Probabilistic Invariant Sets for Closed-Loop Re-Identification

A. Anderson, A. Ferramosca, A. H. González and E. Kofman

Abstract— **Recently, a Model Predictive Control (MPC) suitable for closed-loop re-identification was proposed, which solves the potential conflict between the persistent excitation of the system and the stabilization of the closed-loop by extending the equilibrium-point-stability to the invariant-set-stability. The proposed objective set, however, derives in large regions that contain conservatively the excited system evolution. In this work, based on the concept of probabilistic invariant sets, the controller target sets are substantially reduced ensuring the invariance with a sufficiently large probability (instead of deterministically), giving the resulting MPC controller the necessary flexibility to be applied in a wide range of systems.**

Keywords— **Model predictive control, closed-loop identification, probabilistic invariant set**

I. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de las aplicaciones de Control Predictivo Basado en Modelos (MPC) se desea una actualización periódica del modelo del sistema para alcanzar mejores rendimientos. En este contexto, el procedimiento de re-identificación debe desarrollarse en lazo cerrado, para evitar detener el proceso cada vez que sea necesaria una actualización. Como ya es sabido, el principal problema de la identificación en lazo cerrado es que el objetivo del control es incompatible con el objetivo de la identificación. De hecho, para realizar adecuadamente una identificación, es necesario aplicar una excitación persistente a los modos del sistema, mientras que el controlador toma esta excitación como una perturbación y trata de rechazarla con el propósito de estabilizar el sistema. Por otro lado, es deseable que la mencionada excitación sea en lazo abierto, para obtener así datos de entrada-salida no correlacionados, que permitan utilizar métodos de identificación sencillos y confiables.

Se han desarrollado diversas estrategias de re-identificación a lazo cerrado mediante controladores MPC: en [1] se propone un controlador llamado Model Predictive Control and Identification (MPCI), en el cual se añade una condición de excitación persistente por medio de restricciones adicionales al problema de optimización. Esta estrategia resulta en un problema de optimización no convexo y la mayoría de las propiedades conocidas de las formulaciones de MPC no se cumplen.

En [2] se presenta un controlador que se enfoca en dos etapas: la primera se ocupa de optimizar la trayectoria de control, como es habitual en MPC, mientras que la segunda se ocupa de generar entradas de señal de excitación persistentes maximizando el mínimo autovalor de la matriz de información (una matriz que describe la variabilidad de la entrada). Sin embargo, el segundo problema de optimización no es lineal y resulta muy difícil de resolver.

En [3] se realiza un estudio de diversos métodos de re-identificación mediante MPC, centrándose en el "Relevant Identification MPC", (MRI), el cual es un método de identificación que no sólo tiene en cuenta la exactitud del modelo sino también la aptitud de este para las predicciones, es decir, la aptitud del modelo desde el punto de vista del controlador.

En general, en ninguno de estos abordajes se mostraron resultados referentes a la estabilidad del MPC mientras se está re-identificado el sistema. Recientemente, en [4] se propuso un nuevo MPC apropiado para la re-identificación que garantiza la estabilidad a la vez que realiza una re-identificación a lazo cerrado de manera adecuada. La idea principal consiste en extender el concepto de estabilidad de un punto de equilibrio a la estabilidad de un conjunto invariante, y proponer un MPC que lleve el sistema a este conjunto cuando se está afuera de él, y lo excite persistentemente cuando se está en su interior. La formulación del problema MPC se basa en el concepto de distancia generalizada de un punto (trayectoria de estados predicha) a un conjunto (conjunto invariante objetivo). De esta forma se garantiza la estabilidad del conjunto invariante objetivo y también la excitación persistente del sistema, ya que ambas tareas se desarrollan en regiones disjuntas del espacio de estados.

Más allá de sus beneficios, el método propuesto en [4] deriva en grandes regiones (conjuntos invariantes) que contienen la evolución del sistema excitado de manera muy conservadora. De esta forma, la región en la que el controlador deja el sistema en lazo-abierto (teniendo en cuenta que el conjunto invariante es considerado como un equilibrio generalizado y ninguna acción de control se aplica al sistema cuando se está adentro de este) es una gran región en el espacio de estados, lo cual no es seguro para diversos escenarios del sistema de control.

En este trabajo, basado en el concepto de invarianza probabilística presentado en [5], el conjunto objetivo para el controlador se reduce sustancialmente asegurando la invarianza con una cierta probabilidad que puede ser elegida a priori (en lugar de una invarianza determinística), dando como

A. Anderson, A.H. González, Institute of Technological Development for the Chemical Industry (INTEC), CONICET-Universidad Nacional del Litoral (UNL). Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina. alelanderson@gmail.com, alejgon@santafe-conicet.gov.ar}

A. Ferramosca, CONICET - Universidad Tecnológica Nacional (UTN). Facultad Regional de Reconquista. Calle 44, 1000 (3560), Reconquista, Santa Fe, Argentina. ferramosca@santafe-conicet.gov.ar

E. Kofman, Deparatmento de Control, FCEIA, UNR and CIFASIS-CONICET, Argentina. kofman@fceia.unr.edu.ar

resultado un controlador MPC con la flexibilidad necesaria para ser aplicado en una amplia gama de sistemas. Varios escenarios de re-identificación a lazo-cerrado son simulados para mostrar claramente los beneficios y limitaciones del nuevo controlador propuesto.

