

Diseño de control con garantía de cota final probabilística vía linealización exacta

Noelia Pizzi
CIFASIS-CONICET
FCEIA-UNR
Rosario, Argentina
pizzi@cifasis-conicet.gov.ar

Ernesto Kofman
CIFASIS-CONICET
FCEIA - UNR
Rosario, Argentina
kofman@fceia.unr.edu.ar

Damián Marelli
CIFASIS-CONICET
Rosario, Argentina
marelli@cifasis-conicet.gov.ar

Resumen—En este artículo proponemos una estrategia de diseño de control no lineal basado en linealización exacta que permite, bajo ciertas hipótesis, garantizar que un sistema no lineal perturbado con ruido blanco Gaussiano tenga una cota final probabilística deseada a lazo cerrado.

Index Terms—ecuaciones diferenciales estocásticas, cotas finales probabilísticas.

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de cota final tiene un rol fundamental en la teoría de control, ya que el mismo reemplaza la idea de estabilidad de los puntos de equilibrio frente a la presencia de perturbaciones no evanescentes [1]. Asociado a este concepto, aparecen diversos problemas y aplicaciones en la teoría de control, siendo uno de los más relevantes el del diseño de control robusto para obtener cotas finales [2], [3].

Un problema con el conceptos de cota final es que, frente a la presencia de perturbaciones no acotadas (como el ruido blanco Gaussiano), estos conjuntos ya no existen porque con cierta probabilidad el estado puede alcanzar valores arbitrariamente grandes en cualquier momento. Para subsanar esta dificultad, en [4] se definió el concepto de *cota final probabilística* (PUB, por *Probabilistic Ultimate Bound*) para sistemas de tiempo discreto y luego se extendió el mismo a sistemas de tiempo continuo [5]. Una cota final probabilística es un conjunto hacia el cual las trayectorias del estado convergen y permanecen (al igual que en el caso determinístico), pero la permanencia se da con cierta probabilidad (determinada por un parámetro $p < 1$). Esto es, para tiempos suficientemente grandes, la probabilidad de que el estado esté en el conjunto es de al menos p .

Además de la definición de PUB, en [5] se dan fórmulas para su caracterización que se utilizan para diseño de control y para detección de fallas [6]. Estas definiciones, originalmente concebidas para sistemas lineales, fueron recientemente extendidas a sistemas no lineales, brindándose fórmulas de caracterización y una estrategia de diseño basados en funciones de Lyapunov [7].

En este trabajo brindamos una solución alternativa al problema de diseño de control mencionado, reemplazando el uso de funciones de Lyapunov por la utilización de *linealización exacta estocástica* [8], de manera de aprovechar parcialmente los resultados de diseño de control lineal de [5]. De esta manera, la técnica de diseño propuesta se basa en hacer un cambio de coordenadas en las cuales el sistema resulte lineal (excepto en la perturbación) y diseñar un control lineal en estas nuevas coordenadas que garantice la cota final deseada en las coordenadas originales. La idea está inspirada en lo realizado en [9] para obtener cotas finales determinísticas.

II. PRELIMINARES

En esta sección presentamos los conceptos y herramientas previas en los que se basa el resto del trabajo.

Notación

Dados dos vectores, x, y de igual dimensión, la expresión $x \preceq y$ ($x \prec y$) implica que $x_i \leq y_i$ ($x_i < y_i$) para cada componente de x e y .

II-A. Cotas finales probabilísticas en sistemas lineales

Los sistemas de tiempo continuo en presencia de ruido blanco Gaussiano no se pueden representar formalmente como ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que deben expresarse como *ecuaciones diferenciales estocásticas*. Para el caso lineal y estacionario, las mismas pueden tomar la siguiente forma:

$$dx(t) = Ax(t)dt + Hdw \quad (1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y el vector de perturbación $w(t) \in \mathbb{R}^k$ es un proceso de Wiener con covarianza incremental $cov[dw] = \Sigma_w dt$. Aquí, $\Sigma_w \in \mathbb{R}^{k \times k}$ es la matriz de covarianza del proceso. Asumimos además que el sistema nominal es asintóticamente estable (es decir, A es Hurwitz).

Asociada al sistema (1), se define la cota final probabilística como sigue:

Definición 1 (Cota Final Probabilística). Sea $0 < p \leq 1$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Decimos que S es una cota final probabilística con probabilidad p del sistema (1) si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $T = T(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que la probabilidad $P[x(t) \in S] \geq p$ para cada $t \geq t_0 + T$.

