

Cotas Finales y Conjuntos Invariantes Probabilísticos en Sistemas Continuos No Lineales

Noelia Pizzi
CIFASIS-CONICET
FCEIA-UNR
Rosario, Argentina
pizzi@cifasis-conicet.gov.ar

Ernesto Kofman
CIFASIS-CONICET
FCEIA - UNR
Rosario, Argentina
kofman@fceia.unr.edu.ar

José De Doná
The University of Newcastle
Newcastle, Australia
jose.dedona@newcastle.edu.au

Maria Seron
The University of Newcastle
Newcastle, Australia
maria.seron@newcastle.edu.au

Resumen—En este artículo se extienden los conceptos de cotas finales y conjuntos invariantes probabilísticos para sistemas continuos no lineales en presencia de ruido blanco Gaussiano. Además, en base al uso de funciones de Lyapunov, se brindan herramientas para su caracterización y se propone una metodología de diseño de control no lineal que permite, bajo ciertas hipótesis, garantizar que un sistema no lineal a lazo cerrado tenga una cota final probabilística deseada.

Index Terms—ecuaciones diferenciales estocásticas, cotas finales probabilísticas.

I. INTRODUCCIÓN

Los conceptos de cota final y conjuntos invariantes tienen un rol fundamental en la teoría de control, ya que los mismos reemplazan la idea de estabilidad de los puntos de equilibrio frente a la presencia de perturbaciones no evanescentes [1]. Asociados a estos conceptos, aparecen diversos problemas y aplicaciones en la teoría de control [2], entre los que podemos mencionar el de la caracterización de dichos conjuntos [3]–[5], el de diseño de control robusto para obtener cotas finales [6], [7], y el uso de estos conjuntos para detectar fallas [8], [9].

El enfoque tradicional para determinar cotas finales y conjuntos invariantes se basa en el uso de funciones de Lyapunov [1], [3], donde los conjuntos son estimados mediante una superficie de nivel de una función de Lyapunov sobre la cual se puede garantizar que la derivada es negativa (debido a la perturbación, no se puede garantizar que ésta sea negativa en el interior del conjunto delimitado por dicha superficie). Otro enfoque utiliza la descomposición modal de un sistema lineal para hacer una estima por componentes tanto de la cota final como de los conjuntos invariantes [4], [5]. Ambos enfoques pueden ser luego utilizados para diseñar controles que garanticen cotas finales deseadas.

Un problema con los conceptos de cota final y conjuntos invariantes es que, frente a la presencia de perturbaciones no acotadas (como el ruido blanco Gaussiano), estos conjuntos ya no existen porque con cierta probabilidad el estado puede alcanzar valores arbitrariamente grandes. Para subsanar esta dificultad, en [10] se extendieron estos conceptos, definiendo los de *cota final probabilística* (PUB, por *Probabilistic Ultimate Bound*) y *conjunto invariante probabilístico* (PIS, por *Probabilistic Invariant Set*). Estas definiciones se concibieron

originalmente para sistemas de tiempo discreto, pero fueron luego extendidas a sistemas de tiempo continuo [11].

Una cota final probabilística es un conjunto hacia el cual las trayectorias del estado convergen y permanecen (al igual que en el caso determinístico), pero la permanencia se da con cierta probabilidad (determinada por un parámetro $p < 1$). Esto es, para tiempos suficientemente grandes, la probabilidad de que el estado esté en el conjunto en cuestión es de al menos p . De manera similar, si una trayectoria se inicia en el interior de un conjunto invariante probabilístico, en cualquier instante futuro hay una probabilidad al menos p de que el estado esté en el interior de dicho conjunto.

Además de las definiciones de estos conjuntos, en [10], [11] se dan fórmulas para su caracterización (basadas en descomposición modal) que se han utilizado para diseño de control [11], [12] y para detección de fallas [13]. Sin embargo, todas las definiciones, fórmulas y aplicaciones están limitadas a sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

En este trabajo proponemos entonces extender los conceptos de cotas finales y conjuntos invariantes probabilísticos para casos no lineales, brindando herramientas para su caracterización y desarrollando una estrategia de diseño de control que permite, bajo ciertas condiciones, garantizar que el sistema a lazo cerrado tenga una cota final preestablecida.

