Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario
Departamento Materias Básicas
UDB Matemática

Álgebra y Geometría Analítica

Civil - Eléctrica - Química - Mecánica

Raquel Voget
Coordinadora

GUÍAS DE TRABAJOS PRÁCTICOS

Alarcón - Cabrera - Gutierrez - Mascheroni
Muñoz - Pomata - Sabatinelli - Voget - Zucco

2016

Índice

1. Vectores

Por D. Pomata

1. *a*) Represente en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes vectores
   - $\vec{v} = (3,4)$.
   - $\vec{w} = (1,-2)$.
   - $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(1,-2)$ y $B(-3,1)$.
   - el vector posición de $P(-3,-6)$.
   - $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

   b) Resuelva analítica y gráficamente las siguientes operaciones.
   - $\overrightarrow{OP} - \vec{w}$.
   - $\vec{v}_0 - \overrightarrow{AB}$.
   - $2\vec{w} - \overrightarrow{AB}$.
   - $-\vec{v} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$.

2. Dados $P(2,6)$, $Q(1,3)$ y $R(3,-1)$, encuentre las coordenadas del punto S de modo que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean iguales.

3. El punto medio de un segmento es $R(1,-15)$, uno de los extremos está en el punto $Q(-2,17)$. Calcule las coordenadas del otro extremo de dicho segmento.

4. Sabiendo que la distancia entre dos puntos A y B es 11 y siendo las coordenadas de $A(3,-5,2)$ y las de B $(9,2,z)$, calcule el valor de z.

5. Siendo $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (2,-4)$ y $\vec{w} = (2,-3)$, verifique si $\vec{w}$ puede escribirse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir si existen α_1, α_2 tal que $\vec{w} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}$.

6. Un vector de $\mathbb{R}^3$ está situado en el plano xy, y su segundo coseno director vale $-\frac{1}{2}$. Determine el valor de los otros dos cosenos directores.

7. Dado un vector $\vec{u}$, del cual se sabe que su primer coseno director vale $\frac{4}{9}$, y su segundo coseno director vale $\frac{2}{9}$, calcule su tercer coseno director.

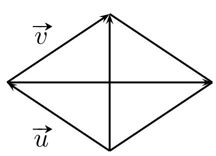
8. Indique si un vector $\vec{u}$ en el espacio puede formar con los ejes coordenados los siguientes ángulos

   a) $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = 45°$, $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = 135°$, $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{k}\right) = 60°$.

   b) $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = 90°$, $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = 150°$, $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{k}\right) = 60°$.

   c) $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = 30°$, $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = 45°$, $\left(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{k}\right) = 60°$.

9. El polígono de la figura es un rombo.



   a) Exprese las diagonales en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   b) Pruebe que las diagonales son perpendiculares.

10. Sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores tales que $|\vec{u}| = 5$ y $|\vec{v}| = 8$, y que forman entre ellos un ángulo de $60°$, determine gráfica y analíticamente $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

11. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ y $\left(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$ halle

    a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
    b) $\vec{b} \cdot \vec{b}$.
    c) $\left(-3\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{b} - 10\vec{a}\right)$.

12. Dados los vectores

    - $\vec{a} = (2, 0)$.
    - $\vec{b} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.
    - $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
    - $\vec{u} = (3, -4, 1)$.
    - $\vec{v} = (0, 2, -7)$.
    - $\vec{w} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

    Calcule

    a) $|\vec{a}|$.
    b) $|\vec{w}|$.
    c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
    d) $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
    e) $\left(\vec{b} + \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$.
    f) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (-4\vec{w})$.
    g) $\vec{b}_0 \cdot (\vec{a} - \vec{c})$.
    h) $\vec{w}_0 \cdot \vec{v}_0$.

13. Dados $\vec{u} = (5, 3)$ y $\vec{v} = (3, -1)$

    a) Grafique el vector proyección $\vec{u}/\vec{v}$ y vector proyección $\vec{v}/\vec{u}$.
    b) Halle la proyección escalar $\vec{u}/\vec{v}$ y $\vec{v}/\vec{u}$.
    c) Encuentre las componentes del vector proyección $\vec{u}/\vec{v}$.

14. Dados los siguientes pares de vectores, averigüe si son paralelos o perpendiculares. De otra forma, calcule el ángulo que ellos determinan.

    a) $(4, 1)$ y $(16, 4)$.
    b) $(2, 1)$ y $(-3, 6)$.
    c) $(-3, 2)$ y $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.

15. Sabiendo que el módulo del vector $\vec{u}$ es igual a 3 y el módulo de $\vec{v}$ es igual a 5 determine para que valor de β, los vectores $\vec{u} + \beta\vec{v}$ y $\vec{u} + (-\beta)\,\vec{v}$ son perpendiculares.

16. Halle las componentes del vector $\vec{u}$ sabiendo que su módulo es igual a 50, además es colineal con $\vec{b} = \left(6, -8, -\frac{15}{2}\right)$ y forma un ángulo agudo con el eje Z.

17. Si $\vec{u} = (3, -1, -2)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$, calcule

    a) $\vec{u} \times \vec{v}$.
    b) $(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v}$.
    c) $(2\vec{u} - \vec{v}) \times (2\vec{u} + \vec{v})$.

18. Halle las componentes de $\vec{v}$ sabiendo que el módulo de $\vec{v}$ es igual 51, $\vec{v}$ es perpendicular al eje Z y al vector $\vec{a} = (8, -15, 3)$ y forma un ángulo agudo con el eje X.

19. Sean $A(1,2,3)$, $B(-2,0,5)$ y $C(4,1,5)$ los vértices de un triángulo,

   a) Determine el valor del ángulo en el vértice B.

   b) Encuentre el perímetro y el área del triángulo ABC.

   c) Halle la longitud de la mediana que contiene al vértice B.

20. Calcule el volumen del paralelepípedo cuyas aristas concurrentes en un vértice queden determinadas por los vectores $\vec{a} = (1,2,-1)$, $\vec{b} = (0,0,2)$ y $\vec{c} = (1,1,3)$.

21. Siendo $A(1,2,0)$, $B(1,2,2)$, $C(2,1,-1)$ y $D(x,0,3)$, determine el valor de x para que los cuatro puntos resulten coplanares.

22. Calcule el volumen del tetraedro de vértices $A(1,-1,0)$, $B(2,-1,-1)$, $C(-4,4,0)$ y $D(1,2,1)$.

23. Calcule α para que los vectores $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (2,\alpha,1)$ y $\vec{c} = (1,0,-1)$ resulten

   a) coplanares.

   b) definan un paralelepípedo de volumen igual a 6.

1.1. Ejercicios de revisión

1. Dados los vectores $\vec{a} = (-1,-1,1)$ y $\vec{b} = (2,1,-1)$ y los puntos $P_1(6,-4,0)$ y $P_2(5,-2,3)$, calcule los cosenos directores del vector

$$\vec{w} = \left(\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|^2 + a \cdot \vec{b} \right) \overrightarrow{P_1P_2}.$$

2. Las fuerzas $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_2 = -5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{F}_3 = 6\vec{i} - \vec{k}$ actúan simultáneamente sobre una partícula. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

3. Sea $\vec{r}$ que cumple con las siguientes condiciones

   - $\left(\vec{r} \,\hat{;}\, \vec{i}\right) = 135°$.
   - $\left(\vec{r} \,\hat{;}\, \vec{j}\right) = 60°$.
   - $90 \leq \left(\vec{r} \,\hat{;}\, \vec{k}\right) \leq 180°$.
   - $|\vec{r}| = 4$.

   y sean $\vec{q} = (-1,2,3)$, $\vec{s} = (\alpha,1,2)$, calcule

   a) el vector $\text{proy}_{\vec{r}}\,(3\vec{q} - \vec{r})$.

   b) el/los valores de α para que el área del paralelogramo de lados $\vec{q}$ y $\vec{s}$ valga $\sqrt{6}$.

4. Si $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $(\vec{u} \,\hat{;}\, \vec{v}) = \pi/3$, calcular $|\vec{u} - 2\vec{v}|$.

5. Determine $|\vec{u} \times \vec{v}|$ sabiendo que $\vec{u}$ se encuentra en el plano xy con módulo 3 mientras que $\vec{v}$ tiene la dirección y sentido del versor $\vec{k}$ y módulo 4.

6. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 60°, $|\vec{a}| = 5$ y $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \perp \vec{b}$, calcule

   a) $\left|\vec{b}\right|$.

   b) el área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

   c) el área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

2. Recta en el plano

Por L. Muñoz y P. Sabatinelli

1. Sea la recta
$$r : \begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Verifique si $(-5, 4)$, $(7, -4)$, $(1, -1)$ pertenecen a r.
   b) Encuentre un punto $P_1 \in r$, distinto de $P_0(1, -2)$.
   c) Determine el punto $P_2 \in r$, simétrico de P_1 respecto de P_0.
   d) Determine los valores del parámetro correspondientes a los puntos de intersección de r con los ejes coordenados.

2. Sea la recta
$$r : \begin{cases} x = -2 + \lambda, \\ y = 1 + 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Obtenga la forma paramétrica de la ecuación de las siguientes rectas.

   a) La recta t paralela a r que contiene al punto $A(-1, 4)$.
   b) La recta s perpendicular a r que contiene a $B(0, -2)$.
   c) La recta q determinada por A y B.

3. En cada caso, escriba y represente gráficamente la recta que

   a) contiene al punto $A(-1, 4)$ y es perpendicular a la dirección del vector $\vec{n} = (2, -1)$.
   b) contiene al punto $B(-1, 3)$ y es paralela al eje X.
   c) forma un ángulo de 60° con el sentido positivo del eje X, y corta al eje de las ordenadas en el punto $C(0, -1)$.
   d) es paralela a la recta de ecuación $y = \frac{x}{2} - 1$ y contiene al punto $D(-2, 2)$.
   e) contiene a los puntos $A(3, -3)$ y $B(3, 4)$.
   f) contiene al punto $A(8, -2)$ y su abscisa al origen es dos veces su ordenada al origen.
   g) su distancia al origen es 3 y además es perpendicular al vector $\vec{n} = (3, 4)$.

4. Determine la ecuación cartesiana y explícita de
$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda, \\ y = 1 - 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Determine, si existen, la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas

   a) $2x - 3y - 6 = 0$.
   b) $3x + 2y = 0$.
   c) $y - 3 = 0$.
   d) $-x - 5 = 0$.

6. Halle las ecuaciones de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

   a) contiene al punto $(1, -3)$ y su pendiente es $m = 2$.
   b) interseca a los ejes coordenados en $(3, 0)$ y $(0, -2)$.

c) contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a la recta $5x + y - 2 = 0$.

d) contiene al punto $(3, 2)$ y es paralela a la recta $4x - y - 3 = 0$.

e) está determinada por el origen de coordenadas y por el punto de intersección de las rectas $r_1)\, x - 2y + 3 = 0$ y $r_2)\, y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

7. Determine en cada caso si los pares de rectas dados son paralelas, perpendiculares o secantes no perpendiculares. En este último caso, calcule el ángulo que determinan.

   a) $r_1) - 3x - y + 17 = 0,\ r_2)\, x - 3y - 2 = 0$.

   b) $r_1)\, x = -2,\ r_2)\, 2x - 4y + 3 = 0$.

   c) $r_1)\, y + 5 = 0,\ r_2)\, 3y - 1 = 0$.

   d) $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = -1 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},\ r_2)\, y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

8. Dadas $s) - x + 2y + 3 = 0$ y $t) 3x + y - 2 = 0$,

   a) encuentre el ángulo agudo entre ellas.

   b) halle la ecuación de la recta que contiene a la intersección de ambas y forma un ángulo de 60^{o} con el semieje positivo X.

9. Dados los puntos $A(2, 1)$ y $B(-3, -3)$ determine la recta que los contiene y la recta perpendicular a ella que contiene al punto medio del segmento AB.