Con respecto a la caracterización de un PUB, en [5] se prueba que, dadas n probabilidades de escape $0 < \tilde{p}_i < 1$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p, \quad (2)$$

cualquier conjunto de la forma $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$ con $\varepsilon > 0$ y siendo

$$b_i \triangleq \sqrt{\frac{[\Sigma_x]_{i,i}}{\tilde{p}_i}}; \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

es un PUB para el sistema con probabilidad p asociado al sistema lineal (1), donde Σ_x la solución de la ecuación de Lyapunov

$$A \cdot \Sigma_x + \Sigma_x \cdot A^T = -H \Sigma_w H^T. \quad (4)$$

II-B. Diseño lineal con garantía de PUB

También en [5] se desarrolla una estrategia de diseño de control lineal que permite garantizar una cota final probabilística deseada. En particular, se considera un sistema descrito por la ecuación diferencial estocástica

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + Hdw \quad (5)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, y $w(t) \in \mathbb{R}^q$. Se supone además que el par (A, B) es controlable, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y que la matriz de la perturbación $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$ cumple una condición de *matching* con la entrada, es decir, $H = BG$, para alguna matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times q}$. Se asume además que $w(t)$ tiene covarianza incremental $\Sigma_w dt$, siendo Σ_w una matriz de covarianza.

El objetivo de la estrategia de diseño mencionada es que, dados un vector $b \in \mathbb{R}_+^n$, y una probabilidad $p \in (0, 1)$, se pueda encontrar una ganancia de control K tal que el sistema a lazo cerrado

$$dx(t) = (A + BK)x(t)dt + BGdw \quad (6)$$

tenga un PUB $S = \{x : |x| \leq b + \varepsilon\}$ con probabilidad p para cualquier $\varepsilon > 0$.

La estrategia de diseño utiliza el hecho que la cota final según la Ec. (3) depende de los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza del estado Σ_x que se obtiene de resolver la Ec. (4). Cuando la matriz A está en forma canónica de controlabilidad y el sistema tiene una entrada escalar, Σ_x tiene una *estructura de Xiao* [10]:

Definición 2 (matriz de Xiao). Dado un vector $0 \preceq z \in \mathbb{R}^k$, definimos la matriz de Xiao $\mathcal{X}(z) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ como

$$\mathcal{X}(z) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & -z_2 & 0 & z_3 & \cdots & \cdot \\ 0 & z_2 & 0 & -z_3 & 0 & \cdots & \cdot \\ -z_2 & 0 & z_3 & 0 & -z_4 & \cdots & \cdot \\ 0 & -z_3 & 0 & z_4 & 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

En base a esto, el siguiente lema muestra como diseñar el control que *asigna* una matriz de covarianza al sistema de lazo cerrado:

Lema 1. Consideramos el sistema de Ec. (6) y asumimos que el par (A, B) está en su forma canónica de controlabilidad, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; y sean d_j , $j = 1, \dots, m$, índices de controlabilidad de (A, B) . Además, definimos $\Sigma \triangleq G \Sigma_w G^T$ y asumimos que el par $(A, B \Sigma^{1/2})$ es controlable. Entonces, la matriz de Xiao bloque diagonal

$$\Sigma_x = \text{diag}(\Sigma_x^1, \dots, \Sigma_x^m) \quad (8)$$

donde $\Sigma_x^j \in \mathbb{R}^{d_j \times d_j}$ para $j = 1, \dots, m$ son matrices de Xiao definidas positivas, es una matriz de covarianza asignable para el sistema bajo la ley de realimentación $u = Kx$ con

$$K = -B^\dagger (A \Sigma_x + \Sigma_x A^T + B \Sigma B^T) (I - B B^\dagger / 2) \Sigma_x^{-1} \quad (9)$$

donde B^\dagger es la inversa de Moore-Penrose de la matriz B . Más aún, la matriz a lazo cerrado $A + BK$ es Hurwitz.

El siguiente lema relaciona la construcción de una matriz de Xiao definida positiva con la elección de las probabilidades de escape \tilde{p}_i en la Ec. (3).