II. PRELIMINARES

En esta sección presentamos los conceptos y herramientas previas en los que se basa el resto del trabajo.

II-A. Cotas Finales y Conjuntos Invariantes Probabilísticos en Sistemas Lineales

Los sistemas de tiempo continuo en presencia de ruido blanco Gaussiano no se pueden representar formalmente como ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que deben expresarse como *ecuaciones diferenciales estocásticas*. Para el caso lineal y estacionario, las mismas pueden tomar la siguiente forma:

$$dx(t) = Ax(t)dt + Hdw(t) \quad (1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y el vector de perturbación $w(t) \in \mathbb{R}^k$ es un proceso de Wiener con covarianza incremental $cov[dw(t)] = \Sigma_w dt$. Aquí, $\Sigma_w \in \mathbb{R}^{k \times k}$ es la matriz de covarianza del proceso de perturbación. Asumimos

además que el sistema nominal es asintóticamente estable (es decir, A es Hurwitz).

Asociada al sistema (1), se define la cota final probabilística como sigue:

Definición 1 (Cota Final Probabilística). *Sea $0 < p \leq 1$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Decimos que S es una cota final probabilística con probabilidad p del sistema (1) si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $T = T(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que la probabilidad $P[x(t) \in S] \geq p$ para cada $t \geq t_0 + T$.*

Para la definición de PIS, primero definiremos el producto de un escalar $\gamma \geq 0$ y un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ como $\gamma S = \{\gamma x : x \in S\}$.

Notar que cuando $0 < \gamma \leq 1$, y asumiendo que S es un conjunto estrellado respecto al origen, implica que $\gamma \cdot S \subseteq S$.

Definición 2 (Conj. γ -Invariante Probabilístico). *Sea $0 < p \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto estrellado respecto al origen. Decimos que S es un Conjunto γ -Invariante Probabilístico (γ -PIS) con probabilidad p para el sistema (1) si para cualquier $x(t_0) \in \gamma S$ la probabilidad $P[x(t) \in S] \geq p$ para cada $t > t_0$.*

Notar que mientras la definición de PUB es totalmente análoga a la de cota final determinística (en cuyo caso $p = 1$), en el caso del PIS, la definición requiere que la condición inicial esté no sólo dentro del conjunto S , sino dentro de un conjunto más chico γS (notar que este conjunto inicial se puede hacer tan cercano a S como se desee tomando γ cercano a 1). Esto se debe a que para instantes arbitrariamente cercanos al inicial, la dinámica está dominada por el ruido blanco de tiempo continuo (que tiene ancho de banda infinito). De esta forma, la probabilidad de salir de un conjunto dado cuando la condición inicial está en el borde del mismo es independiente del tamaño de dicho conjunto. Una explicación más extensa de este hecho se puede encontrar en [11].

II-B. Caracterización de PUB y PIS

En [11] se desarrollan fórmulas para determinar tanto los PUB como los PIS asociados al sistema lineal (1). En el caso del PUB, la caracterización se basa en calcular $\Sigma_x(t)$, la covarianza del estado $x(t)$, cuyo valor cuando $t \rightarrow \infty$ queda determinado por la siguiente ecuación de Lyapunov.

$$A \cdot \Sigma_x + \Sigma_x \cdot A^T = -H \Sigma_w H^T \quad (2)$$

A partir de conocer la covarianza de $x(t)$ para $t \rightarrow \infty$, luego es relativamente sencillo estimar la cota final probabilística, resultando una fórmula cerrada que depende del parámetro p .

En el caso de los conjuntos invariantes probabilísticos, la caracterización se basa en diagonalizar el sistema y luego estimar un conjunto invariante para cada componente del estado en las coordenadas diagonales.