Planteo del Problema

Se considera un sistema descrito por un modelo lineal en tiempo discreto, invariante en el tiempo,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

donde $x(k) \in X \subset \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema en el instante de tiempo actual k, x_0 es el estado inicial, y $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^m$ es la acción de control. A lo largo de este trabajo se asume que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene todos sus autovalores en el interior del círculo unitario, el par (A,B) es controlable, el conjunto X es convexo y cerrado, el conjunto U es convexo y compacto y ambos contienen al origen en su interior.

Nuestro objetivo es desarrollar una estrategia de control MPC que considere la re-identificación a lazo-cerrado para el sistema (1).

II. PRECEDENTES

En esta sección se mencionan algunas definiciones y propiedades en las que se basarán los resultados principales del trabajo.

Control y Conjuntos Invariantes

Definición 1. ($\gamma-$Conjunto Invariante de Control, $\gamma-$CIS) Dado $\gamma \in [0,1]$, el conjunto $\Omega \subseteq X$ es $\gamma-$invariante de control para el sistema (1) asociado con el conjunto $\mathcal{U}$, si $x(k) \in \Omega$ implica que $x(k+1) \in \gamma\Omega$, para algún $u(k) \in U$.

Definición 2. (Conjunto Alcanzable) Dado el conjunto $\Omega \subseteq X$, el conjunto alcanzable $\Re(\Omega)$ desde Ω en un paso, asociado al conjunto de entradas U, es el conjunto de todos los puntos $z \in X$ para los cuales existe $x \in \Omega$ y $u \in U$ tal que $Ax + Bu = z$.

$$\Re(\Omega) = \{z \in X : \exists x \in \Omega, \exists u \in U \; tal \; que \; z = Ax + Bu\}$$

Definición 3. (Conjunto Controlable) Dado el conjunto $\Omega \subseteq X$, el conjunto controlable $Q(\Omega)$ a Ω en un paso, asociado al conjunto de entradas U, es el conjunto de todos los puntos $x \in X$ para los cuales existe $u \in U$ tal que $Ax + Bu \in \Omega$.

$$Q(\Omega) = \{x \in X : \exists u \in U \; tal \; que \; Ax + Bu \in \Omega\}$$

Invarianza Probabilística

En este trabajo, el concepto de invarianza probabilística estará asociado a los requisitos de excitación necesarios para llevar a cabo la identificación del sistema. Así, en primer lugar se define:

Definición 4. (Excitación Persistente Acotada) Dado un conjunto compacto no vacío $V \subset \mathbb{R}^m$, un proceso estocástico de Márkov estacionario[1] $v : \mathbb{N} \to V$ es una excitación persistente en V si $E[v(k)] = 0$ y $\mathrm{cov}[v(k)] > 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Notar que esta definición está directamente relacionada con la utilizada normalmente al definir entradas de excitación persistentes en la literatura de identificación de sistemas ([6]). Ahora, asociado a la excitación persistente se define:

Definición 5. $\gamma-$Conjunto Invariante Probabilístico ($\gamma-$PIS) Sea $p \in (0,1]$ y $\gamma \in (0,1]$. El conjunto $S \subseteq X$ es un $\gamma-$invariante probabilístico con probabilidad p para el sistema (1), siendo $u(k)$ una excitación persistente acotada por $V \subset U$, si y sólo si $x(k) \in S \Rightarrow \Pr[x(k+j) \in \gamma S] \geq p$, para cada $j \geq 1$.

Notar que cuando $\gamma = 1$, el $\gamma-$PIS se denomina simplemente PIS. Por otro lado, cuando $p = 1$, el $\gamma-$PIS es un conjunto $\gamma-$ISI, como se define en [4].

III. RESULADOS PRINCIPALES

Conjunto Probabilístico a Un Paso

En [4] el conjunto $\gamma-$Invariante para Identificación ($\gamma-$ISI) fue definido de forma que es equivalente a un $\gamma-$PIS con probabilidad $p = 1$. Este conjunto es utilizado como conjunto objetivo cuando el sistema se encuentra fuera de él, y como conjunto de identificación cuando el sistema está dentro. Dado que en este enfoque la naturaleza estocástica de la excitación persistente acotada no está siendo considerada, el conjunto objetivo que se obtiene es demasiado grande, conteniendo de forma conservadora la evolución completa del sistema excitado.

A continuación se introduce el concepto de *invarianza probabilística a un paso*, el cual será utilizado con fines de identificación. El siguiente conjunto es el conjunto que se utilizará como parámetro para formular el nuevo MPC para re-identificación.

[1] i.e., $v(k)$ toma valores aleatorios en el conjunto V tal que $v(k)$ no está correlacionado con $v(j)$ para $k \neq j$.

Definición 6. $\gamma-$Conjunto Invariante Probabilístico a Un Paso ($\gamma-$OSPIS) Sea $p\in(0,1]$ y $\gamma\in(0,1]$. El conjunto $S\subseteq X$ es un $\gamma-$invariante probabilístico a un paso con probabilidad p para el sistema (1), siendo $u(k)$ una excitación persistente en $V\subset U$, si y sólo si $x(k)\in S\Rightarrow \Pr[x(k+1)\in\gamma S]\geq p$.

