}$

12- Rta: \$ 61.764,71

13- Rta: 84

14- Rta: 11, 13 y 15

15- Rta: 3 o -1

16- Rta: 16, 18 y 20

17- Rta: 3, 4 y 5 o bien 9, 10 y 11

AUTOEVALUACIÓN 4

1. Los pares de ecuaciones equivalentes son: i), iii) y iv)
2. i) S = {6}   v) S = ϕ viii) $x = 1$

   ii) S = {3}   vi) $x = 0 \vee x = \frac{3}{7}$

   iii) S = ϕ

   iv) S = $\mathbb{R}$ vii) $x = 4$
3. $k = \frac{9}{4}$

5. Rta: 15km/h y 8km/h
6. Rta: Se necesita añadir 1429 de agua dulce

CAPITULO Nº 5 - POLINOMIOS

1- a) Si b) No c) Si d) No e) No

2- a) 5 ; 3 b) constante; 0 c) lineal ; -1 + i d) nulo, no tiene grado

3- $n = m$ y $a_k = b_k$ $\forall$ $k = 0, \ldots, m$

4- a) $a = 2$ $b = 3$ $c = 1$ $d = -\frac{3}{2}$

b) $a = i$ $b = 1$ $c = -1$ $d = 1 - i$

6- i) $x^4 - 2x^3 - x^2 + ix + 2$; grado 4

ii) $3x^3 - 2x^2 - x$; grado 3

iii) $x^4 - x^3 + (-1 + i)x$; grado 4

10- $P(x)Q(x) = (1 + i)x^3 + (2 + i)x^2 + (1 - i)x - i$; grado 3

$P(x)S(x) = (1 + i)x^4 + (-2 - 3i)x^3 + (1 + i)x^2 - x$; grado 4

$S(x)T(x) = 3ix^3 - 6ix^2 + 3x$; grado 3

$Q(x)R(x)=0$; no tiene grado

12- Si, los polinomios constantes no nulos

14- i) Cociente: $-2ix$; Resto: $-x+1$

ii) Cociente: i^3x^2+x+i ; Resto: $-1+i$

iii) Cociente: 1 ; Resto: $1+i$

16- Resto: $-2-4i$

17-

$P(x)$	$Q(x)$	**$P(x)$ es divisible por $Q(x)$ para n:**
x^n+a^n	$x+a$	impar
x^n+a^n	$x-a$	$\nexists n$
x^n-a^n	$x+a$	par
x^n-a^n	$x-a$	$\forall n$

18- $h=-4+i$

19- $h=-42$

20- $\alpha_1=1$; $\alpha_2=-1$; $\alpha_3=i$; $\alpha_4=-i$

21- Negativo

22- $P(\alpha)=0 \Leftrightarrow Q(\alpha)=kP(\alpha)=0 \quad k\neq 0$

24- $\beta=4+i$

25- $P(x)=\frac{1}{160}(x-2)(x+2)^3(x-3-i)(x-3+i)$

26- i) $\alpha_1=2$ (raiz doble); $\alpha_3=i$; $\alpha_4=-i$; $\alpha_5=-\frac{1}{3}$;

$P(x)=3(x-2)^2(x+\frac{1}{3})(x-i)(x+i)$

ii) $\alpha_1=0$; $\alpha_2=\sqrt{2}$; $\alpha_3=-\sqrt{2}$; $\alpha_4=\sqrt{3}$; $\alpha_5=-\sqrt{3}$

$R(x)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

iii) $\alpha_1=i$; $\alpha_2=-i$; $\alpha_3=2$; $\alpha_4=-2$; $\alpha_5=\frac{1}{2}$

$S(x)=(x-i)(x+i)(x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2})$

iv) $\alpha_1=1$; $\alpha_2=-1$; $\alpha_3=\sqrt{2i}$; $\alpha_4=-\sqrt{2i}$

$T(x)=(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2i})(x+\sqrt{2i})$

v) $\alpha=-\frac{1}{2}$; $R(x)=10(x+\frac{1}{2})$

vi) $\alpha_1=2$; $\alpha_2=-2$; $\alpha_3=2i$; $\alpha_4=-2i$

$S(x)=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$

vii) $\alpha=-\frac{1}{3}$ (raíz triple); $T(x)=27\left(x+\frac{1}{3}\right)^3$

viii) $\alpha_1=-1$ (raiz triple); $\alpha_2=i$; $\alpha_3=-i$;