II-C. Extensión de los conceptos a sistemas no lineales

Las definiciones de PUB y PIS no suponen ninguna restricción que eviten extenderlas a sistemas no lineales. Sin

embargo, las técnicas utilizadas para estimar dichos conjuntos no pueden extenderse. En el caso de los PUBs, el cómputo se basa en calcular la matriz de covarianza, lo que no es posible en casos no lineales generales. En el caso del PIS, en tanto, la caracterización se basa en la diagonalización, lo que tampoco es posible generalmente en sistemas no lineales.

Hay sin embargo una herramienta que resultará útil. Aunque no es posible en general encontrar la covarianza del estado x en una ecuación diferencial estocástica no lineal, si se aplica al estado una función escalar definida positiva $V(x)$ (candidata de Lyapunov), es posible encontrar cotas sobre el valor esperado de dicha función $E[V(x)]$ lo que brinda indirectamente información sobre la evolución de $x(t)$. Esta es de hecho la herramienta utilizada por los distintos trabajos que definen y utilizan el concepto de *estabilidad ruido-estado* (NSS, por *Noise to State Stability*) [14]–[16].

La propiedad de estabilidad ruido-estado garantiza que en un proceso como el de la Ec.(1) (pero que generalmente es no lineal), siempre se puede encontrar una región (dependiente de la covarianza del ruido y de la condición inicial) tal que la probabilidad de que el estado salga de dicha región se puede hacer arbitrariamente pequeña. Luego, si un sistema es NSS, esto implica que se puede encontrar un PUB y un γ -PIS para cualquier probabilidad p , esto es, es una propiedad más fuerte que la de la existencia de PUB y γ -PIS.

En la siguiente sección definiremos entonces los conceptos de PUB y PIS para sistemas no lineales y brindaremos herramientas para su caracterización en base al uso de funciones de Lyapunov de forma similar a la utilizada en la determinación de las propiedades de NSS en [15], [16].

III. COTAS FINALES Y CONJUNTOS INVARIANTES PROBABILÍSTICOS EN SISTEMAS NO LINEALES

III-A. Sistemas Estocásticos No Lineales

Para extender los conceptos de PUB y PIS a los casos no lineales, consideramos un sistema de la forma

$$dx(t) = f(x)dt + h(x)dw(t) \quad (3)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ son funciones localmente Lipschitz y la perturbación $w(t)$ es un proceso de Wiener con covarianza incremental $cov[dw] = I_{k \times k} dt$. Notar que esto último no implica pérdida de generalidad ya que el efecto de una perturbación con covarianza incremental $\Sigma_w dt$ puede modelarse de forma equivalente reemplazando $h(x)$ por $\tilde{h}(x) \triangleq h(x) \sqrt{\Sigma_w}$.

Para este sistema entonces, definimos la cota final probabilística (PUB) de manera idéntica a la Definición 1. Asimismo, definimos el concepto de conjunto invariante probabilístico (γ -PIS) según la Definición 2.

Una diferencia esencial entre la definición de cota final probabilística y su contraparte determinista en el caso de sistemas no lineales es que el PUB es necesariamente una propiedad global, hacia la cual se converge desde cualquier estado inicial en \mathbb{R}^n , mientras que en el caso determinista alcanza con garantizar la existencia de una región de atracción. Esto último no es en general posible en el caso estocástico ya

que, con cierta probabilidad, el estado puede salir de la región de atracción y a partir de ese momento no habría ninguna garantía respecto a la probabilidad de que el estado vuelva al PUB.

III-B. Caracterización de conjuntos probabilísticos

Antes de describir los resultados que permiten caracterizar las cotas finales y los conjuntos invariantes definimos el siguiente operador:

Definición 3. Dada una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva y dos veces continuamente diferenciable, se define el generador de (3) que actúa sobre la función V como la aplicación $\mathcal{L}[V] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{L}[V](x) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h(x) \right). \quad (4)$$

Los próximos resultados expresan los conjuntos PUB y γ -PIS en base a una función de Lyapunov cuyo generador $\mathcal{L}[V]$ satisface cierta condición que permite probar que una vez que las trayectorias del sistema (3) entran en un conjunto limitado por una superficie de nivel de V , permanecen allí para todo tiempo con una probabilidad preestablecida.