Lema 2. Sea $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función estrictamente decreciente con $\text{Im}(g) = [a, \infty)$ para alguna constante $a \geq 0$. Sea $b \succ 0$ un vector en \mathbb{R}^n y $0 < p < 1$. Entonces, existen n constantes $0 < \tilde{p}_i < 1$ para $i = 1, \dots, n$ tal que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$ y la matriz de Xiao

$$\Sigma_x = \mathcal{X} \left(\left[\begin{array}{ccc} \frac{(b_1)^2}{g(\tilde{p}_1)^2} & & \\ & \frac{(b_2)^2}{g(\tilde{p}_2)^2} & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{(b_n)^2}{g(\tilde{p}_n)^2} \end{array} \right]^T \right)$$

es definida positiva.

La demostración de este lema en [5] es constructiva, y brinda un procedimiento para encontrar las probabilidades de salida \tilde{p}_i que garantizan que la matriz Σ_x sea definida positiva. Usando este lema y el anterior que permite encontrar la matriz de realimentación K que asigna dicha matriz de Xiao como covarianza del sistema a lazo cerrado, es posible asignar un PUB deseado para este último sistema. Este resultado se sintetiza en el Teorema 12 y el Algoritmo 1 de [5], y será la base de la estrategia de control que proponemos en este trabajo.

III. PLANTEO DEL PROBLEMA

Consideramos un sistema no lineal con perturbaciones estocásticas descrito por:

$$dx(t) = f(x)dt + g(x)u(t)dt + h(x)dw \quad (10)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ son funciones suaves (C^∞), $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, y la perturbación $w(t) \in \mathbb{R}^k$ es un proceso de Wiener con covarianza incremental $cov[dw] = I_{k \times k} dt$. Notar que esto último no implica pérdida de generalidad ya que el efecto de una perturbación con covarianza incremental $\Sigma_w dt$ puede modelarse de forma equivalente reemplazando $h(x)$ por $\tilde{h}(x) \triangleq h(x)\sqrt{\Sigma_w}$.

Supondremos adicionalmente que existe un campo matricial suave $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times k}$, tal que $h(x) = g(x)\gamma(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (condición de matching).

El objetivo es encontrar una ley de control $u(t) = \kappa(x)$ tal que el sistema a lazo cerrado resultante tenga una cota final deseada definida por un conjunto S_x dado.

III-A. Diseño por linealización exacta estocástica

Para resolver el problema, asumiremos que el sistema (10) es *linealizable por realimentación exacta estocástica*, es decir, que existen un difeomorfismo dos veces continuamente diferenciable $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\phi(0) = 0$, un campo vectorial $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un campo matricial $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, con β no singular para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tal que, si $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, el cambio de coordenadas $z = \phi(x)$ transforma la Ec.(10) en

$$dz = A_0 z dt + B_0 v dt + H(z)dw, \quad (11)$$

donde $A_0 = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ y $B_0 = \text{diag}(b_1, \dots, b_m)$, con $A_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$ y $b_i \in \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, \dots, m$, dados por

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ y } b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y d_i , $i = 1, \dots, m$, (i.e., los índices de controlabilidad de A_0) que satisfacen $\sum_{i=1}^m d_i = n$.

Aplicando la fórmula de Itô a cada componente de la transformación $z = \phi(x) \in \mathbb{R}^n$ en el sistema (10) y comparando con (11), se obtiene:

$$[A_0 z]_i = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} h(x) \right) \right]$$

con $x = \phi^{-1}(z)$, y

$$B_0 = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (g(x)\beta(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}.$$

De acuerdo a la condición de matching resulta,

$$\begin{aligned} H(z) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} h(x) \right|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x)\gamma(x) \right|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= B_0 \beta^{-1}(x)\gamma(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \triangleq B_0 G(z). \end{aligned}$$

Supondremos además que $G(z)$ es acotada de tal manera que exista $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ tal que, para todo z ,

$$G(z)G^T(z) \leq \bar{G}\bar{G}^T. \quad (12)$$

Si consideramos la ley de control $v = Kz$ en (11), o equivalentemente,

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K\phi(x) \quad (13)$$

en (10), obtenemos el siguiente sistema linealizado

$$dz = (A_0 + B_0 K)z dt + H(z)dw = Az dt + H(z)dw. \quad (14)$$

El problema de encontrar una ley de control $u(t) = \kappa(x)$ para el sistema (10) lo reduciremos entonces a encontrar una matriz K tal que el sistema (14) tenga una cota final S_z que garantice la cota final S_x en las coordenadas originales a través de la transformación inversa $x = \phi^{-1}(z)$.