$U(x)=(x+1)^3(x-i)(x+i)$

27- i) $P(i)=0$

ii) $P(x)=(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)$

28- $P(x)=(x-i)(x+i)(x-1+i)(x-1-i)(x+1)^2=(x^2+1)((x-1)^2+1)(x+1)^2$

29- $\alpha=3$; $\beta=-4$

30- i) $\frac{8}{x-2}=\frac{8x}{x^2-2x}$, $x\neq 0 \wedge x\neq 2$ ii) $\frac{x-y}{2x}=\frac{y-x}{-2x}$, $x\neq 0$

32- i) $x^2+xy+y^2 \ \forall x;y\in\mathbf{R}/x\neq y$ iv) $x-3 \ \forall x\in\mathbf{R}-\{3\}$

ii) $x+5 \ \forall x\in\mathbf{R}-\{0\}$ v) $x^2+b^2 \ \forall x,b\in\mathbf{R}/x\neq\pm b$

iii) $3-x \ \forall x\in\mathbf{R}-\{-3\}$ vi) $\frac{4x^2+12x+9}{x} \ \forall x\in\mathbf{R}/x\neq 0\wedge x\neq-\frac{3}{2}$

33- i) $(x+4)^2(x-4)$ iii) $9x^2y(xy-4)$

ii) $(x-3)(x+3)$ iv) $(x^2-1)(x-2)$

34- i) $\frac{a^2+ax+3}{x^2-a^2} \ \forall x\in\mathbf{R}/x\neq\pm a$ ii) $\frac{5x-3c}{xc(x+c)} \ \forall x\in\mathbf{R}/x\neq 0\wedge x\neq -c$

iii) $\frac{2x^3+x^2-2x+3}{x(x-1)(x+1)} \ \forall x\in\mathbf{R}-\{0;-1;1\}$ iv) $\frac{2x^2-3x-1}{x^2-1} \ \forall x\in\mathbf{R}-\{-1;1\}$

35- i) $\frac{x+1}{x-1} \ \forall x\in\mathbf{R}/x\neq 1\wedge x\neq -1\wedge x\neq -2$

ii) $\dfrac{9(x+9)(x^2+3x+9)}{x^2(x+3)^3}\ \forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -9$

iii) $\dfrac{x(x-4)(x+8)}{x+2}\ \forall x \in \mathbf{R} \ / x \neq -2 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0$

iv) 6 $\forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq -2$

36- i) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2x+6\sqrt{2}x+9}$ ii) $\dfrac{7x+15a}{2x}$ iii) $\dfrac{x^4(5x^2+2)}{(x+5)^2(25x+2)}$

37- i) $S=\left\{\dfrac{7+\sqrt{33}}{2};\dfrac{7-\sqrt{33}}{2}\right\}$ ii) $S=\mathbf{R}-\{2\}$

iii) $S=\left\{-\dfrac{10}{3}\right\}$ iv) $S=\{5;-6\}$

40- 36km/h

AUTOEVALUACIÓN 5

1. $\alpha=-i$; $\beta=i$

2. i) $x^5+2x^4-3x^2$

ii) $x^{10}-2ix^5-1$

iii) Cociente: $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$; Resto: $-\dfrac{1}{4}x-1$

3. $k=5$

4. $P(x)=a(x^4-\dfrac{10}{3}x^3+5x^2-\dfrac{10}{3}x+\dfrac{2}{3})$, $a \in \mathbf{R}-\{0\}$

5. $P(x)=\dfrac{8}{15}(x^2+1)(x+1)$

7. -1; $\forall x \neq 0$

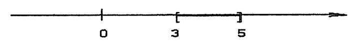
CAPÍTULO 6 – REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

2- i) $\dfrac{17}{11}>1>\dfrac{7}{9}>\dfrac{2}{3}>0>-\dfrac{1}{5}>-3>-\pi$

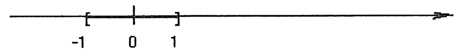
ii) $-3{,}12>-3{,}121>-3{,}\overline{12}$

iii) $5{,}001 < 5{,}009 < 5{,}09$

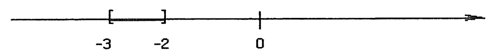
5- i)