Teorema 1 (Caracterización de PUB). Sea $0 < p < 1$ una probabilidad y sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva dos veces continuamente diferenciable con $V(0) = 0$. Supongamos que existen una función convexa $\alpha : \mathbb{R}_{+,0} \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$ de clase \mathcal{K}_{∞} y una constante $\beta > 0$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}[V](x) \leq -\alpha(V(x)) + \beta. \quad (5)$$

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1 - p} \right\}$$

es un PUB con probabilidad p para el sistema de Ec. (3).

Demostración. Usando la regla de diferenciación de Itô en la Ec. (3) para $V(x(t))$, obtenemos

$$\begin{aligned} dV(x(t)) &= \left[\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h(x) \right) \right] dt + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial x} h(x) dw(t) \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}[V](x(s)) ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \frac{\partial V}{\partial x}(x(s)) h(x(s)) dw(s) \end{aligned}$$

Calculamos la esperanza a ambos lados de la ecuación anterior, usando la Ec. (5) y teniendo en cuenta que $w(t)$ es un proceso de Wiener, resulta

$$\begin{aligned} E[V(x(t))] &= E[V(x(t_0))] + E \left[\int_{t_0}^t \mathcal{L}[V](x(s)) ds \right] \\ &\leq E[V(x(t_0))] + E \left[- \int_{t_0}^t \alpha(V(x(s))) ds + \int_{t_0}^t \beta ds \right] \\ &= E[V(x(t_0))] - \int_{t_0}^t E[\alpha(V(x(s)))] ds + \int_{t_0}^t \beta ds. \end{aligned}$$

En la última igualdad aplicamos el hecho de que el valor esperado y la integración pueden intercambiarse para un proceso no negativo (resultado derivado del Teorema de Fubini). Como α es convexa, por la desigualdad de Jensen resulta

$$E[V(x(t))] \leq E[V(x(t_0))] + \int_{t_0}^t (-\alpha(E[V(x(s))]) + \beta) ds. \quad (6)$$

Supongamos que $E[V(x(t))] > \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$. Por ser α continua y estrictamente creciente, existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\alpha(\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon) = \beta + \tilde{\varepsilon}$, y por consiguiente $\alpha(E[V(x(t))]) \geq \beta + \tilde{\varepsilon}$ para todo $t \geq t_0$. Entonces, volviendo a la desigualdad (6), resulta

$$\begin{aligned} E[V(x(t))] &\leq E[V(x(t_0))] + \int_{t_0}^t (-\beta + \tilde{\varepsilon} + \beta) ds \\ &= E[V(x(t_0))] - \tilde{\varepsilon}(t - t_0), \end{aligned}$$

que para t suficientemente grande resulta más pequeño que $\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, contradiciendo la suposición inicial y mostrando que la condición $E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$ es alcanzada eventualmente. Luego, existe $t_1 > t_0$ para el cual $E[V(x(t_1))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$.

Tomamos $\varepsilon_1 > 0$ y suponemos ahora que existe $t_3 > t_1$ para el cual $E[V(x(t_3))] > \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon + \varepsilon_1$. Sea t_2 el último tiempo de salida de $E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, es decir,

$$t_2 = \sup\{t < t_3 : E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon\}$$

Entonces, en el período (t_2, t_3) tenemos que $E[V(x(t))] \geq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, y usando la ecuación correspondiente a la Ec. (6) y un razonamiento análogo al hecho anteriormente, resulta

$$\begin{aligned} E[V(x(t))] &\leq E[V(x(t_2))] + \int_{t_2}^t (-\alpha(E[V(x(s))]) + \beta) ds \\ &= E[V(x(t_2))] - \tilde{\varepsilon}(t - t_2) \end{aligned}$$

contradiendo la suposición $E[V(x(t_3))] \geq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon + \varepsilon_1$.

