

ESTABILIDAD PRÁCTICA EN CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELO MEDIANTE CONJUNTOS INTERIOR-EXTERIOR

Román Comelli*, Alejandro H. González†, Antonio Ferramosca‡, Sorin Olaru§ y Ernesto Kofman*

*CIFASIS, CONICET-UNR, 2000 Rosario, Argentina †INTEC, CONICET-UNL, 3000 Santa Fe, Argentina

‡Department of Management, Information and Production Engineering, Bergamo University, 24044 Dalmine, Italia

§L2S, Univ. Paris-Sud-CentraleSupélec-CNRS, Université Paris Saclay, 91190 Gif-sur-Yvette, Francia

Resumen: Este trabajo introduce una nueva forma de diseñar esquemas de Control Predictivo Basado en Modelo con estabilidad práctica bajo asunciones menos restrictivas que las de los enfoques existentes. La idea se basa en reemplazar el conjunto invariante de control, típicamente usado como restricción terminal para garantizar estabilidad, por un par de conjuntos interior-exterior más simples, que relajan la condición de invariancia. Se muestra que puede asegurarse la convergencia en tiempo finito al conjunto exterior, que no debe necesariamente ser invariante.

Palabras clave: control predictivo basado en modelo, invariancia, invariancia periódica, estabilidad práctica

2000 AMS Subject Classification: 21A54 - 55P54

1. INTRODUCCIÓN

El Control Predictivo Basado en Modelo (MPC, por sus siglas en inglés) calcula una secuencia de acciones de control resolviendo un problema de optimización que predice el comportamiento del sistema a partir de un modelo del mismo, considerando restricciones en la entrada y el estado. De dicha secuencia, se aplica la primera acción de control, descartándose el resto. Este procedimiento se repite en cada instante de muestreo teniendo en cuenta las últimas mediciones realizadas de las variables que haya disponibles [4].

El tipo de estabilidad que comúnmente se estudia cuando hay perturbaciones, o entrada finita [1], es la denominada *estabilidad práctica* que implica la convergencia a una región en lugar de a un punto. En las formulaciones MPC, para asegurar dicha propiedad y la factibilidad recursiva del problema de optimización, se suele incluir una restricción terminal de pertenencia a un invariante de control [2, 3], es decir, a un conjunto tal que si el estado pertenece al mismo en el instante k , entonces existe un valor de entrada tal que en $k + 1$ el estado permanece en dicha región. En general estos conjuntos son complicados de obtener y difíciles de usar por su complejidad (incluso en casos lineales simples suelen ser poliedros con un número elevado de caras).

En este trabajo proponemos una alternativa en la que, para simplificar los problemas asociados con el cálculo y la utilización de un invariante de control, el mismo es reemplazado por dos conjuntos más simples, uno interior y otro exterior, que no necesitan ser invariantes (sólo deben verificar una condición más débil), y aún así permiten demostrar la estabilidad (práctica) del lazo cerrado. Se mostrará que mediante el uso de una condición de paso (en lugar de una restricción terminal) por el conjunto interior y con una modificación del costo de etapa en el conjunto exterior, es posible garantizar la factibilidad recursiva y posterior convergencia del esquema. Debe notarse que, como se ilustrará con un ejemplo, para sistemas que presentan ciertas dificultades como no linealidades, conmutaciones, entrada finita, etcétera, esta simplificación puede ser la diferencia entre poder y no poder aplicar una estrategia estabilizante de MPC.

1.1. NOTACIÓN

Denominaremos \mathbb{R} , $\mathbb{R}_{\geq 0}$, \mathbb{N} , \mathbb{Z} y $\mathbb{Z}_{N:M}$ a los conjuntos de números reales, reales no negativos, naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$, enteros y enteros en el intervalo $[N, M]$, respectivamente. La función techo de $b \in \mathbb{R}$ se denota como $\lceil b \rceil \triangleq \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq b\}$. Dada la secuencia $\{a_1, \dots, a_n\}$ con $n \in \mathbb{Z}$ y el conjunto A , la notación $\{a_1, \dots, a_n\} \in A^n$ indica que cada elemento de la secuencia pertenece a A . Finalmente, $a_{k+i|k}$ representa la predicción del valor de $a(\cdot)$ en el instante $k + i$ calculada en el tiempo k .