IV. RESULTADO PRINCIPAL

Como vimos en la sección II para sistemas estocásticos lineales, el diseño que asegura una cota final probabilística está ligado al cálculo de la matriz de covarianza de los estados. Para el caso del sistema (14), debido al término no lineal $H(z)$, no es posible determinar esta matriz. Sin embargo, veremos que puede hallarse una cota superior para Σ_z en base a la cual basaremos la estrategia de diseño.

IV-A. Cota para la covarianza del sistema linealizado

Lema 3. Para el sistema (14) donde $A = A_0 + B_0 K$ es Hurwitz, resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)] = 0, \quad (15)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Sigma_z(t) \leq \Sigma, \quad (16)$$

donde Σ_z es la matriz de covarianza de $z(t)$ y Σ es la solución positiva única de

$$A\Sigma + \Sigma A^T + \bar{H}\bar{H}^T = 0. \quad (17)$$

siendo $\bar{H} \triangleq B_0 \bar{G}$, donde \bar{G} satisface la condición (12).

Demostración. La solución de (14) está dada por

$$z(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t M(t, s) dw(s),$$

donde $M(t, s) = e^{A(t-s)} H(z(s))$.

Usando [11, p. 60, ec. (5.17)], tenemos que

$$\begin{aligned} E[z_i(t)] &= [e^{At} z_0]_i + \sum_{l=1}^n E \left[\int_0^t [M(t, s)]_{i,l} d[w(s)]_l \right] \\ &= [e^{At} z_0]_i, \end{aligned}$$

de donde $E[z(t)] = e^{At} z_0$, lo que prueba la Ec. (15).

Por otro lado, usando [11, ecs. (5.10) y (6.9)] y teniendo en cuenta que $H(z) = B_0G(z)$, resulta

$$\begin{aligned}\Sigma_z(t) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^t M(t,s)M^T(t,s)ds \right\} \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{A(t-s)}H(z(s))H^T(z(s))\left(e^{A(t-s)}\right)^T ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{A(t-s)}B_0\bar{G}\bar{G}^TB_0^T\left(e^{A(t-s)}\right)^T ds \right] \triangleq \Sigma(t),\end{aligned}$$

Esta última desigualdad surge de la propiedad: $G(z)G^T(z) \leq \bar{G}\bar{G}^T \Rightarrow \Phi G(z)G^T(z)\Phi^T \leq \Phi\bar{G}\bar{G}^T\Phi^T$, para cualquier matriz Φ semidefinida positiva.

Notar además que $\Sigma(t)$ es la covarianza del proceso $\bar{z}(t)$ definido por

$$d\bar{z} = A\bar{z}dt + \bar{H}d\bar{w}, \quad (18)$$

siendo \bar{w} un proceso de Wiener con matriz de covarianza igual a la matriz identidad.

La prueba concluye observando que la covarianza de $\bar{z}(t)$ en la Ec. (23) con $t \rightarrow \infty$ puede ser calculada a partir de la ecuación de Lyapunov (17). \square

IV-B. Cálculo del PUB para el sistema linealizado

El siguiente resultado, basado en la cota de la covarianza dada por el Lema 3, permite calcular cotas finales probabilísticas para el sistema linealizado de Ec. (14).

Lema 4. Sea $p \in (0, 1)$, dadas n probabilidades de escape $\tilde{p}_i > 0$ que satisfacen la Ec.(2), el conjunto $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R} : |z_i| \leq b_i + \varepsilon\}$, con

$$b_i = \sqrt{\frac{[\Sigma]_{i,i}}{\tilde{p}_i}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (19)$$

y Σ definida como en (17), es un PUB con probabilidad p para el sistema (14).