Como antes, cuando $\gamma=1$ el $\gamma-$OSPIS se denomina simplemente OSPIS. Además, si $p=1$ el $\gamma-$OSPIS es un conjunto $\gamma-$ISI, como fue definido en [4].

Observación 1. Notar que por definición, un $\gamma-$PIS con probabilidad $p\in(0,1]$ es también $\gamma-$OSPIS con la misma probabilidad p para el mismo sistema. Aunque el recíproco no es necesariamente cierto.

El siguiente lema establece que un $\gamma-$OSPIS es también un $\gamma-$CIS. Esta propiedad juega un papel fundamental a la hora de probar la convergencia del MPC que se propone.

Lema 1. (OSPIS$\Rightarrow$CIS) Sea $p\in(0,1]$ y $\gamma\in(0,1]$. Supongamos que $S\subset X$ es un $\gamma-$OSPIS con probabilidad p para el sistema (1), siendo $u(k)$ una excitación persistente acotada por $V\subset U$. Entonces S es un $\gamma-$CIS para el mismo sistema asociado con el conjunto V.

Demostración. Sea $x(k)\in S$. Si se considera $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$, siendo $u(k)$ una excitación persistente acotada por $V\subset U$, entonces $\Pr[x(k+1)\in\gamma S]\geq p$. Debido a que $p>0$ y la excitación persistente $u(k)$ toma valores en $V\subset U$ entonces, existe $\hat{u}(k)\in V$ tal que $\hat{x}(k+1)=Ax(k)+B\hat{u}(k)\in\gamma S$. Por lo tanto S es un $\gamma-$CIS para el sistema (1) asociado con el conjunto $V\subset U$.

Aplicación al MPC

Cuando la entrada de excitación persistente es considerada para el cálculo del $\gamma-$OSPIS en el contexto de identificación, ésta debe pertenecer a un conjunto compacto más pequeño que U, pero con suficiente tamaño para excitar el sistema. Formalmente:

Definición 7. (Conjunto de Entradas de Excitación, EIS) Un conjunto C-propio[1] de entradas $U^t\subset U$, con suficiente tamaño para excitar el sistema (1), se denomina conjunto de entradas de excitación.

Al implementar el controlador MPC para la re-identificación, el conjunto objetivo utilizado es un conjunto C-propio, $S^t\subset X$, que es $\gamma-$OSPIS con probabilidad $p\in(0,1]$ para el sistema (1), asociado al conjunto de entradas de excitación persistentes $u(k)$ contenidas en el EIS $U^t\subset U$ definido anteriormente. La probabilidad p es elegida a priori según sea conveniente, y $\gamma\in(0,1]$.

Observación 2. Notar que el conjunto S^t puede ser un $\gamma-$OSPIS con probabilidad $p\in(0,1]$ para un proceso estocástico en particular, mientras que puede ser un $\gamma-$OSPIS con probabilidad $q\neq p$ para otros.

La idea principal en la formulación del MPC consiste en penalizar la distancia de los estados predichos al conjunto objetivo, para lo cual es necesaria la siguiente definición:

Definición 8. (Distancia de un Punto a un Conjunto) Sea V un conjunto C-propio sobre $\mathbb{R}^p$. La distancia desde el punto $x\in\mathbb{R}^p$ al conjunto V es una función $d_V:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ definida como

$$d_V(x)=\inf\left\{(x-\hat{x})^T M(x-\hat{x}):\hat{x}\in V\right\}$$

donde $M\in\mathbb{R}^{p\times p}$ es una matriz definida positiva.

Observación 3. Notar que $d_V(x)$ es una función continua y convexa, y $d_V(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^p$, y $d_V(x)=0$ si y sólo si $x\in V$.

La función costo para el controlador propuesta está basada en la mencionada distancia al conjunto OSPIS, S^t, con probabilidad $p\in(0,1]$, y está dada por:

$$V_N^{OSPIS}(x,S^t;\mathbf{u})=\sum_{j=0}^{N-1}[\alpha d_{S^t}(x(j))+\beta d_{U^t}(u(j))]$$

donde α y β son constantes positivas reales, $N\in\mathbb{N}$ es el horizonte de control y S^t es el *conjunto objetivo*, donde el sistema necesita ser ubicado para comenzar el proceso de identificación.