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos el sistema de tiempo discreto no lineal

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad (1)$$

donde $x_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u_k \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ constituyen el estado y la entrada en el instante k , siendo X y U conjuntos cerrados. Se plantea como objetivo diseñar un controlador MPC de horizonte $N \in \mathbb{N}$ que asegure convergencia al conjunto compacto objetivo $\Omega_O \subseteq X$, y para esto se asume lo siguiente:

Suposición 1 (Existencia de conjunto interior de control en N pasos, Ω_I) Dado el sistema (1), el horizonte N y el conjunto compacto objetivo Ω_O , existe un conjunto compacto interior de control en N pasos $\Omega_I \subseteq \Omega_O$ con la siguiente propiedad: si $x_k \in \Omega_I$, entonces existe una secuencia de entradas $\{u_k, \dots, u_{k+i-1}\} \in U^i$ con $i \in \mathbb{Z}_{1:N}$ tal que $x_{k+i} \in \Omega_I$ y $\{x_k, \dots, x_{k+i-1}\} \in \Omega_O^i$.

Más específicamente, el objetivo será garantizar la convergencia hacia Ω_O desde el conjunto controlable en hasta N pasos hacia Ω_I :

Definición 1 (Conjunto controlable en hasta N pasos, $\mathcal{X}_N^{\Omega_I}$) Dado el sistema (1), el horizonte N y el conjunto interior Ω_I , decimos que $\mathcal{X}_N^{\Omega_I} \subseteq X$ es el conjunto controlable en hasta N pasos hacia Ω_I siempre que si $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$, entonces existe una secuencia $\{u_k, \dots, u_{k+i-1}\} \in U^i$ con $i \in \mathbb{Z}_{1:N}$ tal que $x_{k+i} \in \Omega_I$ y $\{x_k, \dots, x_{k+i-1}\} \in X^i$.

3. ESQUEMA MPC PROPUESTO

Dada una función de costo de etapa original $\tilde{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, se definen

$$\tilde{L}_{\max} \triangleq \sup_{x \in \Omega_O, u \in U} \tilde{L}(x, u), \quad \tilde{L}_{\min} \triangleq \inf_{x \in X \setminus \Omega_O, u \in U} \tilde{L}(x, u), \quad (2)$$

asumiendo que \tilde{L} , Ω_O y Ω_I son tales que \tilde{L}_{\max} es finito, y $\tilde{L}_{\min} > 0$. Luego, se propone una nueva función de costo de etapa $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, modificando \tilde{L} de modo que se reduzca en Ω_O y se incremente para estados predichos más lejanos en el futuro. Esto se logra usando dos constantes c y r :

$$L(x, u, i) \triangleq \begin{cases} c\tilde{L}(x, u) & \text{si } x \in \Omega_O \\ (1 + (i-1)r)\tilde{L}(x, u) & \text{si } x \notin \Omega_O \end{cases}, \quad (3)$$

donde $i \in \mathbb{Z}_{1:N}$ es el número de etapa, $r \in [0, 1)$ y $c \geq 0$ satisface

$$cN\tilde{L}_{\max} \leq r\tilde{L}_{\min}. \quad (4)$$

Dadas las secuencias factibles de entrada $\mathbf{u}_k = \{u_{k|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$ y de estados predichos $\mathbf{x}_k = \{x_{k|k}, \dots, x_{k+N|k}\}$ computada como

$$x_{k|k} = x_k, \quad x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}). \quad (5)$$

para $i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$, definimos la función de costo de MPC como

$$V(x_k, \mathbf{u}_k) \triangleq \sum_{i=1}^N L(x_{k+i|k}, u_{k+i-1|k}, i). \quad (6)$$

Luego, para un estado $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$, consideramos el siguiente problema de control óptimo:

$$P(x_k) : V^*(x_k) \triangleq \min_{\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_N(x_k)} V(x_k, \mathbf{u}_k), \quad (7)$$

sujeto a (5) y donde $\mathcal{U}_N(x_k)$ denota el conjunto de secuencias de entrada factibles que satisfacen

$$u_{k+i|k} \in U, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \quad x_{k+i|k} \in X, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{1:N}, \quad x_{k+i|k} \in \Omega_I, \quad \text{para algún } i \in \mathbb{Z}_{1:N}.$$

La solución de este problema de optimización es la secuencia de entradas de control óptima $\mathbf{u}_k^* \triangleq \{u_{k|k}^*, \dots, u_{k+N-1|k}^*\}$, que tiene asociada la secuencia de estados predichos óptima $\mathbf{x}_k^* \triangleq \{x_{k|k}^*, \dots, x_{k+N|k}^*\}$. Finalmente, siguiendo el concepto de horizonte móvil, se aplica la ley de control $\kappa_{MPC}(x) \triangleq u_{k|k}^*$ y se descarta el resto de la secuencia \mathbf{u}_k^* , resultando el sistema a lazo cerrado: $x_{k+1} = f(x_k, u_{k|k}^*) = f(x_k, \kappa_{MPC}(x))$.