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. De la desigualdad de Chebyshev, llamando $\mu_z(t) \triangleq \mathbb{E}[z(t)]$, se tiene que

$$\Pr \left[|[z(t) - \mu_z(t)]_i| \geq b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq \frac{[\Sigma_z(t)]_{i,i}}{(b_i + \frac{\varepsilon}{2})^2}.$$

Luego, de (16), existe $T_{\varepsilon,i} \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t > T_{\varepsilon,i}$,

$$\Pr \left[|[z(t) - \mu_z(t)]_i| > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq \frac{[\Sigma]_{i,i}}{b_i^2} = \tilde{p}_i \quad (20)$$

También, de la Ec. (15), existe $\tilde{T}_{\varepsilon,i} \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t > \tilde{T}_{\varepsilon,i}$

$$|\mu_z(t)_i| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21)$$

Así, teniendo en cuenta las ecuaciones (20) y (21), para todo $t > \max\{T_{\varepsilon,i}, \tilde{T}_{\varepsilon,i}\}$,

$$\begin{aligned}\Pr \left[|[z(t)]_i| > b_i + \varepsilon \right] &= \Pr \left[|[z(t)]_i| - \frac{\varepsilon}{2} > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \Pr \left[|[z(t)]_i| - |\mu_z(t)_i| > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \Pr \left[|[z(t)]_i| - |\mu_z(t)_i| > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \tilde{p}_i.\end{aligned} \quad (22)$$

Sea $\mathcal{S} = \{z : |z| \leq b + \varepsilon \mathbf{1}\}$, con $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ un vector de unos. Entonces, para todo $t > T_\varepsilon \triangleq \max\{T_{\varepsilon,i}, \tilde{T}_{\varepsilon,i} : i = 1, \dots, n\}$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\Pr [z(t) \notin \mathcal{S}] &\leq \sum_{i=1}^n \Pr \left[|[z(t)]_i| > b_i + \varepsilon \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p,\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\Pr [z(t) \in \mathcal{S}] \geq p.$$

y se concluye el resultado. \square

El lema 4 muestra que se puede calcular un PUB del sistema (14) a partir de la covarianza Σ de la solución del sistema lineal

$$d\tilde{z} = (A_0 + B_0K)\tilde{z}dt + \bar{H}d\tilde{w}. \quad (23)$$

La estrategia es, entonces, diseñar una matriz de realimentación K que asigne Σ al sistema (23) lo que impondrá un PUB para el sistema (14). Este PUB en $z(t)$ a su vez deberá resultar en el PUB deseado para las coordenadas originales $x(t)$ de la Ec. (10).

IV-C. Diseño de control con garantía de PUB

El siguiente lema asegura que, dada una probabilidad p y un vector $b \succ 0$, pueden definirse las probabilidades de escape \tilde{p}_i de forma tal que satisfagan la condición (2) y la Ec.(19) y de manera que la matriz Σ pueda ser una matriz de covarianza para el sistema (23).

Lema 5. Para cualquier $b \succ 0$, existe $\tilde{p} \succ 0$ que satisface (2), tal que $\Sigma_{\tilde{p},b} = \text{diag}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$ es una matriz definida positiva con

$$\Sigma_i = \mathcal{X}(\tilde{p}_j b_j^2 : j = \sigma_i - d_i + 1, \dots, \sigma_i), \quad (24)$$

para $i = 1, \dots, m$, y donde d_i los índices de controlabilidad de A_0 y $\sigma_i = \sum_{j=1}^i d_j$.

Demostración. De acuerdo al Lema 2, dado $b^j \succ 0$ y $\hat{p}_j \in (0, 1)$, se puede hallar un vector \tilde{p}^j que satisface $\sum_{i=1}^{d_j} \tilde{p}_i^j = 1 - \hat{p}_j$ tal que $\mathcal{X}(y^j) > 0$ con $y_i^j = \frac{[b^j]_i^2}{g(\tilde{p}_i^j)^2}$, donde $g(\tilde{p}_i^j)$ es una función estrictamente decreciente con imagen en el intervalo $[a, \infty)$ para alguna constante $a \geq 0$.

Luego, definiendo $g(\tilde{p}_i^j) = (\tilde{p}_i^j)^{-1}$ (la cual es estrictamente decreciente), podemos elegir $\hat{p}_j \in (0, 1)$, para $j = 1, \dots, m$, tal que $\sum_{j=1}^m \hat{p}_j = p + m - 1$.

Consideramos $b^j = [b_{\sigma_j - d_j + 1}, \dots, b_{\sigma_j}]^T$ y hallamos m vectores \tilde{p}^j tales que $\mathcal{X}(y^j)$ sea definida positiva para todo j .