Luego, tenemos que $E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$ para todo $t \geq t_1$. Usando la desigualdad de Markov, obtenemos

$$P \left[V(x) \geq \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1 - p} \right] \leq \frac{E[V(x)]}{\frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1 - p}} \leq 1 - p$$

y, por lo tanto,

$$P[x(t) \in S] = P \left[V(x) \leq \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon_1}{1 - p} \right] \geq p$$

completando la prueba. \square

El siguiente resultado, en tanto, permite caracterizar un conjunto γ -PIS.

Teorema 2 (Caracterización de PIS). *Sea $0 < p < 1$ una probabilidad y sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva dos veces continuamente diferenciable con $V(0) = 0$. Supongamos que existen una función convexa $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ de clase \mathcal{K}_∞ y una constante $\beta > 0$ tales que $\mathcal{L}[V](x) \leq -\alpha(V(x)) + \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $0 < \gamma < 1$ constante y supongamos que existe $V_0 > \alpha^{-1}(\beta)$ tal que*

$$V\left(\frac{x}{\gamma}\right) \leq \frac{V_0}{1-p} \implies V(x) \leq V_0 \quad (7)$$

y además,

$$V(x) \leq \frac{V_0}{1-p} \implies V(cx) \leq \frac{V_0}{1-p} \forall c \in [0, 1] \quad (8)$$

Entonces, el conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \frac{V_0}{1-p} \right\}$$

es un γ -PIS con probabilidad p para el sistema de Ec. (3).

Demostración. Asumimos que $x(t_0) = x_0 \in \gamma S$. Entonces,

$$V\left(\frac{x_0}{\gamma}\right) \leq \frac{V_0}{1-p} \implies V(x_0) \leq V_0$$

De la Ec.(6), con $E[V(x_0)] = V_0$ y usando el hecho que α es estrictamente creciente y $V_0 > \alpha^{-1}(\beta)$ (lo que es equivalente a $\alpha(V_0) > \beta$) y siguiendo un razonamiento análogo a la prueba del teorema anterior, resulta que $E[V(x(t))] \leq V_0$ para todo $t \geq t_0$. Luego, usando la desigualdad de Markov,

$$P\left[V(x) \geq \frac{V_0}{1-p}\right] \leq \frac{E[V(x(t))]}{\frac{V_0}{1-p}} \leq 1-p$$

Entonces,

$$P[x(t) \in S] = 1 - P[x(t) \notin S] = 1 - P\left[V(x) \geq \frac{V_0}{1-p}\right] \geq p$$

lo que concluye la prueba. \square

Teniendo en cuenta la fórmula para caracterizar cota final probabilística no lineal provista por el Teorema 1, veremos en la siguiente sección una metodología de diseño de control que garantiza la existencia de un PUB bajo ciertas condiciones.

IV. DISEÑO DE CONTROL CON GARANTÍA DE PUB

El siguiente resultado permite diseñar un controlador que garantiza una cota final probabilística. La idea está en parte inspirada en la técnica de diseño propuesta en [6] para cotas finales determinísticas, donde se utiliza una ley de control continua que compensa el aporte del término de perturbación a la derivada de la función de Lyapunov en cierta región del espacio de estados. De todas formas, en el contexto probabilístico la formulación es esencialmente distinta ya que la caracterización de la cota final tiene una expresión diferente

donde el término que agrega el ruido en la derivada de la función de Lyapunov no depende del gradiente de V , sino de la derivada segunda como se desprende de la expresión (4). Por otro lado, la existencia del PUB requiere que las condiciones se cumplan de manera global, lo que cambia esencialmente las hipótesis y el enfoque de diseño.

Teorema 3. *Sea el sistema*

$$dx(t) = f(x)dt + g(x)udt + h(x)dw(t) \quad (9)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ son funciones suaves, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control y la perturbación $w(t)$ es un proceso de Wiener con matriz de covarianza incremental $\text{cov}[dw] = I_{k \times k} dt$.