10. Determine k de manera que:

    a) $2x - 3y + k = 0$ contenga a $(-2, 1)$.

    b) $(2 + k)x - (3 - k)y + 4k + 14 = 0$ contenga a $P(2, 3)$.

    c) $2kx - 5y + 3 = 0$ tenga pendiente 6.

    d) $x + y - k = 0$ contenga a $(3, 4)$.

    e) $kx + (3 - k)y + 25 = 0$ tenga pendiente 7.

    f) $x - 3ky + 4 = 0$ tenga ordenada al origen igual a 9.

    g) $kx - 3y + 2 = 0$ forme un triángulo de área igual a 3 con los ejes coordenados.

    h) $2x + y = 3k$ forme con los semiejes positivos un triángulo de área uno.

11. Calcule la distancia del punto a la recta en los siguientes casos:

    a) $x - 3y + 5 = 0,\ P(-1, 3)$.

    b) $y = -\frac{4}{5}x + 6,\ P(2, -1)$.

    c) $\begin{cases} x = 1 + u, \\ y = -2 - 3u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R},\ P(2, 5)$.

12. Halle la ecuación de cada recta que contenga a $(2, -1)$ y cuya distancia al origen sea 2.

13. Sea $C(-1, 0)$ el punto de intersección de las diagonales de un cuadrado, uno de cuyos lados está contenido en la recta de ecuación $x + 3y = 5$; halle las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros tres lados.

14. *a*) Determine la ecuación de la recta r determinada por $(1, 0)$ y $(3, 4)$.

b) Encuentre una recta paralela a r que forme un triángulo de area igual a 4 con los ejes coordenados.

c) Encuentre una recta perpendicular a r que forme un triángulo de area igual a 4 con los ejes coordenados.

15. Dados los puntos $R(9,-9)$, $S(1,2)$ y $T(3,1)$, halle las coordenadas del punto simétrico a R respecto de la recta determinada por S y T.

16. Calcule el área de un rectángulo, uno de cuyos vértices es el punto $A(-2,1)$, siendo $2x-3y-5=0$ y $3x+2y-9=0$ las ecuaciones de las rectas que contienen a dos lados del mismo.

3. Plano

Por L. Muñoz y P. Sabatinelli

1. *a*) Determine la ecuación cartesiana del plano π que contiene a $P_0(2, -1, 1)$ y es perpendicular al vector $(3, -1, -2)$.

   b) Verifique si los puntos $A(2, 4, -2)$, $B(1, 5, 7)$ y $C(3, 1, 1)$ pertenecen a π.

   c) Halle los puntos de intersección de dicho plano con los ejes coordenados.

2. Determine la ecuación de cada uno de los siguientes planos

   a) es paralelo al plano coordenado xy y contiene al punto $(-2, 4, 3)$.

   b) yz.

   c) contiene al eje y, y es normal al vector $(3, 0, -4)$.

   d) es paralelo al tercer eje coordenado y contiene a los puntos $(-3, 2, 4)$ y $(1, 5, 7)$.

3. Obtenga la ecuación del plano determinado por los siguientes puntos:

   a) $(-1, 0, 1)$, $(4, 1, -3)$, $(1, 1, 1)$.

   b) $(-3, 2, 4)$, $(1, 5, 7)$, $(2, 2, 1)$.

4. El pie de la perpendicular trazada desde el punto $A(3, 6, 2)$ al plano π es el punto $B(1, 2, 6)$. Determine una ecuación para el plano π.

5. Dados los planos $\pi_1 : 2x + ky - z - 4 = 0$ y $\pi_2 : 6x - 5y - 3z - 8 = 0$

   a) determine el valor de k para que $\pi_1 \perp \pi_2$.

   b) determine el valor de k para que $\pi_1 \| \pi_2$.

6. Determine si los siguientes pares de planos son paralelos, perpendiculares, o secantes no perpendiculares.

   a) $2x + 5y - 6z + 8 = 0$, $6x + 15y - 18z - 5 = 0$.

   b) $6x - 3y + 2z - 7 = 0$, $3x + 2y - 6z + 28 = 0$.

   c) $3x - 5y - 4z + 7 = 0$, $6x + 2y + 2z - 7 = 0$.

   d) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z + 21 = 0$.

7. Determine la ecuación de un plano paralelo a $\pi)\, 2x - y + 3z - 1 = 0$, que contiene al punto medio del segmento determinado por $M(1, 2, -1)$ y $N(0, 1, 3)$.

8. Halle las ecuaciones de cada uno de los siguientes planos:

   a) contiene al punto $P(3, -3, 2)$ y es paralelo al plano $\pi_1)\, 3x - y + z - 6 = 0$.

   b) contiene a los puntos $P_1(2 - 1, 6)$ y $P_2(1, -2, 4)$ y es perpendicular a $\pi_2)\, x - 2y - 2z + 9 = 0$.

   c) contiene al punto $Q(1, 2, 0)$ y es perpendicular a los planos $\pi_1) - 2x + y - z - 2 = 0$ y $\pi_2)\, x + y - 3z = 4$.

9. Determine la distancia del plano $\pi)\, 6x + 2y - 3z - 63 = 0$ a:

   a) origen de coordenadas.

   b) $P(1, -1, 2)$.

   c) plano de ecuación $6x + 2y - 3z + 49 = 0$.

10. Si los siguientes pares de planos son paralelos halle la distancia entre ellos, si no lo son calcule el ángulo que determinan.

    a) $\pi_1)\, 2x + 5y - 6z + 8 = 0,\ \pi_2)\, 6x + 15y - 18z - 5 = 0.$

    b) $\pi_1)\, 6x - 3y + 2z - 7 = 0,\ \pi_1)\, 3x + 2y - 6z + 28 = 0.$

    c) $\pi_1)\, 3x - 5y - 4z + 7 = 0,\ \pi_1) - 6x + 10y + 8z - 14 = 0.$

11. Halle la ecuación de todos los planos paralelos a $\pi)\, x - 2y + 2z + 12 = 0$, cuya distancia al origen sea 2.

12. Determine k para que $\pi)\, x + ky - 2z - 9 = 0$:

    a) contenga a $P(5 - 4, 6)$.

    b) sea paralelo al plano $\pi_1)\, 6x - 2y - 12z - 7 = 0.$

    c) sea perpendicular al plano $\pi_2)\, x - 3y + 6z + 4 = 0.$

13. Halle la ecuación del plano equidistante de los planos:

$$\pi_1)\, 2x - y - 2z = 3 \text{ y } \pi_1)\, 2x - y - 2z = -10.$$

14. Halle la ecuación del plano que contiene a $(3, -4, 5)$ y es perpendicular a los planos

$$\pi_1)\, 2x - 3y = 5 \text{ y } \pi_2)\, x - 4z = 3.$$

4. Recta en el espacio

Por L. Muñoz y P. Sabatinelli

1. Dados los puntos $A(1,-1,2)$ y $B(2,3,-1)$

   a) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que ellos definen.

   b) Verifique si los puntos $(3,7,-4)$ y $(1,5,0)$ pertenecen a la recta.

   c) Encuentre los valores del parámetro para los cuales la recta interseca a los planos coordenados.

2. En cada caso indique ecuaciones paramétricas para la recta que

   a) contiene al punto $(2,-1,3)$ y es paralela al primer eje coordenado.

   b) contiene al punto $(4,-2,6)$ y es perpendicular al plano xy.

   c) contiene al punto $(2,1,5)$ y es perpendicular al plano $3x-2y+z-2=0$.

   d) contiene al punto $(4,1,-2)$ y es paralela a la recta $\frac{x+2}{-4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$.

3. Determine la ecuación de la recta que contiene a $(-2,3,2)$ y es paralela a los planos $\pi_1)\, 3x-y+z=0$ y $\pi_2)\, x-y-z=0$.

4. Determine si los siguientes pares de rectas son coplanares a alabeados. Si las rectas son coplanares, halle la ecuación del plano que determinan. Si son alabeadas, determine un par de planos paralelos que las contengan respectivamente.

   a) $r_1 : \begin{cases} 2y+z=0, \\ 3y-2z=0, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} 5y-2z=8, \\ 4x+11y=4. \end{cases}$

   b) $r_1 : \begin{cases} 4x+4y-3z=-7, \\ 4x+y-z=-3, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x=1+t, \\ y=2+3t, \\ z=-t, \end{cases} \quad \forall t.$

   c) $r_1 : \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{4},\ r_2 : \begin{cases} x=2+2t, \\ y=1-3t, \\ z=5+4t, \end{cases} \quad \forall t.$

5. Dadas las rectas

$$r_1\colon \begin{cases} x=2-t, \\ y=1+2t, \\ z=-1+t, \quad t\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{y} \quad r_2\colon \begin{cases} x=1+2s, \\ y=2-3s \\ z=-1-4s, \quad s\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

   se pide:

   - Analice si son o no coplanares.
   - Si son coplanares encuentre la ecuación del plano que las contiene, si no lo son calcule la distancia entre ellas.

6. Halle la distancia del punto $P(2,3,5)$ a las siguientes rectas:

   a) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{-1}.$

b) $\begin{cases} x = -1 + 7t, \\ y = 2 + t, \qquad\qquad \forall t. \\ z = 3 - 5t, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 3y - z + 3 = 0, \\ x - 5y + z + 4 = 0, \end{cases}$

7. Halle las coordenadas del punto de intersección de la recta $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + 3z + 13 = 0 \end{cases}$ con el plano $3x - 2y + 3z + 16 = 0$.

8. Determine el valor de α para que el plano $x + y - 2z = 7$ y la recta $\frac{x-1}{3\alpha} = \frac{y-2}{\alpha+1} = \frac{z-5}{\alpha+2}$ sean paralelos y calcule la distancia entre ambos.

9. Dado el plano de ecuación $\pi : x + 2y - z = 4$, determine el valor de a y b para que la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{a+1} = \frac{z-4}{2b}$ sea perpendicular a π.

10. Halle la ecuación del plano que contiene a $(1, 2, 3)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 + 4t, \quad \forall t. \end{cases}$

11. Halle la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x + 2z = 1, \\ y - z = 8, \end{cases}$ y es paralelo a la recta $x - 3 = \frac{y+4}{3} = -z$.

12. Sabiendo que $\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0$ y $r : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + z - 5 = 0, \end{cases}$ halle:

    a) la ecuación del plano proyectante de r sobre π.

    b) la proyección de r sobre π.

13. Halle la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ y es perpendicular al plano $-5x + y + z + 10 = 0$.

14. Halle las coordenadas del punto simétrico a $P(1, 1, 1)$ respecto del plano $x - 2y + 3z = 0$.

15. Muestre que la recta
$$r)\frac{x-2}{10} = \frac{2y-2}{11} = \frac{z-5}{7}$$
está contenida en el plano $\pi)3x - 8y + 2z = 8$.

16. Dadas las siguientes rectas:
$$r_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = z, \quad r_2 : \frac{x+4}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}, \quad r_3 : x = y = z,$$

    a) Determine si cada par de rectas es alabeado o coplanar.

    b) Determine el ángulo que forma cada par de rectas.

17. Halle el ángulo entre el plano $\pi\colon 2x + y + z = 0$ y la recta $r\colon \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

4.1. Práctica adicional

1. Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados de un triángulo son

$$r_1)\, y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{7} \quad r_2 : \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad 3x + 2y - 7 = 0.$$

   Determine:

   a) los vértices del triángulo.
   b) los ángulos interiores del mismo.
   c) el área del triángulo.

2. Dos vértices de un rectángulo son los puntos $A(2,3)$ y $B(6,4)$. Halle las coordenadas de los otros dos vértices sabiendo que una de sus diagonales está contenida en la recta de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 3 + 5t, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. Circunscribiéndose a $\mathbb{R}^2$, determine la ecuación genérica de

   a) una recta que interseca al eje X a p unidades de O y al eje y a q unidades de O.
   b) dos rectas perpendiculares.
   c) dos rectas paralelas entre sí.
   d) la recta determinada por los puntos P y Q.