Para cualquier estado actual $x\in X_N$, donde X_N es el conjunto de estados que pueden ser llevados en forma factible al conjunto objetivo S^t, en N pasos (conjunto controlable

[1] Se llama conjunto C-propio a un conjunto convexo y compacto que contiene al origen en su interior.

en N pasos a S^t), el problema de optimización $P_N^{OSPIS}(x, S^t)$ a resolver está dado por:

Problema $P_N^{OSPIS}(x, S^t)$

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{u}} \quad V_N^{OSPIS}(x, S^t; \mathbf{u}) \\ &s.a. \\ &\quad x(0) = x, \\ &\quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j = 0, \ldots N-1 \\ &\quad x(j) \in X,\, u(j) \in U, \qquad j = 0, \ldots N-1 \\ &\quad x(N) \in S^t. \end{aligned}$$

En la formulación de este nuevo controlador MPC, $\mathbf{u} = \{u(0), \ldots, u(N-1)\}$ es la variable de optimización, mientras que el estado inicial x y el conjunto objetivo S^t son parámetros de la optimización. La última restricción es la restricción terminal que fuerza al estado terminal (al final de el horizonte de control) a pertenecer al conjunto S^t, evitando de esta manera el uso de un costo terminal de penalización. La ley de control que se deriva en la aplicación de la técnica de horizonte deslizante está dada por $\kappa_N(x, S^t) = u^o(0; x)$, donde $u^o(0; x)$ es el primer elemento de la secuencia de solución (óptima) $\mathbf{u}^o(x)$. De esta manera, el sistema a lazo-cerrado bajo esta ley de control MPC está descrito por $x(j) = \phi_{\kappa_N}(j; x, S^t) = A^j x + \sum_{i=0}^{j-1} A^{j-i-1} B \kappa_N(x, S^t)$. Ahora, se pueden establecer los siguientes teoremas:

Teorema 1. Sea $S^t \subseteq X$ un OSPIS con probabilidad $p \in (0,1]$ para el sistema (1), asociado a la excitación persistente $u(k)$ la cual está contenida en el EIS $U^t \subset U$. Entonces, el conjunto S^t es un Conjunto Invariante para el sistema a lazo cerrado $x(j) = \phi_{\kappa_N}(j; x, S^t)$ con $x(0) = x$ y $j \in \mathbb{I}$.

Demostración. Considere el estado $x \in S^t$. Entonces, dado que un OSPIS también es un CIS asociado al EIS U^t (por el lema 1), existe una secuencia de entradas $\hat{\mathbf{u}} = \{u(0), \ldots, u(N-1)\}$, con $u(j) \in U^t$, para toda $j = 0, \ldots, N-1$, tal que genera una secuencia de estados que permanecen en S^t, produciendo un costo nulo. Así, considerando la definición de la función distancia generalizada, la solución óptima del problema $P_N^{OSPIS}(x, S^t)$ tendrá la misma propiedad de $\hat{\mathbf{u}}$, es decir, generar un costo igual a $V_N^{OSPIS}(x, S^t; \hat{\mathbf{u}}) = 0$. Por otro lado, cualquier secuencia de entradas $\hat{\mathbf{u}}$ con $u(j) \notin U^t$, para algún $j = 0, \ldots, N-1$, producirá un costo $V_N^{OSPIS}(x, S^t; \hat{\mathbf{u}}) > 0$. Lo que significa que necesariamente $u^o(0; x) \in U^t$. Esto prueba que el costo del MPC $V_N^{OSPIS}(x, S^t; \mathbf{u})$ es nulo a lo largo de cada trayectoria que comienza en un estado inicial en el interior de S^t, y más aún, $u^o(0; x)$ es una entrada de control en U^t. De aquí se sigue que S^t es un Conjunto Invariante para el sistema a lazo-cerrado controlado por el MPC.

Teorema 2. Sea $S^t \subseteq X$ un OSPIS con probabilidad $p \in (0,1]$, para el sistema (1) asociado a la excitación persistente $u(k)$, la cual está contenida en el conjunto EIS $U^t \subset U$. Entonces, el conjunto S^t es localmente atractivo para el sistema a lazo cerrado $x(j) = \phi_{\kappa_N}(j; x, S^t)$, con $x(0) = x \in X_N$ y $j \in \mathbb{I}$.

Demostración. Como el conjunto S^t es un CIS asociado al EIS U^t (por el lema 1), la prueba sigue los mismos pasos que en [4].

Incluyendo el Modo Excitación

Los Teoremas 1 y 2 sugieren que una condición adicional puede incluirse en la función de costo propuesta, para conseguir una excitación persistente de entrada. De hecho, bajo las condiciones de excitación persistente, las trayectorias de estado permanecerán en el interior de S^t, la mayor parte del tiempo (con probabilidad p), y cuando la trayectoria de estados salga del conjunto S^t, el controlador MPC volverá a llevarlo hasta el conjunto S^t.

Para precisar la idea, se considera la siguiente función costo, que depende del tiempo actual k (k es el instante de tiempo en el cual se resuelve el problema de optimización MPC):

$$\begin{aligned} &V_N^{EXC}(x, S^t, u_{pe}(k); \mathbf{u}) = \\ &\qquad (1-\rho(x)) V_N^{OSPIS}(x, S^t; \mathbf{u}) + \rho(x) \left\| u(0) - u_{pe}(k) \right\|, \end{aligned}$$

donde $\rho(x) = 1$ si $x \in S^t$, y $\rho(x) = 0$ en caso contrario. Aquí, $u_{pe}(k)$ es una entrada de excitación persistente contenida en U^t (la dependencia del tiempo es necesaria para dejar explícito que se tiene una entrada de excitación persistente diferente y no correlacionada para cada tiempo k).

