

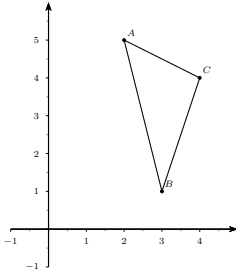
Elementos de Álgebra y Geometría Analítica

PRIMER EXAMEN PARCIAL — MARTES 7 DE MAYO DE 2013 — Tema 1

APELLIDO Y NOMBRE: _____ LEGAJO: _____

1. Considere los puntos $A(2, 5)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 4)$.
 - a) Grafique el triángulo que determinan.
 - b) Calcule la amplitud del ángulo BAC .
 - c) Calcule el perímetro del triángulo.
 - d) Calcule el área del triángulo.
2. Considere los vectores $\vec{y} = (1, 2, 3)$ y $\vec{z} = (-3, 2, -1)$.
 - a) Determine los cosenos directores del vector $\vec{x}$, si $\vec{x} \perp \vec{y}$, $\vec{x} \perp \vec{z}$ y el ángulo que forma con el eje OZ es agudo.
 - b) Determine el vector $\vec{w}$ que es paralelo y del mismo sentido que el vector $\vec{x}$ y además los vectores $\vec{w}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ forman un paralelepípedo de volumen 24.

SOLUCIÓN PROPUESTA



1. a)

b) $\vec{AB} = (3, 1) - (2, 5) = (1, -4)$. $\vec{AC} = (4, 4) - (2, 5) = (2, -1)$.

$$\cos(BAC) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{1 \times 2 + (-4) \times (-1)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{17} \sqrt{5}} \Rightarrow BAC \approx 49^\circ.$$

c) $\vec{BC} = (4, 4) - (3, 1) = (1, 3)$.

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} + \sqrt{2^2 + (-1)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{10} \approx 9,52145. \end{aligned}$$

d) Del apartado 1b se sigue que

$$\sin(BAC) = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{5}} \right)^2} = \frac{7}{\sqrt{85}}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin(BAC) = \frac{1}{2} \sqrt{17} \sqrt{5} \frac{7}{\sqrt{85}} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

2. a) El vector $\vec{x}$ es paralelo al vector $\vec{y} \times \vec{z} = (-8, -8, 8)$. Como la tercera componente del vector $\vec{y} \times \vec{z}$ es positiva, entonces $\vec{x}$ y $\vec{y} \times \vec{z}$ tienen el mismo sentido. Luego

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{|(-8, -8, 8)|} (-8, -8, 8) = \frac{1}{8\sqrt{3}} (-8, -8, 8) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Los cosenos directores del vector $\vec{x}$ son respectivamente $-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Como los vectores $\vec{w}$ y $\vec{x}$ son paralelos, entonces $\vec{w} = \alpha \vec{x}_0$, con $\alpha > 0$, porque $\vec{w}$ y $\vec{x}$ tienen el mismo sentido. Además $|\vec{w} \cdot \vec{y} \times \vec{z}| = |\alpha \vec{x}_0 \cdot \vec{y} \times \vec{z}| = \alpha |\vec{x}_0 \cdot \vec{y} \times \vec{z}| = 24$, de donde resulta

$$\text{Volumen} = \alpha |\vec{x}_0 \cdot \vec{y} \times \vec{z}| = \alpha (8\sqrt{3}) = 24 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (-1, -1, 1).$$