4. Circunscribiéndose a $\mathbb{R}^3$, determine la ecuación genérica de

   a) el eje x.
   b) una recta paralela al plano xz.
   c) un plano paralelo al plano xz.
   d) un plano proyectante al plano xz.
   e) una recta perpendicular al plano xz.
   f) el plano xz.

5. Diga qué representan las siguientes ecuaciones.

   a) $x + y + 3 = 0$ en $\mathbb{R}^2$.
   b) $x + y + 3 = 0$ en $\mathbb{R}^3$.
   c) $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0, \\ x + z + 1 = 0. \end{cases}$
   d) $y = 0$ en $\mathbb{R}^2$.
   e) $y = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

6. Dos aviones siguen la trayectoria descritas por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 6 - 2t, \\ z = 2t, \quad \forall t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 1 - s, \\ y = 5, \\ z = 4 - 2s, \quad \forall s. \end{cases}$$

   ¿Colisionan los aviones? Justifique.

7. Se desea realizar una mezcla entre líquidos y para ello se dispone de un recipiente que tiene la forma de un prisma recto de base rectangular. Para conseguir una distribución de flujo en forma radial se coloca en el centro del recipiente un agitador de paletas planas. Se disponen de los siguientes datos:

   - Vértices de la base: $A(5,3,0)$, $B(5,8,0)$, $C(1,4,0)$.
   - Vértices de la tapa del recipiente: $E(5,3,3)$, $F(1,4,3)$.

   A los fines de construir un equipo similar al existente se necesita obtener la siguiente información:

   a) la ecuación de la recta determinada por los puntos A y C.

   b) la ecuación del plano que contiene la base del recipiente.

   c) la ecuación de la recta que contiene la arista determinada por los puntos E y F.

   d) el área de apoyo del recipiente.

   e) el volumen del recipiente.

   f) las coordenadas del punto donde se ubica el agitador.

5. Matrices

Por G. Gutierrez y P. Zucco

1. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -5 & e \\ 7 & \pi \end{bmatrix}.$$

   Calcule en los casos que sea posible

   a) $B + C - A$.
   b) $-B + A - C$.
   c) $2(A + C) - 5\left(B - \frac{3}{4}C\right)$.
   d) $A + D$.

2. Determine el valor de la matriz X si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -9 & 6 \\ -10 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   a) $2(A + B) - 2X + 3C = \mathbb{O}$.
   b) $2A - 3X = 5X + 4B$.

3. Calcule α y β, de ser posible, tales que verifiquen

   a) $\alpha \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$.

   b) $\alpha \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

   c) $\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha + 2 \\ 3\beta + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2\alpha \\ \beta - 5 \end{bmatrix}$.

4. Calcule los productos AB, BA, A^2, B^2 y $(AB)^2$ cuando estén definidos en cada uno de los siguientes casos

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix},$$

a) verifique que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

b) ¿Por qué ocurre esto?

6. Suponga que existen las matrices A^2, B^2, $A+B$, $A-B$, A^2-B^2, ¿se puede asegurar que $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$? ¿Por qué?

7. Si $AB = \mathbb{O}$ entonces $A = \mathbb{O}$ o $B = \mathbb{O}$. ¿Verdadero o falso?

8. Determine números α y β tales que

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sea simétrica.

9. Se dice que una matriz cuadrada es antisimétrica si $A^t = -A$. ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Sean A y B matrices antisimétricas de orden n. Muestre que $A+B$ es antisimétrica.

11. Si A es antisimétrica, muestre que todo elemento de la diagonal principal es igual a 0.

6. Determinantes

Por G. Gutierrez y P. Zucco

1. Calcule los siguientes determinantes

   a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

   b) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

2. Determine todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

   a) $\begin{vmatrix} x-1 & 12 & \frac{4}{7} \\ 0 & x^2+4 & 28 \\ 0 & 0 & x+5 \end{vmatrix} = 0.$

   b) $\begin{vmatrix} x^2-2 & -2 \\ x+128 & x \end{vmatrix} = 0.$

3. Aplicando propiedades, obtenga los determinantes asociados a las matrices dadas.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

   e) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \end{bmatrix}$.

   f) $\mathbb{I}_n$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^4$, tal que $|A| = -2$ y sean las matrices

   a) B, obtenida intercambiando la primera y segunda fila de A.
   b) C, obtenida sumando a la tercera fila de B, la segunda fila de B multiplicada por 3.
   c) D, obtenida multiplicando por 2 a la segunda fila y por -2 a la tercera columna de A.

   Obtenga

   a) $|B|$.
   b) $|C|$.
   c) $|D|$.
   d) $|-3A|$.
   e) $\left|(-3A)^2\right|$.
   f) $\left|(2B)^t\right|$.
   g) $\left|(3AD)^{-1}\right|$.

5. Dadas las matrices

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,
- $B = (b_{ij})_{4\times 4}$, tal que $|B| = -\frac{1}{5}$,
- $C = (c_{ij})_{4\times 4}$ tal que $\det\left(AC^tB^{-1}\right) = 900$.

a) Determine si C es inversible. De ser posible calcular $\det\left(4C^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)(-B)\right)$.

b) Determine, en caso de ser posible:

1) $\left|3A^2\right|$.
2) $|-2A|$.
3) $|A\,(B+C)|$.
4) $\left|(3A)^2\right|$.
5) $-2\,|A|$.
6) $\left|B^tA^{-1}\right|$.

6. a) Calcule el determinante $|A|$ construyendo el mayor número de ceros posibles en alguna línea convenientemente elegida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Obtenga a partir de A, una matriz B que tenga tres ceros en la fila 2 tal que $|B| = -2\,|A|$.

7. Halle los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales no existe A^{-1} siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 2 \end{bmatrix}.$$

8. ¿Qué valores de α hacen que la matriz

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{bmatrix}$$

no tenga inversa?

9. Siendo

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ -1 & -2 & 0 \\ x & x & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -\frac{1}{2} & x \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 \end{bmatrix},$$

calcule si es posible, el o los valores de x para los cuales *no* es posible calcular

a) $(A+B)^{-1}$.

b) $(AB)^{-1}$.

10. M, N, P y Q son matrices cuadradas de orden 5 y además $|M| = -28$; $|N| = 21$, $|P| = -\frac{5}{6}$ y $|M+N| = -842$. Calcule en cada caso $|Q|$ sabiendo que

a) $(MNQ)^{-1} = P$.

b) $(QP)^{-1} - P^{-1}M = NM - NQ^{-1}$.

c) $QP = 7P^{-1}$.

d) $\left(M^{-1}Q\right)^{-1} - Q^{-1}3M = N$.

e) $\left(\left(Q^{-1}\right)^{t} M\right)^{-1} = 2P - 4M^{-1}Q^{t}$.

f) $(NQP + MQP)^{t} = M$.

11. Calcule el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 47 & \pi & -3 \\ 0 & \pi & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 7 & 9 & 5 \\ -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 41 \\ 0 & k & 45k & 14k \\ 0 & 0 & k\,(k-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\left(k^2-4\right) \end{bmatrix}$$

determine el o los valores de k para los cuales

a) Ran $(A) = 4$.

b) Ran $(A) = 3$.

c) Ran $(A) = 2$.

d) Ran $(A) = 1$.

13. Calcule la inversa de las siguientes matrices cuando sea posible. En caso de no serlo, justifique la respuesta.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$.

14. Exprese matricialmente cada uno de los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ -x + 5y = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$

15. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

resuelva las siguientes ecuaciones matriciales *a*) $(XA)^t + B = C$.

b) $BXC = -2A$.

c) $X + A^t B = C + B^t AC$.

d) $(3XA - B)^t = 2A$.

e) $A + (BX)^t = 2\mathbb{I} - 3X^t$.

f) $\frac{1}{2}\mathbb{I} - (BX)^{-1} = X^{-1}A - A^t$.

7. Sistemas de ecuaciones lineales

Por G. Gutierrez y P. Zucco

1. Determine el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

   a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} u + 2v + 2w = 2 \\ 3u - 2v - w = 5 \\ 2u - 5v + 3w = -4 \\ u + 4v + 6w = 0 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} -w + 6x - 2y - 18z = 0 \\ -4x + y + 11z = 0 \\ w - 5x + 2y + 16z = 0 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 3x_6 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 - x_5 - 2x_6 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 5x_5 + x_6 = 7 \\ 2x_3 - 6x_4 - 4x_5 - x_6 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - x_5 + x_6 = -6 \end{cases}$

   f) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases}$

   g) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

2. Calcule α, β y γ tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Obtenga, si existen, los valores de la constante k, de modo que el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + kz = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

   resulte

a) incompatible.

b) compatible determinado.

c) compatible indeterminado.

4. Dado el sistema

$$(S):\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

obtenga

a) El valor de la constante k de modo que S admita soluciones no triviales.

b) La solución general de S, si k es el obtenido en $4a$

c) La solución general de S para cualquier otro valor de k.

5. Determine los valores de las constantes α y β de modo que el sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = \beta \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + \alpha z = -1 \end{cases}$$

sea

a) incompatible.

b) compatible determinado.

c) compatible indeterminado.

6. Halle, si existen, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema $(A - \lambda \mathbb{I})\, X = \vec{0}$, admita soluciones no triviales y resuelva tal sistema par el menor de los λ obtenidos con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Dada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

obtenga

a) el rango de A.

b) la solución general del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A.

8. Proponga un ejemplo de sistema lineal de dos ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución y otro que sí tenga solución. Justifique ambos ejemplos.

9. Un ingeniero supervisa la producción de tres tipos de automóviles. Se requieren tres clases de materiales: metal, plástico y caucho para la producción. La cantidad necesaria de cada uno de ellos para producir cada automóvil se observa en el cuadro siguiente

Auto	Metal (kg/auto)	Plástico (kg/auto)	Caucho (kg/auto)
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

Si se dispone de un total de 106 tn de metal, 2,17 tn de plástico y 8,2 tn de caucho diariamente, ¿cuántos automóviles se pueden producir por día?

10. Un granjero le da a su ganado una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar de alimento tipo A le proporciona al novillo el 10 % de su requerimiento diario de proteína y el 15 % de su requerimiento de carbohidratos. El alimento tipo B contiene el 12 % del requerimiento de proteína y el 8 % del de carbohidratos en una unidad estándar. Si el granjero desea que su ganado tenga el 100 % de su requerimiento mínimo diario de proteínas y de carbohidratos, ¿cuántas unidades diarias de cada tipo de alimento deberá proporcionar a cada novillo por día?

11. Determina si existe solución para la siguiente situación: Debe elaborarse una dieta con cuatro alimentos básicos: a_1, a_2, a_3 y a_4, con la siguiente proporción de proteínas, hidratos y grasas por unidad de alimento básico:

	P	H	G
a_1	5	2	4
a_2	2	2	2
a_3	3	1	5
a_4	2	3	2

La dieta debe contener 20 u de proteínas, 30 u de hidratos y 30 u de grasas. Se desea calcular la cantidad de cada uno de los alimentos básicos para cumplir el requerimiento.

8. Cónicas

Por R. Cabrera y J. M. Alarcón

1. Halle la ecuación de la circunferencia que es tangente a ambos ejes coordenados y además contiene al punto $P(-2,1)$.

2. Halle la ecuación de la circunferencia en cada caso:

   a) De centro $C(8,-16)$, sabiendo que $(0,0)$ pertenece a la circunferencia.
   b) AB es el diámetro, siendo $A(3,2)$ y $B(-1,6)$.
   c) De centro $C(O,O)$, tangente a la recta de ecuación $3x-4y-25=0$.
   d) Con centro en la recta de ecuación $3x-3y=9$, sabiendo que $(5,-2)$ y $(2,3)$ pertenecen a la circunferencia.

3. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En esos casos indicar centro y radio:

   a) $x^2+y^2+8x+8y=0$.
   b) $2x^2+2y^2+6x-3y=0$.
   c) $x^2+y^2-x-4y-13=0$.
   d) $3x^2+2y^2+x-4y+1=0$.
   e) $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

4. Determine la ecuación de una circunferencia que contiene al origen de coordenadas y tiene por cuerda la intersección de la recta de ecuación $y=-\frac{1}{2}x+2$ con los ejes coordenados.

5. Determine la intersección de la recta con la circunferencia en cada uno de los siguientes casos:

   a) $r_1)\ 2x-y+3=0$ y $c_1)\ x^2+y^2-3x+2y-3=0$.
   b) $r_2)\ x-y+10=0$ y $c_2)\ x^2+y^2-1=0$.
   c) $r_3)\ x-2y-1=6$ y $c_3)\ 4x^2+4y^2+244+40y=-127$.

6. Dadas las circunferencias de ecuaciones $x^2+y^2-8x-2y+8=0$ y $x^2+y^2+4x+2y+1=0$, encuentre la ecuación de la recta que pasa por sus centros.

7. Halle la ecuación de la circunferencia que circunscribe al triángulo cuyos lados están contenidos en las rectas de ecuaciones: $x+2y-3=0$ y $3x-y-2=0$, y su centro es el punto $(0,-2)$.

8. Encuentre, en cada caso, la ecuación de la circunferencia y realice una gráfica previa a la resolución.

   a) Contiene a los puntos $(0,9)$ y $(1,2)$, y es tangente a la recta de ecuación $x=2$.
   b) Contiene al punto $(-4,2)$ y es tangente a los ejes coordenados.

9. Analice las ecuaciones de las elipses siguientes, determinando su menor y coordenadas de los focos y vértices. Grafique:

   a) $16x^2+25y^2=400$.
   b) $4x^2+y^2=100$.

10. En los problemas que siguen halle la ecuación de la elipse que determinan las condiciones dadas en cada caso:

    a) Vértices: $(5, 0)$, $(-5, 0)$, focos: $(4, 0)$, $(-4, 0)$.

    b) Focos: $(0, -3)$, $(0, 3)$, y el punto $(1, 4)$ pertenece a la elipse.

    c) Focos: $(0, 3)$, $(0, -3)$, eje mayor de longitud igual a 12.

11. Una elipse que es tangente al eje oy tiene sus ejes de simetría paralelos a los coordenados. Siendo su centro $C(3, -1)$, y su semieje mayor igual a 4, halle su ecuación y las coordenadas de los focos.

12. Halle la ecuación canónica de una elipse que verifica simultáneamente las siguientes condiciones

    - Eje focal en eje oy.
    - Eje menor de longitud 16.
    - Excentricidad $\frac{3}{5}$.

13. El centro de una elipse es el punto $C(-1, 2)$, su eje mayor es paralelo al eje oy. Determine su ecuación si su excentricidad es $\frac{1}{2}$.

14. Halle la excentricidad, coordenadas de los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas siguientes. Realizar la gráfica de cada una de ellas:

    a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

    b) $x^2 - y^2 = 1$.

    c) $x^2 - 16y^2 = 1$.

15. Halle la ecuación de la hipérbola en cada uno de los siguientes casos:

    a) Con asíntotas de ecuaciones $y = \pm\frac{3}{5}x$, y focos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

    b) Contiene a los puntos $P\left(5, \frac{4}{3}\right)$ y $Q\left(\sqrt{34}, -\frac{5}{3}\right)$ y su centro es $(0, 0)$.

    c) Vértices: $(3, 0)$, $(-3, 0)$, siendo una de sus asíntotas $y = \frac{2}{3}x$.

    d) Focos: $F\,(0, \pm 5)$, y asíntotas de ecuaciones $y = \pm\frac{2}{3}x$.

16. Determine la ecuación de la hipérbola cuyo eje focal es el eje ox, si se sabe que $P(-5, 2)$ pertenece a la hipérbola y la recta de ecuación $y = -\frac{3}{5}x$ es una de sus asíntotas.

17. Dada la hipérbola de ecuación $16x^2 - 9y^2 = 144$ halle sus semiejes, sus focos, su excentricidad, sus asíntotas y su gráfica.

18. Determine el área del triángulo definido por las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta de ecuación $9x + 2y - 24 = 0$.

19. Determine la ecuación de la hipérbola de vértices $V_1(-2, 0)$ y $V_2(2, 16)$, siendo uno de focos $(-2, 18)$.

20. Halle la ecuación de la hipérbola de focos: $F_1(16, 2)$ y $F_2(-10, 2)$, siendo la distancia entre los vértices igual a 24.

21. Halle las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = 8x$. Grafique.

22. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco se encuentra en $(2,4)$, y la ecuación de su directriz es $y = -2$.

23. Dada la parábola $x^2 - 8x - 16y + 32 = 0$, halle las coordenadas del vértice y del foco.

24. Determine la ecuación de las parábolas en los siguientes casos:

    a) Foco $F(-5,0)$ y la directriz $x = 5$.
    b) Foco $F(-7,2)$ y la directriz $x = 5$.
    c) Foco $F(4,3)$ y directriz $y = -1$.

25. Encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones dadas. Trace las gráficas y muestre los puntos de intersección.

    a) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + \ 2y = 6. \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ -3x + y^2 = 0. \end{cases}$

26. Halle la ecuación de la circunferencia concéntrica con la elipse $2x^2 + 3y^{-}4x + 9y + 4 = 0$, y que es tangente a la recta $2x + y - 6 = 0$.

27. Halle la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $x = 4$, y su vértice es el centro de la hipérbola de ecuación $2x^2 - 4y^2 - 8x + 16 = 0$. Grafique ambas curvas.

28. Determine si la gráfica de $18x^2 + 8y^2 = 72$ es una elipse y, en caso afirmativo halle sus vértices; entonces, si A es el vértice de abscisa negativa y B el de ordenada positiva, halle la ecuación de la circunferencia que tiene como uno de sus diámetros al segmento de extremos A y B.

29. Halle la ecuación de una elipse que tiene sus focos en $(\pm 4, 0)$, sabiendo que la suma de las distancias de un punto a los focos es igual a 10.

30. Halle la ecuación de la o las elipses concéntricas con la hipérbola de asíntotas $y = 2x - 9$, $y = -2x + 7$, sabiendo que la excentricidad de la elipse es $\frac{2}{3}$, y que contiene al punto $Q(8,0)$.

31. Determine la ecuación de las hipérbolas que tienen por asíntotas a las rectas $-3x+4y-1 = 0$ y $3x + 4y - 7 = 0$.

32. Determine la sección cónica que tiene en cada caso la siguiente ecuación:

    a) $x^2 - 9y^2 - 6x + 9 = 0$.
    b) $2x^2 - 8y^2 + 4x + 16y + 2 = 0$.
    c) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 30y + 71 = 0$.
    d) $x^2 + y^2 - 6x + 20y + 97 = 0$.
    e) $x^2 - 4y^2 = 0$.
    f) $2x^2 + y^2 + 7 - 8x + 2y = 0$.
    g) $7x^2 + 7y^2 - 8x + 2y = 10$.

33. Resuelva el ejercicio planteado la página 163 del libro «Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal» (Kozak, Pastorelli, Vardanega).

9. Espacios vectoriales

Por A. Mascheroni

1. Determine si cada uno de los conjuntos dados, junto con las operaciones habituales, es un espacio vectorial. Si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen.

   a) $\{\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 1, 2, 3.\}$.

   b) $\left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 1, 2, 3.\right\}$.

   c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x + 1\right\}$.

   d) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\,,\ a, b \in \mathbb{R}.\right\}$.

   e) $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0.\right\}$.

   f) El conjunto de todas las ternas de números reales (x, y, z) con las operaciones siguientes

      - $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$.
      - $k(x, y, z) = (kx, y, z)$.

2. Determine si el conjunto dado S es un subespacio de V.

   a) 1) S es el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ con la segunda componente nula. $V = \mathbb{R}^n$.
   2) S es el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ con alguna componente nula. $V = \mathbb{R}^n$.

   b) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2z\right\}$. $V = \mathbb{R}^3$. Interpretar geométricamente.

   c) $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, ad \geq bc.\right\}$. $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   d) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.\right\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   e) $S = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 \cdot x_4 = 0.\right\}$. $V = \mathbb{R}^5$.

   f) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = (a, 1, 1)\,,\ a \in \mathbb{R}.\right\}$. $V = \mathbb{R}^3$.

   g) $S = \left\{p(t) \in P_2 : p(t) = a + bt + ct^2\,,\ a + b + c = 0.\right\}$. $V = P_2$.

   h) $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0.\right\}$. $V = \mathbb{R}^2$.

   i) $S = \left\{p(t) \in P_2 : p(t) = a + bt + ct^2\,,\ a = b, c = 2a.\right\}$. $V = P_2$.

3. Interprete geométricamente el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0, \\ -2x - 2y + 5z = 0, \\ x - 5y + 14z = 0. \end{cases}$$

   ¿Es este conjunto un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

4. Analizar si

   a) $\vec{w} = (2, -3)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$.

   b) $\vec{c} = (-2, 1, -1)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ y $\vec{b} = (-1, 3, -1)$.

c) $\vec{a} = (1, 2, 0)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (-1, 3, 1)$ y $\vec{d} = (-1, 0, -1)$.

d) $t(x) = 4 - x^2$ puede expresarse como combinación lineal de $p(x) = -1 + x + x^2$, $q(x) = 1 + 3x - x^2$ y $r(x) = -3x + 2x^2$.

5. Describa el subespacio generado por los vectores

   a) $\{\vec{u} = (1, 2, 1), \vec{v} = (-1, 0, 1)\}$.

   b) $\left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   c) $\{\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (1, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, 0)\}$. ¿Constituyen estos vectores un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$?

   d) $\{\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 1), \vec{w} = (1, 0)\}$. ¿Constituyen estos vectores un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$?

   e) $\{\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (2, -2)\}$.

   f) $\{p(t) = 1 - t^2,\, q(t) = 2 + t\}$.

6. Halle un conjunto generador para $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = x_2 + 2x_1.\}$.

7. Analice la independencia lineal de cada uno de los conjuntos dados.

   a) El conjunto de vectores del ejercicio 5.

   b) $\{(1, 1, 0), (1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$.

   c) $\{(1, -1, 0), (1, 1, 2), (1, 0, 1)\}$.

   d) $\{(1, 2), (2, 3)\}$.

   e) $\{p(t) = 2 + 3t,\, q(t) = -1 + t\}$.

   f) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$.

   g) $\{p(x) = -1 + x + x^2, q(x) = 1 + 3x - x^2, r(x) = -3x + 2x^2\}$.

   h) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8. Dada la matriz
$$A = \begin{bmatrix} k & -2 & 1 \\ 2 & k & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$
halle:

   a) El o los valores de k tal que los vectores columna de A sean li.

   b) El o los valores de k tal que los vectores columna de A sean ld.

   c) Una ecuación que identifique el subespacio generado por los vectores columna de A cuando $k = 1$.

9. Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   a) los conjuntos de vectores dados en cada apartado del ejercicio 5 constituyen una base del espacio correspondiente;

   b) $\{\vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (-1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$;

c) el conjunto $\{p(x) = -3x+1,\ q(x) = 5x^2+x-3,\ h(x) = 5+2x\}$ constituye una base del espacio vectorial P_3 (polinomios de grado menor o igual que 3 y el polinomio nulo);

d) $\{\vec{u} = (2,-3,1), \vec{v} = (4,1,1), \vec{w} = (0,-7,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$;

e) $\{\vec{u} = (0,1,1), \vec{v} = (1,0,-1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$;

f) el conjunto $\{p(x) = x^2+x+1,\ q(x) = 2x,\ h(x) = x-1\}$ constituye una base del espacio vectorial de P_2 (polinomios de grado menor o igual que 2 y el polinomio nulo);

g) $\left\{\vec{a} = (1,2,0),\ \vec{b} = (-1,3,1),\ \vec{c} = (-2,1,-1),\ \vec{d} = (-1,0,-1)\right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$;

10. Estudie si el vector $\vec{w} = (-3,2,4)$ pertenece al espacio generado por $\vec{u} = (1,4,-2)$ y $\vec{v} = (2,1,0)$. ¿Qué representa geométricamente el espacio generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$? ¿El conjunto formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ constituye una base de $\mathbb{R}^3$?