Para cualquier estado inicial $x \in X_N$, el problema de optimización $P_N^{EXC}(x, S^t, u_{pe}(k), k)$, a resolver en cada instante de tiempo k, está dado por:

Problema $P_N^{EXC}(x, S^t, u_{pe}(k), k)$

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{u}} \quad V_N^{EXC}(x, S^t, u_{pe}(k); \mathbf{u}) \\
&s.a. \\
&\qquad x(0) = x, \\
&\qquad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j = 0, \dots N-1 \\
&\qquad x(j) \in X,\, u(j) \in U, \qquad\quad j = 0, \dots N-1 \\
&\qquad x(N) \in S^t.
\end{aligned}$$

Notar que la función $\rho(x)$ es una función discontinua necesaria para cancelar la excitación persistente en caso que el sistema salga del conjunto S^t. Esto podría ocurrir por la presencia de una perturbación externa o incluso, con probabilidad menor a $(1-p)$, por la misma excitación persistente.

Si se considera que $T_{id} \in \square$ es la cantidad de datos necesaria para realizar una identificación apropiada del sistema (1), entonces se debe excitar el sistema al menos T_{id} veces para completar el proceso de identificación.

Un OSPIS con probabilidad p sólo asegura que el primer paso de cualquier trayectoria que comienza dentro del conjunto permanecerá allí con probabilidad mayor a p. En consecuencia, para asegurar la excitación del sistema se introduce el siguiente teorema, sujeto a la suposición que se enuncia a continuación, para formalizar las propiedades del controlador MPC propuesto.

Suposición 1. Sea S^t un OSPIS con probabilidad $p \in (0,1]$, para el sistema (1) siendo $u(k)$ una excitación persistente contenida en el conjunto EIS $U^t \subset U$. Si $\Re(S^t)$ es el conjunto alcanzable desde S^t, en un paso, asociado al conjunto EIS U^t, y $Q(S^t)$ es el conjunto controlable a S^t, en un paso, asociado al conjunto de entradas U, entonces se supone que $\Re(S^t) \subseteq Q(S^t)$.

Teorema 3. Supóngase que se cumple la suposición 1. Sea $S^t \subseteq X$ un OSPIS con probabilidad $p \in (0,1]$ para el sistema (1), siendo $u(k)$ una excitación persistente contenida en el conjunto EIS $U^t \subset U$. Entonces S^t es un PIS con probabilidad p, para el sistema a lazo cerrado $x(j) = \phi_{\kappa_N}(j; x, S^t)$, con $x(0) = x$ y $j \in \square$.

Demostración. Sea $x \in S^t$, en el tiempo k. Entonces $\rho(x) = 1$, y el costo del problema $P_N^{EXC}(x, S^t, u_{pe}(k), k)$ es

$$V_N^{EXC}(x, S^t, u_{pe}(k); \mathbf{u}) = \left\| u(0) - u_{pe}(k) \right\|$$

Entonces $u^o(0; x) = u_{pe}(k)$, donde $u_{pe}(k)$ es una excitación persistente contenida en U^t. Dado que S^t es un OSPIS con probabilidad p, entonces

$$\Pr[Ax + Bu^o(0; x) \in S^t] = \Pr[Ax + Bu_{pe}(k) \in S^t] \geq p$$

Esto ocurre cada vez que el sistema permanece en S^t. Por otro lado, si algún estado $\tilde{x}$ es llevado fuera de S^t, debe probarse que $\Pr[A\tilde{x} + B\kappa_N(\tilde{x}) \in S^t] \geq p$. De hecho, supóngase que $\tilde{x}$ está fuera del conjunto S^t en el tiempo $k+j$. Entonces $\tilde{x}$ pertenece a $\Re(S^t)$, el conjunto alcanzable desde S^t, en un paso, asociado al conjunto EIS U^t, ya que $u_{pe}(k+j-1) \in U^t$. Pero, $\Re(S^t) \subseteq Q(S^t)$ por la suposición 1, donde $Q(S^t)$ está asociado al conjunto de entrada $U \supset U^t$. Dado a que el sistema está fuera de S^t, será $\rho(\tilde{x}) = 0$, entonces el controlador MPC implementará la acción de control $u^o(0; \tilde{x})$, la cual lleva el estado nuevamente al conjunto S^t, en un paso. En otras palabras, dado que es posible hacer esto (ya que $\tilde{x} \in Q(S^t)$), y esta será la acción de control óptima (ya que produce costo nulo), entonces $\Pr[A\tilde{x} + Bu^o(0; \tilde{x}) \in S^t] = 1 \geq p$. Por otro lado, si se asume que $x \notin S^t$ al instante de tiempo k, el razonamiento es el mismo. Por lo tanto $\Pr[\phi_{\kappa_N}(j; x, S^t) \in S^t] \geq p$ para todo $j \in \square$, lo cual concluye la prueba.

Este último resultado es importante dado que muestra que un OSPIS es un PIS en el lazo cerrado. De esta forma se puede estimar qué tan frecuente el sistema estará siendo excitado apropiadamente bajo la ley de control MPC.