3.1. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Los siguientes resultados, cuyas demostraciones formales se omiten por falta de espacio, establecen las propiedades de estabilidad práctica y convergencia en tiempo finito del esquema propuesto.

En primer lugar, el siguiente lema establece una condición sobre el costo asociada al hecho de que todos los estados de la secuencia se encuentren dentro del conjunto objetivo Ω_O .

Lema 1 Dado $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$ y $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_N(x_k)$, el costo (6) satisface que $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}} \Leftrightarrow \mathbf{x}_k \in \Omega_O^N$.

Que $\mathbf{x}_k \in \Omega_O^N \Rightarrow V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ es directo considerando (2)–(4) y (6). Por otra parte, el otro sentido de la implicancia también se puede demostrar fácilmente probando que un solo elemento de \mathbf{x}_k fuera de Ω_O^N , implica $V(x_k, \mathbf{u}_k) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$.

La ausencia de incertidumbre y perturbaciones en (1) permite asegurar que en lazo cerrado $x_{k+1} = x_{k+1|k}^*$, de donde resulta el siguiente corolario del Lema 1.

Corolario 1 Dada la formulación MPC (7) y $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$, la condición $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ implica $x_{k+1} \in \Omega_O$.

El próximo teorema muestra que si el costo $V^*(x_{k+1})$ es suficientemente grande ($x_{k+i|k}^* \notin \Omega_O$ para algún $i \in \mathbb{Z}_{1:N}$), entonces el mismo se redujo respecto de $V^*(x_k)$ en una cierta cantidad que admite una cota inferior positiva.

Teorema 1 Dada la formulación MPC (7), para cualquier $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$, la condición $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ implica

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \epsilon \triangleq \frac{r\tilde{L}_{\text{mín}}}{N}. \quad (8)$$

Si $\Omega_I = \Omega_O$, o siempre que $x_{k+i|k}^* \notin \Omega_O$, también se verifica que

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \tilde{\epsilon} \triangleq \left(1 - r \frac{N-1}{N}\right) \tilde{L}_{\text{mín}}. \quad (9)$$

La demostración de este teorema se basa en la siguiente idea. Después de aplicar el primer elemento de la secuencia de entrada óptima \mathbf{u}_k^* en el instante k , en el paso siguiente se puede considerar la misma secuencia de entrada (removiendo el primer elemento) hasta que el estado llega a Ω_I y luego cualquier acción que mantenga el estado en Ω_O . Esto es factible por la Suposición 1 y resulta menos costoso que salirse del conjunto objetivo por la forma en la que está definido $L(x, u, i)$. Luego, todos los estados fuera de Ω_O de la nueva secuencia de estados predichos \mathbf{x}_{k+1} , ya se encontraban en \mathbf{x}_k^* pero ahora están temporalmente más cerca del comienzo. Debido a esto y al factor r en (3), esta nueva secuencia (que de hecho no es necesariamente la óptima) presenta una reducción de costo con una cota inferior positiva.

El siguiente corolario muestra que cuando el costo óptimo se reduce por debajo de cierto valor, permanece acotado por el mismo para siempre.

Corolario 2 Dada la formulación MPC (7), si $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$ y $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$, entonces $V^*(x_j) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ para todo $j \geq k$.

De los Corolarios 1 y 2 resulta inmediato que cuando el costo óptimo se mantiene por debajo de cierta cota, el estado permanece para siempre en Ω_O . Finalmente el siguiente corolario muestra que el estado alcanza en tiempo finito dicho conjunto objetivo.

Corolario 3 Dada la formulación MPC (7) con $\Omega_O = \Omega_I$ o $r > 0$, si $x_k \in \mathcal{X}_N^{\Omega_I}$ y $V^*(x_k) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$, entonces $x_{k+i} \in \Omega_O$ para todo $i > M$, siendo

$$M \triangleq \left\lceil \frac{V^*(x_k) - cN\tilde{L}_{\text{máx}}}{\alpha} \right\rceil \quad (10)$$

con $\alpha = \tilde{\epsilon}$ (Ecuación (9)) siempre que $\Omega_I = \Omega_O$, incluso si $r = 0$, o $\alpha = \epsilon$ (Ecuación (8)) en cualquier otro caso con $r > 0$.

4. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Para ilustrar la estrategia propuesta, se utiliza el siguiente modelo no lineal de un péndulo invertido:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + 0,01 \omega_k, \quad \omega_{k+1} = 0,4 \sin \theta_k + 0,999 \omega_k + 1,2 \tau_k \quad \tau_{k+1} = \tau_k + 0,005 u_k$$

donde θ_k es el ángulo respecto de la vertical, ω_k es la velocidad angular y τ_k es el torque aplicado. La entrada $u_k \in \{-1, 0, 1\}$ determina el cambio en τ_k y pertenece a un conjunto finito que está limitado a mantener el torque o modificarlo en una cantidad fija.