Supongamos que existen funciones V definida positiva y dos veces continuamente diferenciable, $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ de clase \mathcal{K}_∞ convexa y $K_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)K_1(x)] \leq -\alpha(V(x)). \quad (10)$$

Si además, dado $c > 0$ y $0 < p < 1$, para todo x tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 0 \quad (11)$$

se cumple que

$$\alpha(c(1-p)) > \left| \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x) h(x) \right) \right|, \quad (12)$$

entonces existe una ley de control $u(t) = K(x)$ tal que $S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ es un PUB de (9) con probabilidad p .

Demostración. Definimos

$$r(x) \triangleq \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x) h(x) \right)$$

y sea $\varepsilon > 0$, arbitrariamente chico, tal que

$$|r(x)| < \alpha(c(1-p) - \varepsilon) \triangleq \beta \quad \forall x : \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 0 \quad (13)$$

dicho ε existe por la continuidad de α y la desigualdad (12) sujeta a la condición (11).

Luego, podemos tomar $\rho > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\| \leq \rho \implies |r(x)| \leq \beta. \quad (14)$$

Notar que tal ρ existe debido a la Ec.(13).

Proponemos entonces la ley de control $K(x) = K_1(x) + K_2(x)$ con

$$K_2(x) = \begin{cases} \frac{-g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}^T(x) r(x)}{\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\|^2} & \text{si } \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\| > \rho, \\ \frac{-g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}^T(x) r(x)}{\rho^2} & \text{si } \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\| \leq \rho. \end{cases} \quad (15)$$

Calculando luego el operador \mathcal{L} para V , resulta

$$\mathcal{L}[V](x) = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)K_1(x) + g(x)K_2] + r(x)$$

Teniendo en cuenta (10), se tiene

$$\mathcal{L}[V](x) \leq -\alpha(V(x)) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) K_2 + r(x)$$

y usando (15) para $\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\| > \rho$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V](x) &\leq -\alpha(V(x)) - \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\|^2 \frac{r(x)}{\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\|^2} + r(x) \\ &= -\alpha(V(x)) \leq -\alpha(V(x)) + \beta. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\| \leq \rho$, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V](x) &\leq -\alpha(V(x)) - \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\|^2 \frac{r(x)}{\rho^2} + r(x) \\ &\leq -\alpha(V(x)) + \left[1 - \frac{\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right\|^2}{\rho^2} \right] r(x) \\ &\leq -\alpha(V(x)) + |r(x)| \leq -\alpha(V(x)) + \beta. \end{aligned}$$

donde hemos usado la condición (14) en la última desigualdad.

Así, obtenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}[V](x) \leq -\alpha(V(x)) + \beta.$$

Notar que $\alpha^{-1}(\beta) = c(1-p) - \varepsilon$ implica que

$$c = \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1-p},$$

entonces el Teorema 1 garantiza que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$$

es un PUB con probabilidad p del sistema (9) con ley de realimentación $u = K(x)$. \square

V. EJEMPLO

Veamos un ejemplo de aplicación de los resultados anteriores. Consideremos el siguiente sistema:

$$dx = \begin{bmatrix} -x_1 - x_1 x_2 \\ x_1 x_2 - x_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u dt + \begin{bmatrix} x_1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dw \quad (16)$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener 2-dimensional cuya matriz de covarianza es la matriz identidad. Supongamos que deseamos que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq c\}$, con $c = 1$, sea un PUB del sistema (16) con probabilidad $p = 0.9$.

Consideramos la función $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, y sean $\alpha(V) = 2V$ y $K_1(x) = x_1 x_2 - x_2^2$, entonces la desigualdad (10) del Teorema 3 se satisface:

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)K_1(x)] = -x_1^2 - x_2^2 \leq -\alpha(V(x))$$

Para verificar que la condición (12) es válida calculamos

$$\frac{\partial V}{\partial x} g(x) = x_1$$

y

$$r(x) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x) h(x) \right) = \frac{x_1^2 + 0.25}{2},$$

y luego, para $\frac{\partial V}{\partial x} g(x) = x_1 = 0$ se cumple que $r(x) = 0.125 < \alpha(c(1-p)) = 0.2$, por lo que la condición se satisface.