Teorema 4. Sea $S^t \subseteq X$ un OSPIS con probabilidad $p \in (0,1]$ para el sistema (1), siendo $u(k)$ una excitación persistente contenida en el conjunto EIS $U^t \subset U$. Entonces, para cualquier estado inicial $x \in S^t$, el sistema controlado por la ley de control MPC $\kappa_N(x,S^t)=u^o(0;x)$, estará excitado persistentemente con probabilidad p, dentro del conjunto S^t; es decir, $\Pr[x(j)=\phi_{\kappa_N}(j;x,S^t,\mathbf{u}_{pe})]\geq p$, para $j\in \mathbb{N}$, y siempre que $x(j)\in S^t$, la entrada persistente u_{pe} será aplicada al sistema. Más aún, para todo estado inicial $x\in X_N$, el sistema a lazo cerrado converge a S^t.

Demostración. i) Sea $x=x(0)\in S^t$. De acuerdo al teorema 3, el sistema a lazo cerrado permanecerá dentro de S^t con probabilidad mayor a p, y en este caso, la acción de control óptima estará dada por la entrada de excitación persistente u_{pe}.

ii) Sea $x=x(0)\in X_N\setminus S^t$. Entonces $\rho(x)=0$, y el problema $P_N^{EXC}(x,S^t,u_{pe},k)$ es equivalente al problema $P_N^{OSPIS}(x,S^t)$. Luego por el Teorema 2, se concluye la demostración.

Análisis Robusto

Nótese que el OSPIS S^t, que es un parámetro de la función costo del MPC propuesto, depende del modelo. Debido a que el escenario de excitación es necesario cuando hay una sospecha de que el modelo actual ya no es preciso, se necesita una garantía de que este conjunto cumple las condiciones de invarianza probabilística para cierta familia de modelos.

Se considerará para ello la siguiente descripción paramétrica de un modelo con incertidumbre:

$$x(k+1)=A(w)x(k)+B(w)u(k),\quad w\in W\subseteq \mathbb{R} \tag{2}$$

donde $A(w)$ y $B(w)$ son funciones afines de w; esto es, $A(w)=A+w\bar{A}$, $B(w)=B+w\bar{B}$ y w pertenece al conjunto C-propio $W\subset \mathbb{R}$.

Supóngase que el modelo nominal está dado por $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ ($w=0$), y el modelo real (desconocido) está dado por $x(k+1)=A(w_R)x(k)+B(w_R)u(k)$, para algún $w_R\in W$. Entonces, se cumple el siguiente teorema:

Teorema 5. Sea S^t un $\gamma-$OSPIS con probabilidad $p\in(0,1]$ y $\gamma\in[0,1)$, para el sistema nominal (1), siendo $u(k)$ una excitación persistente contenida en el conjunto EIS $U^t\subset U$. Entonces existe un conjunto C-propio $W\subset \mathbb{R}$ para el cual S^t es un OSPIS con probabilidad p para el sistema (2), para todo $w\in W$.

Demostración. Sea $x(k)\in S^t$. Si $u(k)$ es una excitación persistente contenida en U^t, entonces $\Pr[x(k+1)\in\gamma S^t]\geq p$. Como $\gamma<1$, entonces $r=\min_{s\in\partial S^t,x\in\gamma S^t}\|s-x\|_2>0$, donde ∂S^t es la frontera del conjunto S^t. Por la forma en que se tomó r, para todo $x(k+1)\in\gamma S^t$ se tiene que $B_r(x(k+1))\subseteq S^t$ [1], dado que S^t es convexo y cerrado.

Sea $\bar{x}(k+1)$ la solución para el sistema (2), es decir

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1)&=A(w)x(k)+B(w)u(k)\\&=(A+w\bar{A})x(k)+(B+w\bar{B})u(k)\\&=Ax(k)+Bu(k)+w(\bar{A}x(k)+\bar{B}u(k))\\&=x(k+1)+w(\bar{A}x(k)+\bar{B}u(k))\\&=x(k+1)+w\theta\end{aligned}$$

con $w\in W$, para algún $W\subset\mathbb{R}$.

Como θ pertenece al conjunto acotado $\Theta=\bar{A}X\oplus\bar{B}U$, existe $\bar{w}>0$ tal que $\|w\theta\|_2<r$ para todo $w\in[-\bar{w},\bar{w}]$. Luego

$$\|\bar{x}(k+1)-x(k+1)\|_2=\|w\theta\|_2<r,\quad w\in[-\bar{w},\bar{w}]$$

lo cual significa que $\bar{x}(k+1)\in B_r(x(k+1))$ para todo $w\in W=[-\bar{w},\bar{w}]$.

Como se dijo; si $x(k+1)\in\gamma S^t\Rightarrow B_r(x(k+1))\subseteq S^t$, por lo tanto $\bar{x}(k+1)\in S^t$ para todo $w\in W$. Lo que significa que

$$\Pr[\bar{x}(k+1)\in S^t]\geq\Pr[x(k+1)\in\gamma S^t]\geq p,\forall w\in W$$

lo que concluye la demostración.

IV. EJEMPLOS

Cálculo de los Conjuntos OSPIS

El objetivo de esta sección es comparar los OSPIS con los conjuntos Invariantes para Identificación (ISI, conjuntos objetivos presentados en [4]), y mostrar que obtenemos un conjunto objetivo de mucho menor tamaño.