Entonces, tomando $\tilde{p} = [\tilde{p}^{1T}, \dots, \tilde{p}^{mT}]^T$, resulta que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$ y el hecho de que $\mathcal{X}(y^j) > 0$, para $j = 1, \dots, m$, implica que el bloque diagonal resultante $\Sigma_{\tilde{p}, b}$ es definido positiva, completando la prueba. \square

Como ya se mencionó, la metodología de diseño propuesta se basa en hallar una ley de control que asegure que el sistema linealizado (14) tenga cierto PUB de la forma $S_b = \{z : |z| \leq b\}$, que a su vez deberá implicar que el sistema original de la Ec. (10) tenga un PUB S_x deseado. Dado entonces S_x , la existencia de S_b está garantizada debido a que el cambio de coordenadas ϕ es un homeomorfismo con $\phi(0) = 0$.

Teniendo en cuenta esto, el teorema que sigue asegura la existencia y brinda la expresión de una ley de control bajo la cual una región arbitraria S_x se convierte en un PUB del sistema no lineal de ecuación (10).

Teorema 1 (Diseño de control). *Consideremos el sistema (10). Sea $S_x \subset \mathbb{R}^n$ con $0 \in \text{int}(S_x)$ y sea $0 < p < 1$. Entonces, para cualquier $b > 0$ tal que $\phi^{-1}(S_b) \subset S_x$ y $\tilde{p} > 0$ que satisface (2), para el cual $\Sigma_{\tilde{p}, b} > 0$, la ley de control*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K_{\tilde{p}, b}\phi(x), \quad (25)$$

con

$$K_{\tilde{p}, b} = -B_0^\dagger(A_0\Sigma_{\tilde{p}, b} + \Sigma_{\tilde{p}, b}A_0^T + B_0\bar{G}\bar{G}^TB_0^T) \left(I - \frac{1}{2}B_0B_0^\dagger \right) \Sigma_{\tilde{p}, b}^{-1} \quad (26)$$

hace que la región S_x sea un PUB con probabilidad p .

Demostración. Con la ley de control de Ec.(25) y el cambio de coordenadas $z = \phi(x)$, el sistema (10) se transforma en

$$dz = (A_0 + B_0K_{\tilde{p}, b})zdt + B_0G(z)dw, \quad (27)$$

De Lema 1, la matriz $K_{\tilde{p}, b}$ definida en la Ec. (26) implica que $A = A_0 + B_0K_{\tilde{p}, b}$ es Hurwitz y la solución Σ de

$$(A_0 + B_0K_{\tilde{p}, b})\Sigma + \Sigma(A_0 + B_0K_{\tilde{p}, b})^T + B_0\bar{G}\bar{G}^TB_0^T = 0$$

está dada por $\Sigma_{\tilde{p}, b}$, que verifica la Ec. (24). Esto es,

$$[\Sigma]_{i,i} = \tilde{p}_i b_i^2.$$

Luego, el Lema 4 asegura que el conjunto $S_b = \{z : |z| \leq b\}$ es un PUB para el sistema (27) y el hecho de que $\phi^{-1}(S_b) \subset S_x$ implica que S_x es un PUB para el sistema (10), concluyendo la prueba. \square

IV-D. Algoritmo para diseño de control

El Teorema 1 proporciona una expresión para la ley de control que asegura que el sistema no lineal de Ec. (10) tiene un PUB deseado S_x . Dicha expresión depende de encontrar un vector \tilde{p} tal que la matriz $\Sigma_{\tilde{p}, b}$ sea definida positiva. El siguiente algoritmo extiende el Algoritmo 1 de [5] y permite completar el procedimiento de diseño.

Algoritmo 1 (Procedimiento de diseño de control).