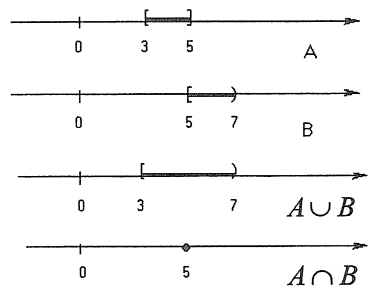
ii)



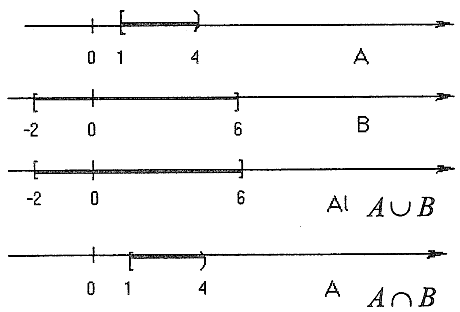
iii)



6- i)



ii)



4. $x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1\right)}$

5. $sen\,2\alpha = \dfrac{24}{25}$

6. $\cos\theta = -\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

7. $30\sqrt{3}$ m

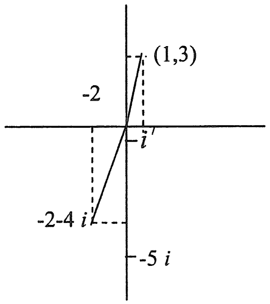
8. a) $sen(\alpha+\beta) = \dfrac{3\sqrt{91}+12}{50}$ y $\tan 2\alpha = \dfrac{24}{7}$

b) $\tan(\alpha+\beta) = -\dfrac{24}{7}$ y $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{3\sqrt{34}-5\sqrt{102}}{68}$

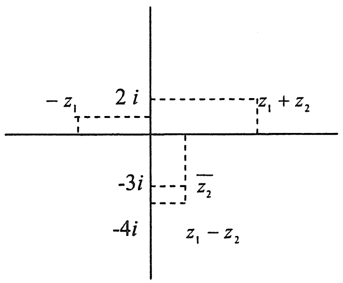
CAPÍTULO 10 – PLANO COMPLEJO. FORMA TRIGONOMÉTRICA Y POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1-

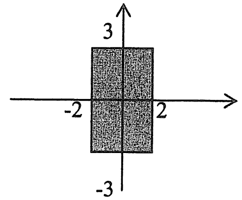


2- $z_1 \in$ IVc. ; $z_2 \in$ Ic. ; $z_3 \in$ IIc.

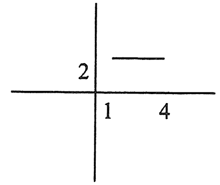
3-



4- a)



b)



c) $z_1 \in A$ y $z_2 \notin B$

5- a) Si $z=a+bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad |-z| = |-a-bi| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

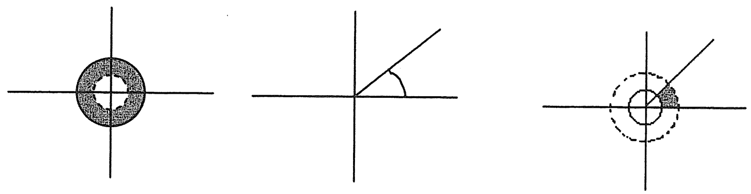
$|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad |-\bar{z}| = |-a+bi| = \sqrt{(-a)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

b) $|z|^2 = a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi) = z.\bar{z}$

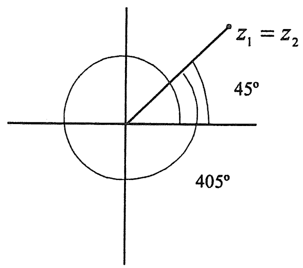
6- $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$, $5_{0°}$, 2_{π}, $1_{\frac{3\pi}{2}}$

7- $3_{\frac{\pi}{6}} = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$; $1_{\frac{\pi}{2}} = i$; $\left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -4$