11. ¿Puede un vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$ expresarse como combinación lineal única de los vectores $\vec{v}_1 = (-2,2)$, $\vec{v}_2 = (-2,-2)$ y $\vec{v}_3 = (2,0)$? ¿Es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^2$?

12. Determine una base y la dimensión para los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

    a) $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a+c\}$.

    b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\}$. Escriba las componentes del vector $(1,5,6)$ en la base obtenida.

13. Sea $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, con $m > n$. ¿Es el conjunto A li o ld? ¿Puede ser A un conjunto generador de $\mathbb{R}^n$? ¿Puede ser una base de $\mathbb{R}^n$?

14. *a*) ¿Puede asegurarse que el conjunto solución del sistema S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

$$(S): \begin{cases} x+3y+2z = 0, \\ 2x-y+3z = 0, \\ 3x-5y+4z = 0, \\ x+17y+4z = 0. \end{cases}$$

    b) En caso afirmativo obtenga una base de tal subespacio, su dimensión y su interpretación geométrica.

15. *a*) Determine si $\{(1,2,1,-1), (1,0,1,2), (0,2,0,-3), (0,1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

    b) En caso afirmativo, encuentre las componentes del vector $\vec{v} = (3,5,3,2)$ en dicha base. En caso negativo, analice si dicho vector $\vec{v}$ pertenece al conjunto

$$\text{gen}\,\{(1,2,1,-1), (1,0,1,2), (0,2,0,-3), (0,1,0,1)\}.$$

16. Dados los vectores $\vec{u} = (2,-3)$, $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (9,4)$.

    a) Verifique que $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^2$.

    b) Determine las componentes del vector $\vec{w}$ en la base B.

    c) Determine las componentes de $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ en la base B.

17. En cada apartado, halle las componentes de $\vec{u}$ en la base indicada.

    a) $\vec{u} = (-2,3) \in \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (1,0)\}$.

b) $\vec{u} = (2, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 0, 1), (2, -1, 0), (0, 1, 1)\}$.

18. Construya una base ortonormal a partir de la base $\{(1, 2, 0), (-1, 3, -1), (-1, 0, -1)\}$.

19. Construya una base ortonormal para el subespacio $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_2 + 2x_1\right\}$.

9.1. Problemas propuestos

1. *a*) Verifique si los puntos $A(0, 1, 5)$, $B(2, 3, 1)$, $C(1, 2, -1)$ y $D(-1, 2, 1)$ pertenecen a un mismo plano.

   b) ¿Es $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

   c) En base a lo obtenido en los apartados anteriores, ¿es $\overrightarrow{AD}$ combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$?

2. Si el conjunto de vectores $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ es una base en el plano, diga cuáles de los siguientes conjuntos representan también una base en el plano

$$\left\{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}\right\}, \quad \left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right\}, \quad \left\{\vec{b}, -\vec{b}\right\}.$$

3. *a*) Analice si $\vec{v} = (-3, 2, 1, 4)$ es cominación lineal de $\vec{v}_1 = (2, 1, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1, 2)$ y $\vec{v}_3 = (1, 1, -1, 1)$.

   b) En base al resultado obtenido describa el espacio generado por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - 2z - 5w = 3, \\ 2x + 5y - z - 9w = -3, \\ 2x + y - z + 3w = 11, \\ x - 3y + 2z + kw = -5. \end{cases}$$

   a) Encuentre k, de modo que el sistema resulte compatible indeterminado.

   b) Para dicho valor de k, determine el rango de la matriz de los coeficientes del sistema y exhiba una base de su espacio de columnas.

   c) ¿Cuál es la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo asociado a S?

5. En cada caso determine si la afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesa.

   a) El conjunto $S = \{p \in P_1 : p(x) = a + x\}$ es un subespacio de P_1.

   b) El conjunto $S = \{p \in P_1 : p(0) = 0\}$ es un subespacio de P_1.

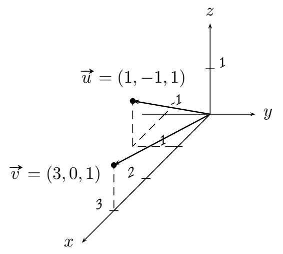
   c) De los vectores x_1, x_2, x_3 y x_4 de un espacio vectorial V, se sabe que $\vec{x}_1$ es combinación lineal de $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$. Entonces se puede asegurar que $\vec{x}_1$ es también combinación lineal de $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ y $\vec{x}_4$.

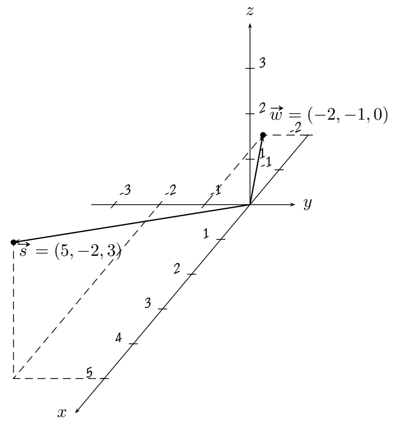
   d) La dimensión del espacio generado por los vectores $(1, 2)$, $(0, 1)$ y $(-1, 1)$ es 3.

   e) La dimensión del espacio generado por los vectores $(0, 0)$, $(2, 1)$ es 1.

6. ¿Por qué puede asegurarse que el conjunto de puntos del plano $\pi : x_3 = x_2 - x_1$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

7. ¿Cuál es el subespacio generado por $A = \{\vec{u}, \vec{v}\}$? ¿Y por $B = \{\vec{s}, \vec{w}\}$? Interprete geométricamente. ¿Generan A y B el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$?





8. Indique en cada caso si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) gen $\{2x^2 - x + 1,\, 2x^3 - x^2 - 1,\, 6x^2 - 4x + 2,\, -x^3 + 3x + 3\} = P_3$.

   b) Si $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V, entonces el subconjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\}$ también lo es.

   c) El conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : b = a + c \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

10. Transformaciones lineales

Por R. Voget

1. Determine, en cada caso, si la transformación dada es o no lineal.

   a) $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_1(x) = \operatorname{sen} x$.

   b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T_2(x, y) = x$.

   c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_3(x, y, z) = (|x|, y)$.

   d) $T_4 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ definida por $T_4\left(a + bx + cx^2\right) = b + 2cx$.

   e) $T_5 : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_5 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{12} - a_{21}, a_{22} + a_{21})$.

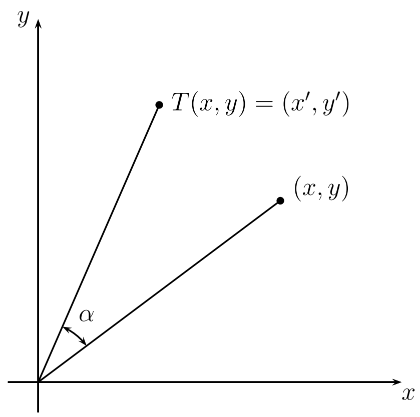
   f) $T_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_6(x) = x^2$.

2. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Considera que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son espacios de vectores columna. Demuestre que la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por $T(x) = Ax$, es una transformación lineal.

3. Observe la figura y aplicando sus conocimientos previos sobre componentes de un vector, igualdad entre vectores, módulo de un vector y ángulo entre vectores, muestre que

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T\,(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

   define una rotación (o giro) de amplitud α con centro en el origen de coordenadas.



4. Dado un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = 2$ y con centro en el origen de coordenadas, y sabiendo que uno de sus vértices es el punto $P_1(2, 0)$, encuentre las coordenadas de los demás vértices.

5. Interprete geométricamente la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

6. Interprete geométricamente la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, y) + (h, k)$, h, k números reales. ¿Es T una transformación lineal?

7. Determine si es lineal la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

8. Pruebe que a partir de la ley anterior se transforman rectas en rectas.

9. Describa la imagen del rectángulo de vértices $A(1,2)$, $B(0,3)$, $C(-1,1)$ al aplicarle a cada punto la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

10. La ecuación $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ corresponde a una elipse. Determine la imagen que resulta al aplicarle la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x', y') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Bosqueje las gráficas.

11. Dada la transformación $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$, pruebe que es una transformación lineal.

12. Determine si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = (x-2y, y+3z)$ es una transformación lineal.

13. Sea $\mathbb{F}$ el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Determine si la transformación $T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = |f|$ es o no lineal.

14. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Se sabe que

    - $T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
    - $T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

    Encuentre $T \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

15. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$. Se sabe que $T(1+3x) = -1+3x$ y $t(-1+x) = 2-5x$. Ecuentre $T(b+ax)$ y $T(-1+5x)$.

16. Halle el núcleo de la transformación lineal del ejercicio 12. Pruebe que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Indique su dimensión.

17. Halle la imagen de la transformación lineal del ejercicio 12. Pruebe que es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Indique su dimensión.

18. Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Pruebe que T es uno a uno si y sólo si $\mathcal{N}(T) = \left\{ \vec{0} \right\}$.
    Ayuda: Recuerde que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uno a uno si para cada par x_1, x_2 del dominio de f, si $x_1 \neq x_2$ resulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.

19. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. El conjunto $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ una base ordenada para $\mathbb{V}$. Sea $T_{\mathbb{V}} \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\vec{v}) = [\vec{v}]_B$, para cada vector $\vec{v}$ de $\mathbb{V}$.

    a) Pruebe que T es una transformación lineal.

b) Demuestre que T es uno a uno.
c) Demuestre que $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^n$.

20. *a*) Halle la representación matricial canónica A_T para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definida por $T(x, y, z, t) = (x - 2y + 2t, x + z - t, 4x - 2y + 3z - t)$.
    b) Halle el rango y la nulidad de T.
    c) Determine las coordenadas de la imagen de $(2, 1, 3, -1)$ en la nueva base $B' = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 9)\}$.

21. *a*) Pruebe que la transformación $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : T(x, y, z, w) = (x + w, x + y + z, x + y + z)$ es lineal.
    b) Encuentre la representación matricial canónica A_T para la transformación.
    c) Encuentre el núcleo de la transformación, una base del núcleo y su dimensión.
    d) Encuentre la imagen de la transformación, una base para la imagen y su dimensión.
    e) Interprete geométricamente el conjunto imagen.

22. Determine, en cada caso, si la aplicación es o no lineal. En caso afirmativo, exhiba una base para el recorrido de la transformación.
    - $T_1 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 : T_1 \left(a + bx + cx^2\right) = 3 + ax + bx^2 + xc^3$.
    - $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_{2\times 2} : T_2\,(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y & x - z \\ 0 & x + 2y + z \end{bmatrix}$.

23. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z)\,(= x - y + 2z, x + 2y + z, 3x + 5z)$.
    a) Demuestre que T es una transformación lineal.
    b) Exhiba una base para el núcleo de la transformación.
    c) Extienda la base encontrada a una base de $\mathbb{R}^3$.

24. Una transformación $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es *sobre* si su imagen (recorrido o contradominio) coincide con su codominio. Es decir si $\mathcal{I}(T) = \mathbb{W}$. Determine si es *sobre* la transformación $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2$ definida por $T\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4)\,x + (2x_1 + x_2)\,x^2$.

25. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}$ una transformación lineal. Se sabe que
$$T\left(1 + x + x^2\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad T\,(1 - x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T\left(x - x^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
    a) Encuentre la ley de la transformación $T\left(a + bx + cx^2\right)$.
    b) Indique el rango y la nulidad de T.
    c) ¿Es T una transformación uno a uno?, ¿y sobreyectiva?

26. Si se tiene una sucesión de números $\{a_1, a_2, \ldots\}$, ésta puede transformarse en la sucesión de los promedios sucesivos:
$$\left\{\frac{a_1}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots\right\}$$
(observe que comienza con el promedio entre a_1 y 0). Suponiendo que cuenta con 11 números, exprese la transformación en forma matricial.