1. Encontrar el cambio de coordenadas $z = \phi(x)$, junto con las funciones de realimentación $\alpha(x)$ y $\beta(x)$, que transforman al sistema (10) en el (14).
2. Tomar $b > 0$ tal que $\phi^{-1}(S_b) \subset S_x$, donde $S_b = \{z : |z| \leq b + \varepsilon\}$.
3. Elegir m probabilidades $\hat{p}_j \in (0, 1)$ tales que $\sum_{j=1}^m \hat{p}_j = p + m - 1$. (Una elección razonable sería $\hat{p}_j = 1 - (1-p)d_j/n$, que asigna una probabilidad de salida proporcional a la dimensión de cada subespacio de controlabilidad.)
4. Para cada j en $1, \dots, m$,
 - a) Tomar $b^j = [b_{\sigma_j - d_j + 1}, \dots, b_{\sigma_j}]$.
 - b) Tomar $k = 1$ y $\tilde{p}_i^{(1)} = (1 - \hat{p}_j)/d_j$ para $i = 1, \dots, d_j$.
 - c) Formar $\Sigma_k \triangleq \mathcal{X} \left(\begin{bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} b_1^2 & \tilde{p}_2^{(k)} b_2^2 & \dots & \tilde{p}_k^{(k)} b_k^2 \end{bmatrix}^T \right)$.
Si $k = d_j$ ir al paso (4h).
 - d) Formar $\tilde{\Sigma}_{k+1} \triangleq \mathcal{X} \left(\begin{bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} b_1^2 & \tilde{p}_2^{(k)} b_2^2 & \dots & \tilde{p}_{k+1}^{(k)} b_{k+1}^2 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} \Sigma_k & c_k \\ c_k^T & \tilde{p}_{k+1}^{(k)} b_{k+1}^2 \end{bmatrix}$.
 - e) Si $\tilde{\Sigma}_{k+1} > 0$, tomar $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)}$ e ir al paso (4g).
 - f) Si no, elegir $\alpha > 1$ y calcular, para $1 \leq i \leq k$,
$$[\tilde{\Sigma}_{k+1}]_{i,i} = \frac{[\Sigma_k]_{i,i}}{\alpha r_{k+1}}, \quad \text{donde } r_{k+1} = \frac{c_k^T (\Sigma_k)^{-1} c_k}{\tilde{p}_{k+1}^{(k)} b_{k+1}^2}$$
y tomar
$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = \begin{cases} [\tilde{\Sigma}_{k+1}]_{i,i} / b_i^2 & \text{para } 1 \leq i \leq k \\ \tilde{p}_i^{(k)} \frac{1-p - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j^{(k+1)}}{1-p - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j^{(k)}} & \text{para } i > k \end{cases}$$
 - g) Hacer $k := k + 1$ y regresar al paso (4c).
 - h) Tomar $\Sigma_j = \Sigma_k > 0$.
5. Calcular el bloque diagonal de Xiao $\Sigma_{\tilde{p}, b}$ de la Ec.(24).
6. Obtener \bar{G} que verifique la condición (12) y calcular $K_{\tilde{p}, b}$ usando la Ec. (26).
7. Calcular la ley de realimentación $u(t)$ a partir de la Ec. (25).

El paso 1 del algoritmo anterior está basado en el hecho de que la planta es linealizable por realimentación exacta estocástica. La elección de \hat{p}_j en el paso 3 se sigue de la construcción de $\Sigma_{\tilde{p}, b} > 0$ en el Lema 5.

Luego, el paso 4 es un procedimiento para encontrar \tilde{p}^j de manera que la matriz de Xiao sea definida positiva, siguiendo la prueba del Lema 2 (la demostración está en [5]). El resto del algoritmo sigue la prueba del Teorema 1.

V. EJEMPLO

Consideremos el sistema estocástico no lineal

$$dx = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2} \\ \frac{2x_1x_2^2}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} udt + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} dw \quad (28)$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener con covarianza unitaria y $a = \sqrt{0.001}$.

Queremos que el conjunto $S_x = \{x : |x| \preceq b_x\}$, con $b_x = [0.01 \ 0.1]^T$, sea un PUB con probabilidad $p = 0.9$ para tal sistema.

La aplicación $z = \phi(x) = [x_1, \ x_2/(1+x_1^2)]^T$, junto con las funciones de realimentación $\alpha(x) = x_2/(1+x_1^2)$ y $\beta(x) = 1/(1+x_1^2)$ transforman al sistema (28) en un sistema de la forma (11), donde $H(z) = [0, \ a/(1+z_1^2)]^T = B_0G(z)$, con $G(z) = a/(1+z_1^2)$, lo que completa el primer paso del Algoritmo 1.

En el paso 2, b puede elegirse de muchas maneras y aquí adoptamos $b = [0.01 \ 0.09]^T$.

Dado que $m = 1$, del paso 3 resulta simplemente $\hat{p}_1 = p = 0.9$. Luego, del paso 4, se obtienen las probabilidades de escape $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = 0.05$, de donde resulta la siguiente matriz de covarianza asignable (paso 5):

$$\Sigma_{\tilde{p},b} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 b_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{p}_2 b_2^2 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.405 \end{bmatrix}.$$

Luego, siguiendo el paso 6, observamos que tomando $\bar{G} = a$ se cumple la condición (12) y luego calculamos la ganancia de control $K_{\tilde{p},b} = [-81 \ -1.2346]$. Finalmente, del paso 7 resulta que la ley de control $u(t) = \alpha(x) + \beta(x)K_{\tilde{p},b}\phi(x)$ asegura que el sistema (28) tiene el PUB deseado con probabilidad $p = 0.9$.