8-



9-



10- a) $\left(4\sqrt{2}\right)_{\frac{2}{3}\pi}$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)_{-\frac{\pi}{4}}$

b) $1_{-\frac{\pi}{6}}$

d) 16

11- a) $x_0 = 1_{\frac{\pi}{6}}$; $x_1 = 1_{\frac{5\pi}{6}}$; $x_2 = 1_{\frac{3\pi}{2}}$

b) $x_0 = 3_0$; $x_1 = 3_{\frac{2\pi}{3}}$; $x_2 = 3_{\frac{4\pi}{3}}$

c) $x_0 = 2_{\frac{\pi}{4}}$; $x_1 = 2_{\frac{3\pi}{4}}$; $x_2 = 2_{\frac{5\pi}{4}}$; $x_3 = 2_{\frac{7\pi}{4}}$

d) $x_0 = 4_{40°}$; $x_1 = 4_{160°}$; $x_2 = 4_{280°}$

e) $x_0 = 3_{\frac{\pi}{2}} = 3i$; $x_1 = 3_{\frac{3\pi}{2}} = -3i$

f) $x_0 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{\frac{\pi}{20}}$; $x_1 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{\frac{9\pi}{20}}$; $x_2 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{\frac{17\pi}{20}}$; $x_3 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}$; $x_4 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{\frac{33\pi}{20}}$

12- a) $x_0 = 1_{\frac{5\pi}{24}}$; $x_1 = 1_{\frac{17\pi}{24}}$; $x_2 = 1_{\frac{29\pi}{24}}$; $x_3 = 1_{\frac{41\pi}{24}}$

b) $x_1 = 1 + i$; $x_2 = 1$

c) $x_1 = -1 - i$; $x_2 = -3 - 2i$

AUTOEVALUACIÓN 10

1. $\left(2^{-5/2}\right)_{\frac{5}{4}\pi}$

3. $z_0 = 2_{-60°}$ $z_1 = 2_{12°}$ $z_2 = 2_{84°}$

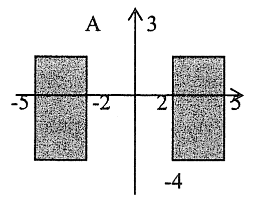
$z_3 = 2_{156°}$ $z_4 = 2_{228°}$ $z = 32_{60°}$

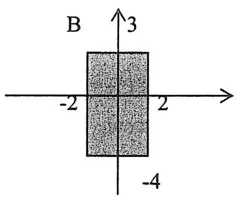
4- $z_0 = 2_{54°}$ $z_1 = 2_{126°}$ $z_2 = 2_{198°}$

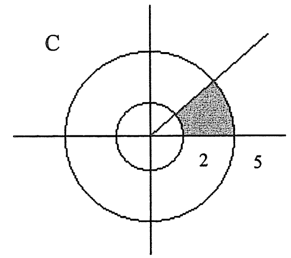
$z_3 = 2_{270°}$ $z_4 = 2_{342°}$

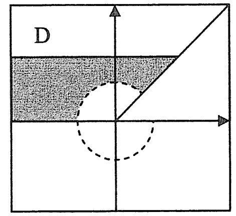
5- $n = 6k$; $k \in \mathbb{N}$

8. a)









c) $z \notin A$, $z \in B$

CAPÍTULO 11 - FUNCIONES

1- i) No ii) Sí iii) No

En ii) Imf = $\{a,b\}$.

Preimágenes de a: 1,3 y 5.

Preimágenes de b: 2, 4 y 6.

2- i) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}; f(\frac{\sqrt{2}}{10}) = \frac{1}{50}$.

ii) $\sqrt{2}$ no tiene preimagen. La preimagen de 0 es 0.

iii) $[\,0,1\,]$

3- $A = \{-2;2\}$; $-2 \neq 2$ y $f(-2) \neq f(2)$

4- a) P(b) = 2b + $\frac{20}{b}$; $Dom_p = \mathbb{R}^+$

b) $C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}$; $Dom_C = \mathbb{R}^+$

c) $S(x) = x^2 + \frac{8}{x}$; $Dom_S = \mathbb{R}^+$

5- i) $\mathbb{R}$ iii)$\mathbb{R}$ v) $\mathbb{R} - \{3,2\}$

ii)$\mathbb{R} - \{-2,2\}$ iv)$\mathbb{R} - \{25\}$ vi) $(-\infty,2] \cup [3,\infty)$

6- i) f (0) = 1; f (1) = 0 ; f (5) = 25

ii) 1y 0 son, respectivamente, las preimágenes de 0 y 1; –5 no tiene preimagen