Debe notarse que en este trabajo no se propuso un método para calcular un OPSIS. En su lugar, se utilizará el método

[1] $B_r(z)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\|z-x\|_2<r\right\}$

propuesto en [5], el cual calcula un conjunto PIS de forma politópica, que es también un OSPIS (ver observación 1).

Se utiliza un sistema estable de 2-estados con la estructura del sistema (1), con matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0.42 & -0.28 \\ 0.02 & 0.6 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.4 \end{bmatrix},$$

Las restricciones para el sistema están dadas por $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 17\}$ y $U = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty \leq 1.5\}$. El conjunto EIS tiene la forma $U^t = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty \leq 1.25\}$. Las entradas de excitación persistentes $u_{pe}(k) \sim N(\mu, \sigma^2)$ tienen una distribución normal y están en U^t, con $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 0.4$. Entonces $u_{pe}(k)$ condicionado a $u_{pe}(k) \in U^t$ tiene una distribución normal truncada.

Se calcula un OSPIS S_1 con probabilidad $p_1 = 0.9$, y el conjunto invariante para identificación (ISI) X^t, propuesto en [4], el cual es un OSPIS con probabilidad $p_2 = 1$ (ver Fig. 1).

Según la propiedad de intersección de conjuntos invariantes probabilístico presentada en [5], podemos encontrar un nuevo conjunto OSPIS $S^t = S_1 \cap X^t$ con probabilidad $p = p_1 + p_2 - 1 = 0.9$, manteniendo la misma probabilidad $p = 0.9$ del conjunto S_1 elegido inicialmente.

Observación 4. Nótese que $S^t \subseteq X^t$. Debido a que X^t es un ISI para U^t, se cumple que $\Re(S^t) \subseteq X^t$, donde $\Re(S^t)$ es el conjunto alcanzable asociado al EIS U^t. Si se demuestra que $X^t \subseteq Q(S^t)$ (ver Fig. 1), con el conjunto controlable $Q(S^t)$ asociado al conjunto de entradas U, entonces se cumple la Suposición 1.

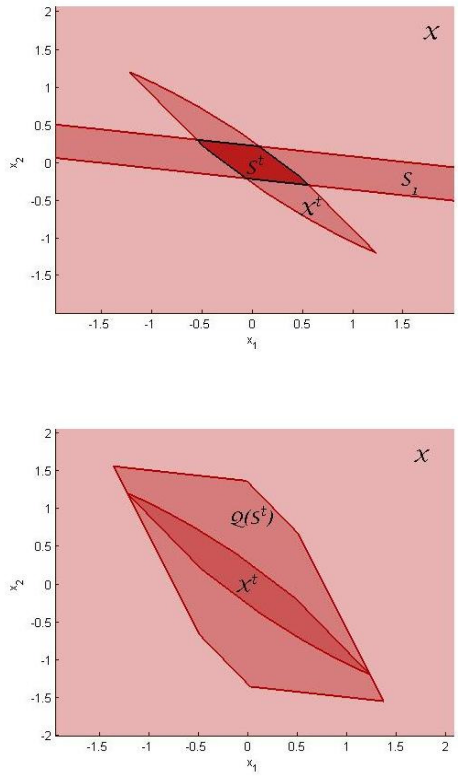


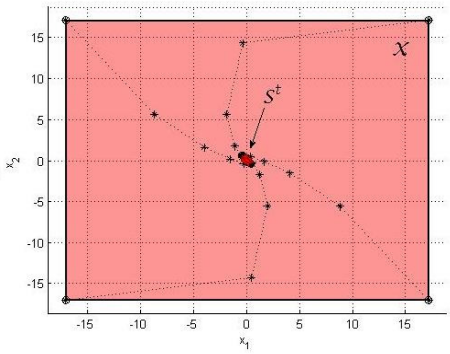
Figura 1. Intersección $S^t = S_1 \cap X^t$ (arriba). Conjunto controlable $Q(S^t)$ asociado al conjunto de entradas U (abajo).

Nótese que, considerando la naturaleza probabilística de las excitaciones, el conjunto objetivo del controlador S^t es sustancialmente más pequeño que el conjunto determinístico X^t, utilizado en [4].

Modelo Incluyendo el Modo Excitación

En esta sección se presentan algunas simulaciones para evaluar la evolución de los estados mediante la estrategia de control propuesta, con el mismo modelo presentado anteriormente. La Fig. 2 muestra cómo el sistema es llevado al conjunto objetivo S^t, y una vez allí, se activa el procedimiento de excitación hasta que este salga nuevamente. Cuando eso ocurre, se detiene el procedimiento de excitación y se activa el control propiamente dicho, dirigiendo el sistema nuevamente al conjunto OSPIS, en un paso. Esto se repite hasta que el proceso de identificación se termine.

En la Fig. 2 se observa que después de que el sistema entra a S^t por primera vez, deja al conjunto nueve veces sobre los cien pasos graficados, lo cual es consistente con la probabilidad $p \geq 0.9$ con la cual se calculo el OSPIS.