27. Lea detenidamente el Ejemplo 24 de la página 603 del libro «Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal» (Kozak, Pastorelli, Vardanega).

11. Superficies y curvas en el espacio

Por R. Voget

1. Analiza las ecuaciones:

   a) $x^2 + z^2 - 4x - 12 = 0$, $\forall y$.

   b) $y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0$, $\forall x$.

2. Halla la ecuación de la superficie cilíndrica de generatriz paralela al eje oy y directriz la elipse contenida en el plano cóordenado xz de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $y = 0$.

3. Estudia y representa las superficies cilíndricas cuyas ecuaciones se dan:

   a) $3x - 2y + z - 5 = 0$.

   b) $25x^2 + 4y^2 = 100$, $\forall z$.

   c) $9 - x^2 = z$, $\forall y$.

   d) $xz + 2yz = 1$.

4. Halla la ecuación de la superficie cilíndrica cuyas generatrices tienen como coeficientes directores $(0, -2, 1)$ y su directriz tiene por ecuación $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ Realiza un bosquejo de la gráfica.

5. Halla la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es una parábola contenida en el pláno coordenado xy, con eje de simetría en el eje ox vértice en el origen de coordenadas, foco $F(1, 0, 0)$, y cuyas generatrices son normales al plano π de ecuación $x - y + z = 0$.

6. Dada la superficie cilíndrica de ecuación $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$, halla las ecuaciones de su directriz y la dirección de sus generatrices.

7. Halla el volumen del cilindro determinado por la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$, el plano coordenado xy y el plano de ecuaciÓn $z = 5$.

8. Halla la ecuación e identifica el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al plano coordenado xy es siempre igual a la mitad del cuadrado de su distancia al eje oy. Realiza la gráfica.

9. Halla la ecuación de la superficie cónica, dadas, en cada caso,las coordenadas del vértice y las ecuaciones de la directriz:

   a) $\begin{cases} x^2 - 4z^2 = 6, \\ y = 2. \end{cases}$ $V(-1, 1, 1)$.

   b) $\begin{cases} z^2 = 9y, \\ x = 1. \end{cases}$ $V(3, 0, 0)$.

10. Halla la ecuáción de la superficie cónica, cuyo vértice es $V(1, 3, -2)$ y cuya directriz es la elipse contenida en el plano xy, con centro en el origen de coordenadas, eje mayor sobre el eje ox, semieje mayor igual a 5 y un foco en $(3, 0, 0)$.

11. Analiza y representa las superficies cónicas dadas por las siguientes ecuaciones:

    a) $x^2 + y^2 = 4z^2$.

b) $z^2 + 2y^2 - 4(x+3)^2 = 0.$

12. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje y sea el triple de la correspondiente al eje z. Describe dicha superficie.

13. Halla la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la curva en torno al eje especificado en cada caso.

    a) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36, \\ z = 0. \end{cases}$ Eje x.

    b) $\begin{cases} y^2 - z^2 = 4, \\ x = 0. \end{cases}$ Eje y.

    c) $\begin{cases} y = 3x, \\ z = 0. \end{cases}$ Eje x.

14. Analiza cada una de las ecuaciones. En caso que sea de una supericie de revolución, halla las ecuaciones de la generatríz, y el eje de revolución. Grafica.

    a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9.$
    b) $x^2 + z^2 = 4$, $\forall y$.

15. Halla la ecuación de la esfera de centro $C(3,6,-4)$, y tangente al plano de ecuación $2x - 2y - z - 10 = 0$.

16. Halla la ecuación de la esfera dada por los puntos $(7,9,1)$, $(-2,-3,2)$, $(1,5,5)$ y $(-6,2,5)$.

17. Verifica que $x^2+y^2+z^2-6z-3z = 15$ es la ecuación de una superficie esférica y encuentra las coordenads del centro y el radio.

18. Efectúa el análisis de las ecuaciones

    a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
    b) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
    c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
    d) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$
    e) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz.$
    f) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by.$
    g) $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax.$
    h) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz.$
    i) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by.$
    j) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax.$

19. Halla las proyecciones sobre los planos coordenados de las curvas del espacio dadas por las siguientes ecuaciones

    a) $\Gamma_1 \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 5z^2 = 22, \\ 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 14. \end{cases}$

    b) $\Gamma_2 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

    c) $\Gamma_3 \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 10, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

11.1. Miscelánea

1. Analiza la ecuación, y representa la superficie en cada caso.

   a) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 36$,

   b) $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 36$,

   c) $-x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 36$,

   d) $x^2 + \frac{y^2}{4} = -2z$.

2. Halla e identifica el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los ejes x e y es siempre igual a 4. Grafica.

3. Halla la ecuación de una cuádrica sin centro, si la superficie se extiende a lo largo del eje z, y los puntos $(2, 1, 1)$ y $(4, 3, -1)$ pertenecen a ella.

4. Halla la euación de una cuádrica con centro si contiene a la curva

$$\begin{cases} 4y^2 + 2z^2 = 3, \\ x = 2, \end{cases}$$

   y el punto $(1, 1, -1)$ pertenece a ella.

5. Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(-5, 0, 2)$ y $(5, 0, 2)$ es constante e igual a 12. Identifícalo.

6. Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ tal que el cuadrado de su distancia al eje z, es el doble de la correspondiente al plano xy.

7. Halla la ecuación de la esfera de centro $C(3, 6, -4)$ tangente al plano π de ecuación $2x + 2y + z - 10 = 0$.

8. Determina el valor de λ para que la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + \lambda = 0$, tenga radio 5.

9. Nombra y representa las superficies cuyas ecuaciones son

   a) $x^2 + z^2 = 4$.

   b) $x^2 = 4y$.

   c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

10. Halla las intersecciones de las superficies del ejercicio anterior, con los ejes y planos coordenados.

11.2. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Estudiemos la superficie $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, $\forall z$.

- Intersección de la superficie con los ejes coordenados.
  - Eje x. Para ello formamos el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

  Obtenemos dos puntos $(6, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$.

  - Eje y. Para ello formamos el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

  Obtenemos dos puntos $\left(0, 2\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(0, -2\sqrt{3}, 0\right)$.

  - Eje z. Para ello formamos el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

  El sistema es incompatible y por lo tanto la superficie no intersecta al eje z.

- Intersección de la superficie con los planos coordenados.
  - Plano coordenado xz.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+2) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

  El sistema representa una par de rectas en el espacio, ambas paralelas al eje z y contenidas en el plano xz, de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 6 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + 2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

  - Plano coordenado yz.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 12 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \\ x = 0. \end{cases}$$

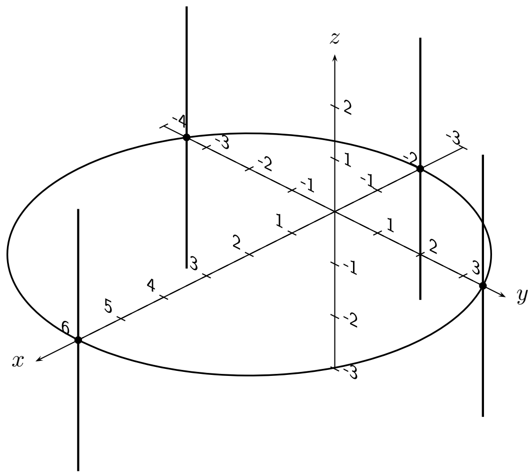
  El sistema representa una par de rectas en el espacio, ambas paralelas al eje z y contenidas en el plano yz, de ecuaciones

$$\begin{cases} y = -2\sqrt{3}, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y = 2\sqrt{3}, \\ x = 0. \end{cases}$$

- Plano coordenado xy.

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-12=0, \\ z=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=16, \\ z=0. \end{cases}$$

El sistema representa una circunferencia contenida en el plano xy de centro $(2,0,0)$ y radio 4.



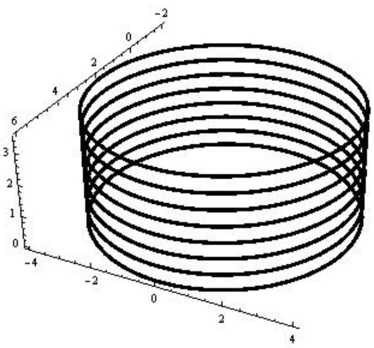
- Intersección con planos paralelos al plano xy.
  Para valores de z distintos de 0, obtenemos

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=16, \\ z=k, \quad k\neq 0, \end{cases}$$

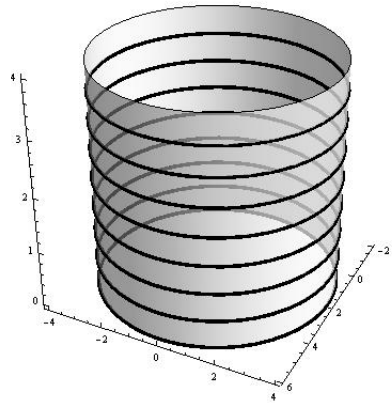
que son ecuaciones de circunferencias C_k contenidas en planos de e4cuación $z=k$, con centro en $c_k(2,0,k)$ y radio 4. Ello nos induce a pensar que S está generada por el desplazamiento de la circunferencia C_0.

Observaciones:

- Los centros de las circunferencias C_k pertenecen a una recta paralela al eje z.
- Para todo $P_1\,(x_1,y_1,0)$ perteneciente a C_0, todo punto $P_1'\,(x_1,y_1,k)$ perteneciente a C_k, determina con P_1 una recta paralela al eje z. Esta recta se llama **generatriz**, y es natural pensar que S puede ser generada por una cualquiera de esas rectas que se desplaza manteniéndose paralela al eje z, y apoyándose sobre la circunferencia C_0 que llamamos **directriz**.



El lugar geométrico definido por la ecuación analizada es un cilindro o superficie cilíndrica de generatriz paralela al eje z y directriz C_0.



Ejemplo 2

Analicemos la ecuación

$$\left(x - \frac{z}{2} - 2\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}z\right)^2 = 16.$$

- Intersección de la superficie con los ejes coordenados.
  - Eje x. Formamos el sistema

$$\begin{cases} \left(x - \frac{z}{2} - 2\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}z\right)^2 = 16, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

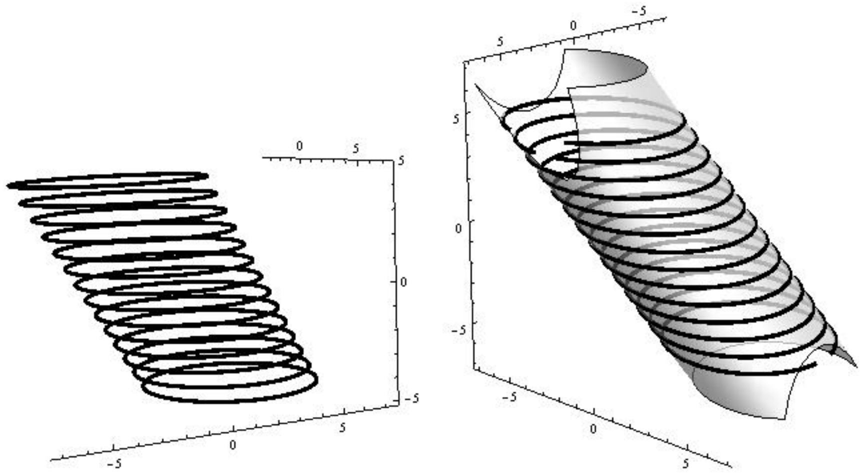
    Los únicos puntos que satisfacen el sistema son $(6, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$.
  - Eje y. De manera análoga obtenemos $\left(0, 2\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(0, -2\sqrt{3}, 0\right)$.
  - Eje z. De manera análoga obtenemos $\left(0, 0, \frac{18}{5}\right)$ y $(0, 0, 6)$.
- Intersección de la superficie con los planos coordenados.
  - Plano xz.

$$\begin{cases} \left(x - \frac{z}{2} - 2\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}z\right)^2 = 16, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{z}{2} - 2\right)^2 + \frac{4}{9}z^2 = 16, \\ y = 0. \end{cases}$$

    Esta curva corresponde a una elipse cuyos ejes de simetría no son paralelos a los ejes coordenados y que está contenida en el plano coordenado xz. Su centro de simetría es el punto $C_1(2, 0, 0)$.
  - Plano yz. De manera análoga obtenemos una elipse cuyos ejes de simetría no son paralelos a los ejes coordenados y su centro de simetría es el punto $C_2(0, 4, -6)$.
  - Plano xy.

$$\begin{cases} \left(x - \frac{z}{2} - 2\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}z\right)^2 = 16, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

    Es la ecuación de una circunferencia C_0 contenida en el plano coordenado xy, de centro $C_0(2, 0, 0)$ y radio 4.