El objetivo es converger a $\Omega_O = \{x \in X : |\theta| \leq 0,1, |\omega| \leq 0,14, |\tau| \leq 0,066\}$, para lo que, si se usase un enfoque clásico de MPC se requeriría un invariante de control. Linealizando el sistema y considerando entrada continua en $[-1, 1]$ dicho invariante tendría 70 caras, lo cual es complejo de describir y manipular pero además no sería un invariante de control para el sistema original con lo cual la estabilidad no se podría garantizar. Por otro lado, un conjunto interior de control Ω_I de solo ocho caras puede encontrarse, como se muestra en la Figura 1. Este poliedro está dado por $\Omega_I = \{x \in X : Fx \leq g\}$ con $g = [6,772 \ 6,772 \ 8,151 \ 8,151 \ 7,445 \ 7,445 \ 0,386 \ 0,386]^T$ y

$$F = \begin{bmatrix} 95,99 & 37,59 & 265,9 \\ -95,99 & -37,59 & -265,9 \\ 10,19 & 91,69 & 0 \\ -10,19 & -91,69 & 0 \\ 100,6 & 13,66 & 24,52 \\ -100,6 & -13,66 & -24,52 \\ 5,765 & 1,094 & 9,294 \\ -5,765 & -1,094 & -9,294 \end{bmatrix}$$

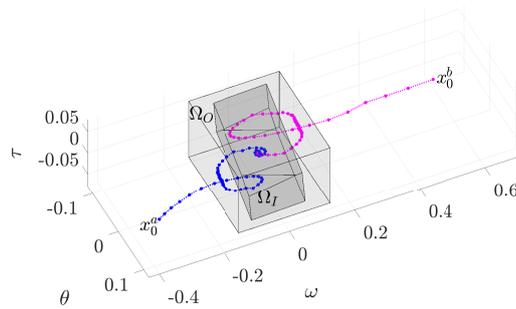


Figura 1: Trayectorias obtenidas.

Dado que Ω_I es un conjunto interior de control en 9 pasos (puede verificarse computacionalmente), se toma $N = 9$ como horizonte del esquema MPC. A su vez, considerando como costo de etapa original el siguiente $\tilde{L}(x) = \theta^2 + 10^{-4} \omega^2 + 1,44 \cdot 10^{-4} \tau^2$, resulta $\tilde{L}_{\min} = 2,189 \cdot 10^{-3}$ y $\tilde{L}_{\max} = 10^{-1}$. Finalmente, seleccionando $r = 0,1$ se obtiene $c \leq 2,432 \cdot 10^{-4}$ de (4). Habiendo definido todos los parámetros del controlador, en la Figura 1 se muestran simulaciones del sistema a lazo cerrado desde las condiciones iniciales $x_0^a = [0,068 \ -0,36 \ -7,3 \cdot 10^{-3}]^T$ y $x_0^b = [-0,073 \ 0,59 \ -0,043]^T$ con $c = 2 \cdot 10^{-4}$. Puede observarse que ambas evoluciones convergen a Ω_O en tiempo finito y que, de hecho, luego continúan aproximándose al origen. Esto se debe a que $c > 0$.

5. CONCLUSIONES

Se presentó un esquema MPC flexible con estabilidad práctica y convergencia en tiempo finito. Dados un costo de etapa \tilde{L} y una región objetivo Ω_O con un conjunto interior de control en N pasos Ω_I , se propone una modificación a dicho costo de etapa teniendo en cuenta si el estado predicho pertenece a Ω_O y se formula un problema de optimización con una restricción de paso por Ω_I .

REFERENCIAS

- [1] Aguilera, Ricardo P. y Daniel E. Quevedo: *On stability and performance of finite control set MPC for power converters*. En *Workshop on Predictive Control of Electrical Drives and Power Electronics*, páginas 55–62, 2011.
- [2] Anderson, Alejandro, Alejandro H. González, Antonio Ferramosca y Ernesto Kofman: *Finite-time convergence results in robust model predictive control*. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(5):1627–1637, 2018.
- [3] Mayne, David Q., James B. Rawlings, Christopher V. Rao y Pierre O. M. Scokaert: *Constrained model predictive control: Stability and optimality*. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.
- [4] Rawlings, James B., David Q. Mayne y Moritz Diehl: *Model predictive control: theory, computation, and design*, volumen 2. Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017.