La Figura 1 muestra la región S_x en el espacio de estado y resultados de simulación para las trayectorias del sistema a lazo cerrado a partir de cierta condición inicial, corroborando que la región S_x es un PUB. Este resultado de simulación muestra también que el diseño es conservador ya que no se observa que la trayectoria escape frecuentemente de dicha región. La causa de esto último puede atribuirse en parte a que la cota final se obtiene a partir de la desigualdad de Chebyshev, que es conservadora ya que sólo tiene en cuenta la covarianza del proceso.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una estrategia de diseño de control para sistemas linealizables por realimentación estocástica que, bajo ciertas condiciones, garantiza una cota final probabilística deseada. La estrategia utiliza una cota superior para la matriz de covarianza del estado en las coordenadas transformadas que permite aprovechar parte de los resultados desarrollados previamente para

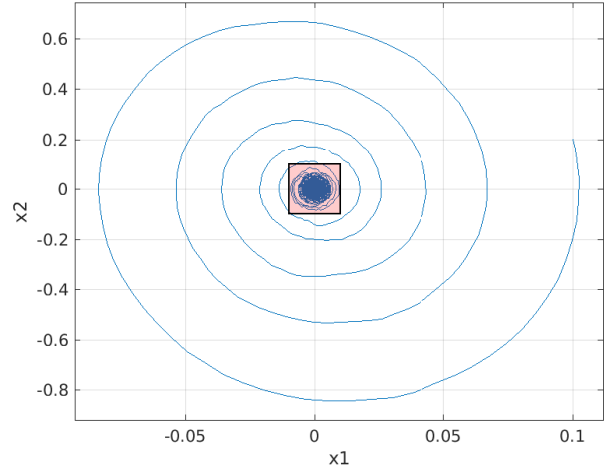


Figura 1. Cota Final Probabilística y trayectorias del sistema no lineal a lazo cerrado.

el caso lineal. Se presentó también un ejemplo ilustrativo de esta técnica de diseño.

En cuanto a trabajo futuro, se pretende poder extender esta metodología para sistemas no lineales de tiempo discreto que resulten linealizables por realimentación exacta.

REFERENCIAS

- [1] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3rd ed. Prentice Hall, 2002.
- [2] M. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, pp. 1139–1144, 1981.
- [3] E. Kofman, M. Seron, and H. Haimovich, "Control Design with Guaranteed Ultimate Bound for Perturbed Systems," *Automatica*, vol. 44, no. 7, pp. 1815–1821, 2008.
- [4] E. Kofman, J. De Doná, and M. Seron, "Probabilistic Set Invariance and Ultimate Boundedness," *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2670–2676, 2012.
- [5] E. Kofman, M. Seron, J. De Doná, and N. Pizzi, "Continuous-Time Probabilistic Ultimate Bounds and Invariant Sets: Computation and Assignment," *Automatica*, vol. 71, pp. 98–105, 2016.
- [6] N. Pizzi, E. Kofman, M. Seron, and J. De Doná, "Actuator fault diagnosis using probabilistic ultimate bounds," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 6, pp. 2550–2555, 2016.
- [7] N. Pizzi, "Cotas finales probabilísticas en diseño de control y detección de fallas," Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina, 2018, disponible en www.fceia.unr.edu.ar/~kofman/files/tesis_pizzi.pdf.
- [8] T. Lahdhiri, and T. Alouani, "An Introduction to the Theory of Exact Stochastic Feedback Linearization for Nonlinear Stochastic Systems," in *IFAC World Congress 1996*, San Francisco, USA, 1996.
- [9] E. Kofman, F. Fontenla, H. Haimovich, and M. Seron, "Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems," in *Proceedings of IFAC World Congress 2008*, Seoul, Korea, 2008.
- [10] C.-S. Xiao, Z.-M. Feng, and X.-M. Shan, "On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 139, no. 3, pp. 286–290, 1992.
- [11] K. J. Aström, *Introduction to stochastic control theory*, 1st ed. New York: Academic Press, 1970.