- Intersección de la superficie con planos paralelos al plano xy.

$$\begin{cases} \left(x - \frac{z}{2} - 2\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}z\right)^2 = 16, \\ z = k, \quad k \in \mathbb{R}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{k+6}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}k\right)^2 = 16, \\ z = k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

  El sistema representa circunferencias de centro $c_k\left(\frac{k+6}{3}, -\frac{2}{3}k, k\right)$ y radio 4. Los centros de estas circunferencias determinan una recta; en efecto

$$\overrightarrow{c_0c_k} = \left(\frac{k}{3}, -\frac{2}{3}k, k\right) = k\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}, 1\right).$$

  Podemos decir entonces que los centros de las circunferencias intersección de la superficie con los planos paralelos al plano coordenado xy, pertenecen todos a una recta que contiene al punto $c_0(2, 0, 0)$ y es paralela al vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}, 1\right)$.

Análogamente a lo visto en el primer ejemplo, resulta que cada punto $P(x, y, z)$ que pertenece a la superficie, pertenece a una recta paralela al vector $\vec{u}$ y a su vez cada una de estas rectas corta al plano xy en un punto de la circunferencia C_0.
Luego la superficie está generada por una recta de dirección $\vec{u}$, que se desplaza apoyándose sobre la circunferencia C_0 de ecuación

$$C_0 : \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 3

Halla la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la circunferencia de ecuación

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 3, \end{cases}$$

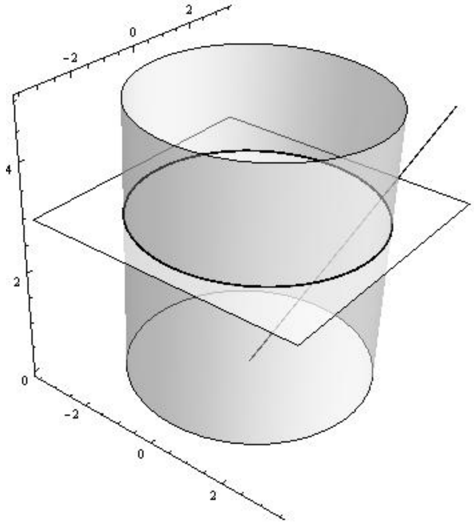
y cuyas generatrices son paralelas al vector $(3, 4, 5)$.

Las ecuaciones de la generatriz por $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ son

$$g: \begin{cases} x = x_0 + 3t, \\ y = y_0 + 4t, \\ z = z_0 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

El punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ verifica, además, las ecuaciones de la directriz:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 9, \\ z_0 = 3. \end{cases}$$



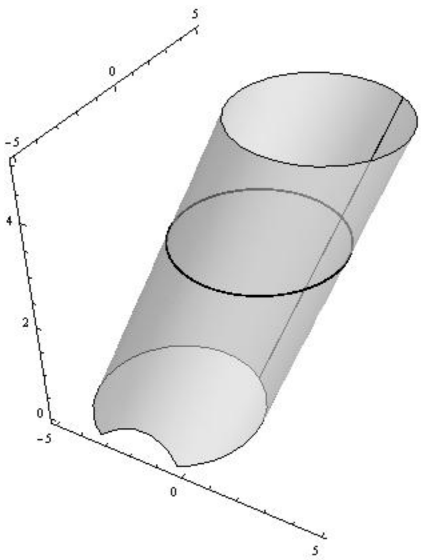
De las dos condiciones resulta

$$\begin{cases} (x-3t)^2 + (y-4t)^2 = 9, \\ z - 5t = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3t)^2 + (y-4t)^2 = 9, \\ t = \frac{z-3}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \frac{3}{5}(z-3))^2 + (y - \frac{4}{5}(z-3))^2 = 9, \\ t = \frac{z-3}{5}. \end{cases}$$

La ecuación es

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 18x + 24y - 30z - 6xz - 8yz = 0.$$

Su gráfica es



Ejemplo 4

Analicemos el lugar geométrico del espacio de ecuación $S: 3x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$.

- Intersección con los ejes coordenados.
  S sólo intersecta a los ejes coordenados en el punto $(0,0,0)$.
- Intersección con los planos coordenados.

- Plano yz.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 2z^2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 2z^2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y + \sqrt{2}z\right)\left(-y + \sqrt{2}z\right) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

La superficie S corta al plano yz en dos rectas de ecuaciones

$$\begin{cases} y + \sqrt{2}z = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -y + \sqrt{2}z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

- Plano xy.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 2z^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y + \sqrt{3}x\right)\left(-y + \sqrt{3}x\right) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

La superficie S corta al plano xy en dos rectas de ecuaciones

$$\begin{cases} y + \sqrt{3}x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -y + \sqrt{3}x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

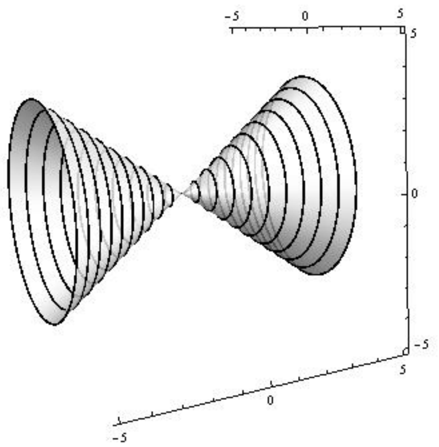
- Plano xz. La superficie intersecta al plano coordenado sólo en el punto $(0, 0, 0)$.

▪ Planos paralelos al plano xz.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 2z^2 = 0, \\ y = k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - k^2 + 2z^2 = 0, \\ y = k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2z^2 = k^2, \\ y = k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{k^2}{3}} + \frac{z^2}{\frac{k^2}{2}} = 1, \\ y = k. \end{cases}$$

Las intersecciones son elipses E_k con eje mayor paralelo al eje z, todas ellas con centro de simetría en el punto $(0, k, 0)$, contenida cada una en el plano de ecuación $y = k$, $\forall x$, $\forall z$.

Podemos considerar este lugar geométrico como una sucesión de elipses infinitamente próximas, con centros de simetría sobre el eje y, cuyos ejes mayor y menor crecen en forma proporcional a $|k|$, siendo $|k|$ la distancia de los planos de ecuación $y = k$ al origen de coordenadas. Uno de los vértices de la elipse E_k es el punto $A_k\left(0, k, \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ y estos puntos están sobre la intersección de la superficie con el plano yz.
Luego, el lugar geométrico es aquel engendrado por una recta que se desplaza sobre una curva fija, en este caso una elipse, manteniendo un punto fijo, en este caso, el punto $(0, 0, 0)$.



Ejemplo 5

Se trata de hallar la ecuación de la superficie cónica con vértice en $V(0,0,0)$ y cuya directriz es la circunferencia de ecuación $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=2. \end{cases}$

El punto $P_0\,(x_0, y_0, 2)$ pertenece a la directriz y a la generatriz. Esta última tiene la dirección del vector $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, 2)$ y su ecuación es

$$g : \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{2} = \frac{1}{t},$$

luego

$$\begin{cases} x_0 = 2\frac{x}{z}, \\ y_0 = 2\frac{y}{z}, \\ z_0 = 2, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 9, \\ z_0^2. \end{cases}$$

Reemplazando queda

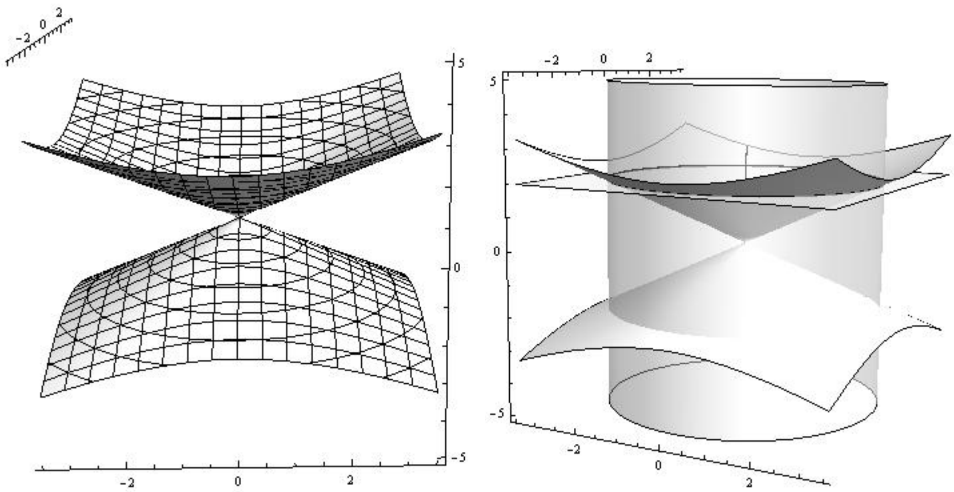
$$\left(2\frac{x}{z}\right)^2 + \left(2\frac{y}{z}\right)^2 = 9,$$

o equivalentemente

$$4x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0,$$

que es la ecuación de un cono.

Observa que la ecuación encontrada es homogénea en x, y, z, y es de segundo grado. La representación gráfica es



Ejemplo 6

Hallaremos la ecuación de la superficie cónica cuyo vértice es $V(1,3,2)$ y su directriz es la elipse de ecuación

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones de la generatriz son

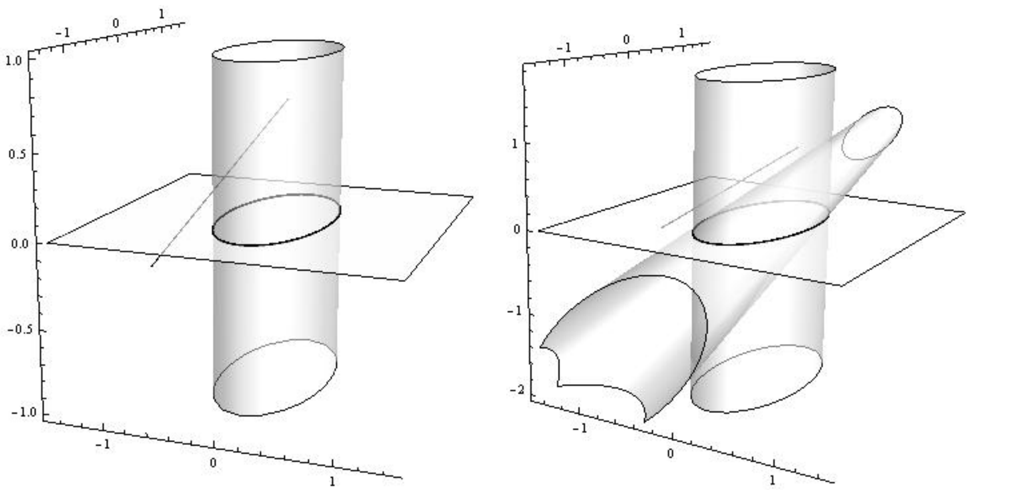
$$\begin{cases} x = 1 + (x_0 - 1)\,\frac{1}{t}, \\ y = 3 + (y_0 - 3)\,\frac{1}{t}, \\ z = 2 + (z_0 - 2)\,\frac{1}{t}, \end{cases} \qquad \text{despejando} \qquad \begin{cases} x_0 = 1 + (x - 1)t, \\ y_0 = 3 + (y - 3)t, \\ z_0 = 2 + (z - 2)t. \end{cases}$$