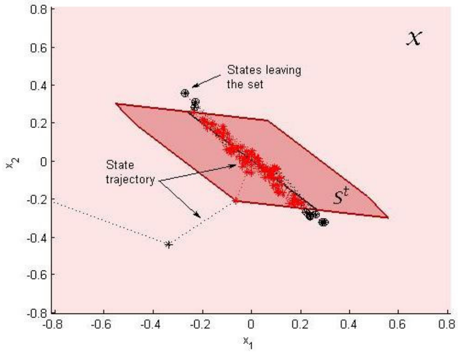


Figura 2. Evolución de los estados afuera (arriba) y adentro (abajo) de S^t .

A la hora de calcular el conjunto objetivo se aprovecha la naturaleza probabilística de proceso, y de esta forma, se ajusta el tamaño del OSPIS según las necesidades.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un nuevo controlador MPC para la re-identificación de sistemas a lazo cerrado, que garantiza la factibilidad recursiva y la estabilidad. El beneficio principal deriva de utilizar un conjunto objetivo reducido en tamaño, que es calculado teniendo en cuenta los conceptos de invarianza probabilística. De esta forma, la excitación persistente del sistema es asegurada, y se obtienen datos de entrada-salida no correlacionados. Más aún, desde el punto de vista de control, se obtiene una formulación mucho menos conservadora, la cual mejora considerablemente la aplicabilidad de la metodología propuesta.

REFERENCIAS

[1] H. Genceli and M. Nikolaou, "*New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification,*" AIChE Journal, vol. 42, pp. 2857–2868, 1996.

[2] E. Zacekova, S. Pravara, and M. Pcolka, "*Persistent excitation condition within the dual control framework,*" Jornal of Process Control, vol. 23, pp. 359–371, 2013.

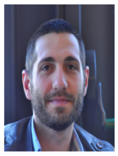
[3] A. Potts, R. Romano, and C. Garcia, "*Improving performance and stability of MPC relevant identification methods,*" Control Engineering Practice, vol. 22, pp.20–33, 2014.

[4] A. González, A. Ferramosca, G. Bustos, J. Marchetti, M. Fiacchini, and D. Odloak, "*Model predictive control suitable for closed-loop re-identification,*" Systems and Control Letters, vol. 69, pp. 23–33, 2014.

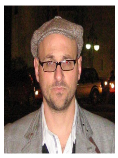
[5] E. Kofman, J. D. Dona, and M. Seron, "*Probabilistic set invariance and ultimate boundedness,*" Automatica, vol. 48, pp. 2670–2676, 2012.

[6] L. Ljung, *System identification-theory for the user*, 2nd ed. Prentice-Hall, 1999.

Alejandro Anderson is currently a Ph.D. student in Engineering – mention: Computational Intelligence, Signals and Systems – in the Faculty of Engineering and Water Sciences at National University of Litoral, Santa Fe, Argentina. He received his degree in Applied Mathematics from the National University of Litoral – Faculty of Chemical Engineering, in 2012. His research interests include Robust Predictive Control algorithms suitable for Identification on closed-loop Systems, invariance, and stability.



Antonio Ferramosca was born in Maglie (LE), Italy, in 1982. He received his degree in Computer Science Engineering from the University of Pavia (Italy) in 2006, and the Ph.D. degree in Automation, Robotics and Telematics, with full marks and honors (summa cum laude), from the University of Seville (Spain) in 2011. He visited the Department of Chemical Engineering of the University of Wisconsin, Madison, USA, (from August 2009 to February 2010), and the Department of Process Control of the Institute of Technological Development for the Chemical Industry (INTEC, CONICET), Santa Fe, Argentina, (from September 2010 to March 2011), both as a guest researcher. He is currently Assistant Researcher at the Argentine National Scientific and Technical Research Council (CONICET). He is author and co-author of more than 30 publications including book chapters, journal papers, and conference papers. His research interests include Model Predictive Control, economic optimization, distributed control, control of constrained systems, stability, invariance, robust control, and process control.



Alejandro H. González is a Titular Professor of Industrial Engineering at National University of Litoral (UNL), and Assistant Researcher at the Argentine National Scientific and Technical Research Council (CONICET). After getting his Ph.D from UNL in 2006, he became Postdoctoral fellow at the Chemical Engineering Department at Universidade de São Paulo, São Paulo-Brazil, under the supervision of Prof. Darci Odloak (2007-2008) and, subsequently, at the "Departamento de Ingeniería y Automática de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla, Seville-Spain (2005–2006). After concluding his Postdoctoral activities, he returned to Argentine to work as a researcher in the Process Control Group of INTEC (CONICET-UNL) and Professor at the University, as well as to supervise Ph.D. research projects and students at INTEC (CONICET-UNL). His research interests include Advanced Control, Model Predictive Control (MPC) design, Control of Constrained System and Invariant Sets for Linear Systems.

Ernesto Kofman received the Electronics Engineering degree in 1999 and the Ph.D. degree in 2003, both from the Universidad Nacional de Rosario, Argentina. He currently works as an adjoint professor at the Universidad Nacional de Rosario, Argentina, and holds a research position from the Argentine Research Council (CONICET). His research interests include discrete event and hybrid systems simulation, numerical methods for ordinary differential equations and quantized and sampled-data control systems.