Notar además que adoptando $\rho < \sqrt{0.15}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta \triangleq \alpha(c(1-p) - \varepsilon)$ cumple la Ec. (14), por lo que concluimos que la ley de control $u(t) = K(x) = K_1(x) + K_2(x)$ con

$$K_2(x) = \begin{cases} \frac{-x_1(x_1^2 + 0.25)}{2x_1^2} & \text{si } |x_1| > \rho, \\ 0 & \\ \frac{-x_1(x_1^2 + 0.25)}{2\rho^2} & \text{si } |x_1| \leq \rho. \end{cases}$$

asegura que el conjunto S es un PUB de (16) a lazo cerrado, con ley de realimentación $u = K(x)$, con probabilidad 0.9.

Para verificar los resultados, realizamos simulaciones del sistema a lazo cerrado con la ley de control calculada a partir de distintas condiciones iniciales. La Figura 1 muestra dos de las trayectorias obtenidas en el espacio de estados junto con el PUB brindado.

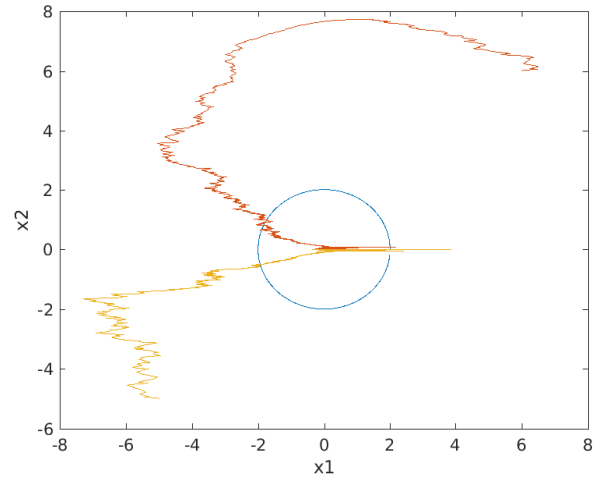


Figura 1. Cota final probabilística y trayectorias del sistema no lineal a lazo cerrado.

Como verificación adicional, realizamos 1000 simulaciones del sistema y para cada valor de t de la forma $t_k = 0.001k$ con k entre 0 y 20000 calculamos la *tasa de escape*. Este valor está dado por el número de veces que $x(t_k)$ se encuentra fuera del PUB dividido el número de simulaciones (1000). Los resultados se muestran en la Figura 2.

En este caso podemos ver que a partir de $t \approx 2.5$ la tasa de escape observada es menor que la probabilidad de escape del PUB que puede calcularse como $p_{\text{esc}} = 1 - p = 0.1$. Más aún, a partir de $t \approx 5$ la tasa de escape se mantiene siempre menor que 0.022, lo que da la pauta que el diseño de control es algo conservador.

Hay varios motivos por lo cual el diseño resulta conservador. Uno de los más importantes es que la caracterización de la cota final que brinda el Teorema 1 se basa en la desigualdad

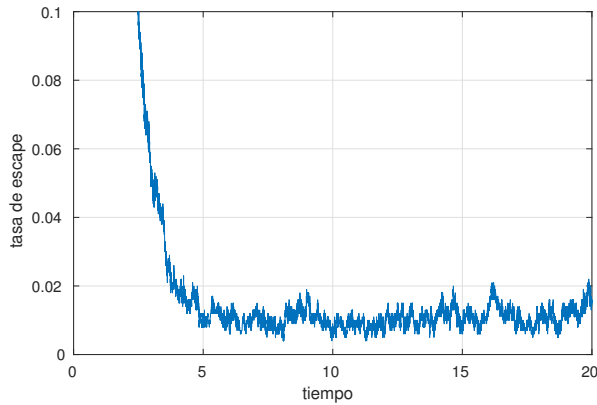


Figura 2. Tasa de escape del PUB para el sistema no lineal a lazo cerrado.