Como P_0 pertenece a la directriz, entonces

$$\begin{cases} 4\,[1 + (x - 1)t]^2 + [3 + (y - 3)t]^2 = 1, \\ 2 + (z - 2)t = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,[1 + (x - 1)t]^2 + [3 + (y - 3)t]^2 = 1, \\ t = -\frac{2}{z-2}. \end{cases}$$

La ecuación de la superficie cónica resulta

$$4\left(1 - 2\frac{x - 1}{z - 2}\right)^2 + \left(3 - 2\frac{y - 3}{z - 2}\right)^2 = 1.$$



Ejemplo 7

Tenemos que hallar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por la rotación de la hipérbola Γ, contenida en el plano xy, en torno al eje y, y representarla gráficamente, donde

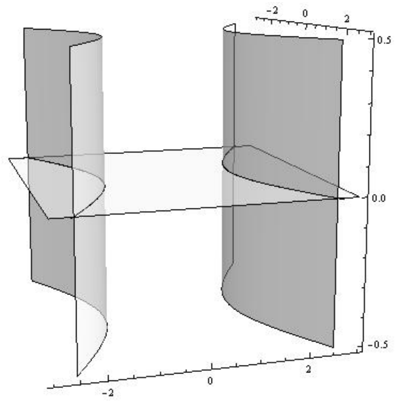
$$\Gamma : \begin{cases} 2y^2 - x^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo x por $\sqrt{x^2 + z^2}$ en la primera ecuación que define a Γ obtenemos

$$2y^2 - \left(\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 = 4$$

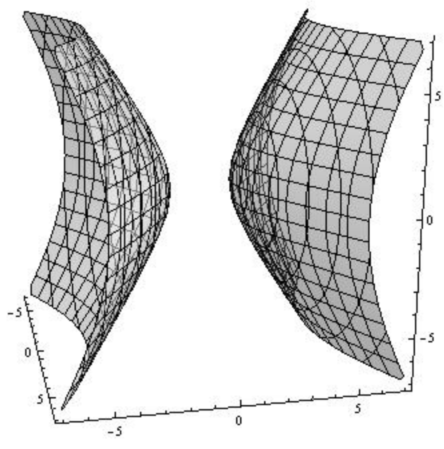
o equivalentemente

$$2y^2 - x^2 - z^2 = 4.$$



- Intersecciones de la superficie con los ejes coordenados.
  - Eje x.
$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 - z^2 = 4, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = 4, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$
    El sistema es incompatible y por lo tanto la superficie no intersecta al eje x.
  - Eje y.
$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 - z^2 = 4, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 4, \\ x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$
    Las coordenadas de dos puntos satisfacen al sistema $A_1\left(0, \sqrt{2}, 0\right)$ y $A_2\left(0, -\sqrt{2}, 0\right)$.
  - Eje z.
$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 - z^2 = 4, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -z^2 = 4, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$
    El sistema es incompatible y por lo tanto la superficie no intersecta al eje z.
- **Propuesta:** Hallar las ecuaciones de las curvas intersección de la superficie con los planos coordenados y con planos paralelos a los coordenados, y analizarlas.

Se trata de un hiperboloide de dos hojas.



Ejemplo 8

Probemos que $y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0$ es la ecuación de una superficie de revolución.

$$y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 4(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 - 4(x-4) = 0.$$

La ecuación es del tipo $F\left(x, \sqrt{y^2+z^2}\right) = 0$, que corresponde a una superficie de revolución en torno al eje x.

- Intersección de la superficie con los ejes coordenados.
  - Eje x.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 16 = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

    que corresponden a las coordenadas del punto $P(4,0,0)$.
  - Eje y.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 16 = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

    No hay intersección con el eje y.
  - Eje z.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 16 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

    No hay intersección con el eje z.

- Intersección de la superficie con los planos coordenados.
  - Plano xz.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 4x + 16 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 4(x-4), \\ x = 0, \end{cases}$$

    ecuación que corresponde a una parábola con vértice $V(4,0,0)$.
  - Plano xy.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4x + 16 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4(x-4), \\ z = 0, \end{cases}$$

    ecuación que corresponde a una parábola con vértice $V(4,0,0)$.
  - Plano yz.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 16 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 + 16 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

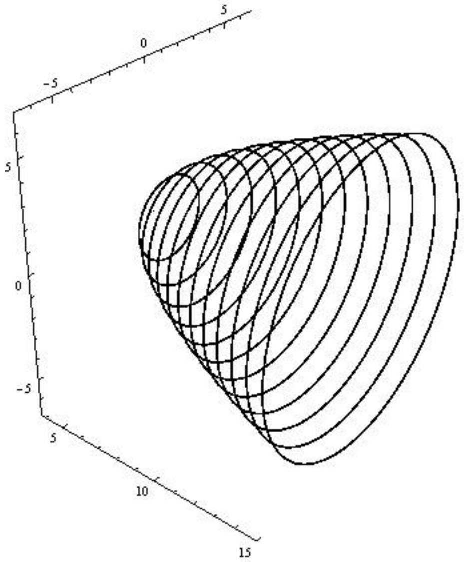
    No existe intersección.

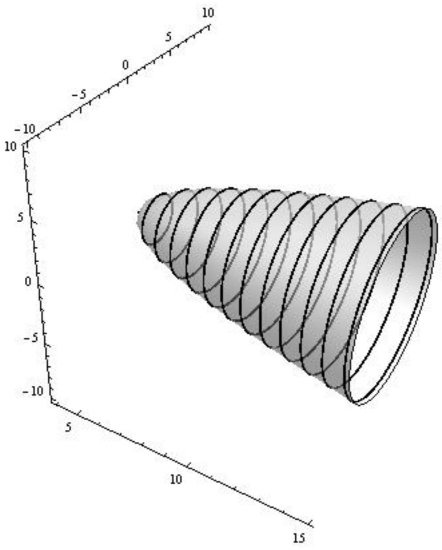
- Intersección de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados.
    - Planos paralelos al plano yz.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 4(x-4), \\ x = k, \end{cases}$$

Si $k > 4$, las curvas son circunferencias con centro en $c_k(k, 0, 0)$ y radio $2\sqrt{k-4}$.

Por lo tanto, la superficie es de revolución y el eje de rotación es el eje x.





Ejemplo 9

Se trata de obtener la ecuación de la superficie esférica de centro $C(1, -3, 4)$ y radio 4.

La ecuación buscada es

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 16.$$

Ejemplo 10

Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 11$. Analicemos si es la ecuación de una esfera y en ese caso determinemos su centro y radio.

Completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z &= 11 \\ \left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 6y\right) + \left(z^2 - 4z\right) &= 11 \\ \left(x^2 - 2x + \mathbf{1} - \mathbf{1}\right) + \left(y^2 + 6y + \mathbf{9} - \mathbf{9}\right) + \left(z^2 - 4z + \mathbf{4} - \mathbf{4}\right) &= 11 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 3 + (z-2)^2 - 4 &= 11 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Es la ecuación de una superficie esférica de centro $C(1, -3, 2)$ y radio 5.

Ejemplo 11

Analicemos ahora la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 7 = 0$.

Completamos cuadrados:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 7 &= 0 \\
\left(x^2 + 4x\right) + \left(y^2 - 2y\right) + z^2 &= -7 \\
\left(x^2 + 4x + \mathbf{4} - \mathbf{4}\right) + \left(y^2 - 2y + \mathbf{1} - \mathbf{1}\right) + z^2 &= -7 \\
(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 &= -2
\end{aligned}$$

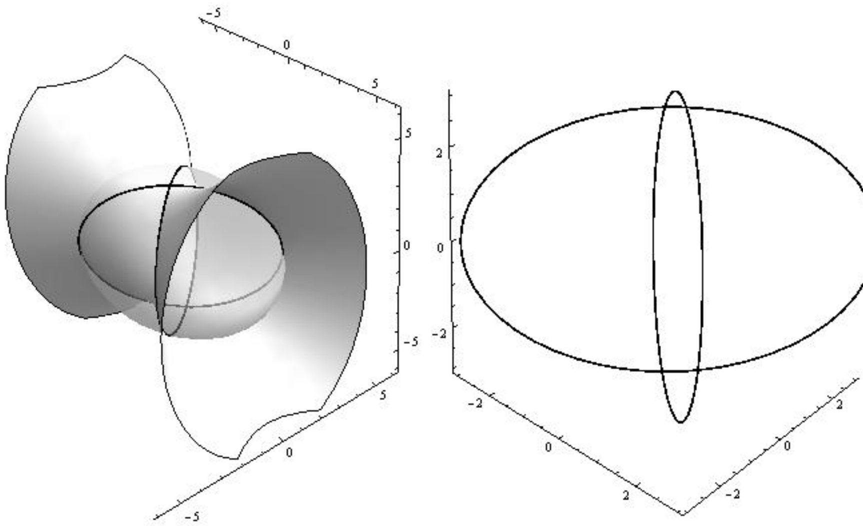
La ecuación no corresponde a ningún lugar geométrico real.

Ejemplo 12

Deseamos hallar las ecuaciones de la proyección sobre el plano coordenado yz de la curva

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 27 = 0, \\ x^2 - 2y^2 - z^2 + 9 = 0. \end{cases}$$

La curva Γ es la intersección de un elipsoide con un hiperboloide de una hoja.



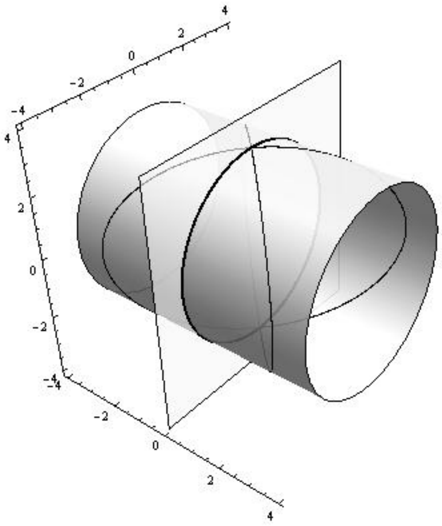
Para hallar la ecuación del cilindro proyectante sobre el plano coordenado yz, debemos eliminar x de las ecuaciones de Γ.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 27 = 0, \\ x^2 - 2y^2 - z^2 + 9 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 27 = 0, \\ 4y^2 + 4z^2 - 36 = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación corresponde al cilindro proyectante $y^2 + z^2 = 9$. Podemos observar la curva intersección.
La ecuación de la directriz de la superficie cilíndrica sobre el plano coordenado yz es

$$d : \begin{cases} y^2 + z^2 = 9, \\ x = 0, \end{cases}$$

que además es la proyección ortogonal de Γ sobre yz. Se trata de una circunferencia de centro $C(0,0,0)$ y radio 3.



Ejemplo 13

Tenemos que hallar la proyección sobre el plano xy de la circunferencia intersección del plano cuya ecuación es $3x+2y-z=0$, con la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=16$.

$$\Gamma : \begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x^2+y^2+z^2=16. \end{cases}$$

Eliminamos z de las ecuaciones de Γ

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x^2+y^2+z^2=16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z, \\ x^2+y^2+z^2=16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2y)^2=z^2, \\ x^2+y^2+z^2=16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2y)^2=z^2, \\ x^2+y^2+(3x+2y)^2=16. \end{cases}$$

La segunda ecuación del sistema corresponde al cilindro proyectante de Γ sobre el plano xy. La ecuación de la proyección es

$$p : \begin{cases} x^2+y^2+(3x+2y)^2=16, \\ z=0, \end{cases} \qquad \text{o} \quad q : \begin{cases} 10x^2+12xy+5y^2=16, \\ z=0. \end{cases}$$