de Markov, que sólo tiene en cuenta el valor esperado del proceso $V(x(t))$ sin utilizar información sobre la varianza ni los momentos de orden superior.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se extendieron los conceptos de cota final y conjunto invariante probabilísticos para sistemas no lineales y se desarrollaron herramientas para su caracterización. Además, se formuló una estrategia de diseño de control que bajo ciertas condiciones, permite que el sistema a lazo cerrado tenga una cota final probabilística deseada. Se presentó también un ejemplo ilustrativo de esta técnica de diseño.

En cuanto a trabajo futuro, resta en primer lugar extender estos conceptos y herramientas para sistemas no lineales de tiempo discreto. Por otro lado, es de esperar que la herramienta de diseño de control robusto pueda mejorarse al menos para ciertos casos particulares, ya que en la propuesta actual es algo restrictiva debido a que, en general, se parte de un diseño ya realizado para el sistema nominal (se asume conocido $K_1(x)$ y $V(x)$), y luego sólo se agrega un término adicional $K_2(x)$ que compensa el término impuesto por el ruido.

REFERENCIAS

- [1] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3rd ed. Prentice Hall, 2002.
- [2] F. Blanchini, "Set invariance in control – a survey," *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747–1767, 1999.
- [3] M. L. Brockman and M. Corless, "Quadratic boundedness of nominally linear systems," *International Journal of Control*, vol. 71, no. 6, pp. 1105–1117, 1998.
- [4] E. Kofman, "Non-conservative ultimate bound estimation in LTI perturbed systems," *Automatica*, vol. 41, no. 10, pp. 1835–1838, October 2005.
- [5] H. Haimovich, E. Kofman, and M. Seron, "Systematic ultimate bound computation for sampled-data systems with quantization," *Automatica*, vol. 43, no. 6, pp. 1117–1123, 2007.
- [6] M. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, pp. 1139–1144, 1981.
- [7] E. Kofman, M. Seron, and H. Haimovich, "Control Design with Guaranteed Ultimate Bound for Perturbed Systems," *Automatica*, vol. 44, no. 7, pp. 1815–1821, 2008.

- [8] C. Ocampo-Martínez, J. A. De Doná, and M. Seron, "Actuator fault-tolerant control based on set separation," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 24, no. 12, pp. 1070–1090, 2010.
- [9] F. Stoican and S. Olaru, *Set-theoretic Fault-tolerant Control in Multi-sensor Systems*. John Wiley & Sons, 2013.
- [10] E. Kofman, J. De Doná, and M. Seron, "Probabilistic Set Invariance and Ultimate Boundedness," *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2670–2676, 2012.
- [11] E. Kofman, M. Seron, J. De Doná, and N. Pizzi, "Continuous-Time Probabilistic Ultimate Bounds and Invariant Sets: Computation and Assignment," *Automatica*, vol. 71, pp. 98–105, 2016.
- [12] A. Anderson, A. González, A. Ferramosca, A. D’Jorge, and E. Kofman, "Robust mpc suitable for closed-loop re-identification, based on probabilistic invariant sets," *Systems & Control Letters*, vol. 118, pp. 84–93, 2018.
- [13] N. Pizzi, E. Kofman, M. Seron, and J. De Doná, "Actuator fault diagnosis using probabilistic ultimate bounds," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 6, pp. 2550–2555, 2016.
- [14] H. Deng, M. Krstić, and R. Williams, "Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 8, pp. 1237–1253, 2001.
- [15] D. Mateos-Núñez and J. Cortés, "Stability of stochastic differential equations with additive persistent noise," in *American Control Conference (ACC)*, 2013. IEEE, 2013, pp. 5427–5432.
- [16] —, "p-th moment noise-to-state stability of stochastic differential equations with persistent noise," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 52, no. 4, pp. 2399–2421, 2014.