Algunas Propiedades de la Simulación de ODE's por Cuantificación de Estados

Ernesto Kofman
Laboratorio de Sistemas Dinámicos
FCEIA - Universidad Nacional de Rosario
Riobamba 245 bis - (2000) Rosario - Argentina
Email: ekofman@eie.fceia.unr.edu.ar

Resumen

En este trabajo se estudian propiedades de convergencia y estabilidad del método de simulación por eventos discretos de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante cuantificación de estados. Por un lado se demuestra la convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución verdadera cuando la cuantificación tiende a cero. Por otro lado, particularizando para casos lineales y estacionarios las propiedades de estabilidad deducidas en un trabajo anterior, se deducen fórmulas que calculan la cuantificación necesaria para mantener el error a lo largo de la simulación dentro de márgenes preestablecidos. Un ejemplos de simulación sobre un caso stiff es presentado con el fin de ilustrar los resultados obtenidos.

1 Introducción

La complejidad que reviste la resolución analítica de ecuaciones diferenciales y la imposibilidad de obtener expresiones de las soluciones excepto para sistemas lineales y estacionarios y para una muy pequeña variedad de sistemas no lineales ha motivado el desarrollo de muy diversos métodos para la obtención de soluciones numéricas aproximadas.

La herramienta básica de todos los métodos tradicionales de integración es la discretización de la variable temporal. Esta discretización puede ser constante o variable, dando lugar a los llamados métodos de paso fijo y de paso variable respectivamente [1]. En cualquiera de los casos, el modelo de simulación aproximado que se obtiene corresponde a la categoría de los *sistemas de tiempo discreto*.

En los últimos años, sin embargo, se han desarrollado diferentes métodos que en lugar de obtener un modelo de simulación en tiempo discreto, obtienen un modelo de *eventos discretos* [2], [3], [4], [5]. Una de las formas de arribar a esta clase de sistemas es reemplazar la discretización temporal por la discretización o cuantificación de las variables de estado del sistema. Este es el camino que sigue el método de cuantificación propuesto por Zeigler en [2]. Sin embargo, dicho método cuenta con un problema de aparición de infinitas oscilaciones en tiempo finito, dificultad solucionada en el método desarrollado en [4] mediante el agregado de histéresis en la cuantificación.

En esta última aproximación el modelo de simulación define una nueva categoría de sistemas denominada Quantized State Systems (QSS) [5] que pueden ser exactamente simulados por un sistema de eventos discretos bajo el formalismo DEVS [6], [7]. Además de esta propiedad de *simulabilidad* los QSS cuentan con propiedades de estabilidad similares las propiedades de estabilidad del sistema original continuo que se quiere simular [4] [5]. Esta característica, que en el cálculo numérico clásico de tiempo discreto es exclusiva de los métodos implícitos, brinda una importante ventaja para la simulación de ciertos casos *stiff*. También cabe mencionar entre las ventajas de este método el producir el desacoplamiento de ciertas clases de singularidades estructurales típicas de los sistemas de ecuaciones generados a partir de modelos orientados a objetos [8] [9].

En este trabajo se sigue la linea comenzada a partir de la definición de los QSS y la demostración de sus propiedades de estabilidad, mediante la deducción de propiedades de convergencia del método y la particularización del análisis de las propiedades de estabilidad para el caso lineal y estacionario.

En la sección 2 se resumen las principales definiciones y propiedades de los QSS. Luego, las propiedades de convergencia que se demuestran en la sección 3, sumadas a las propiedades de estabilidad deducidas previamente, muestran formalmente que el método de simulación por cuantificación de estados cumple con los requisitos básicos de todo método de simulación.

Del mencionado estudio general de estabilidad realizado en trabajos previos se podía deducir un algoritmo para obtener la cuantificación necesaria que aseguraba una cota de error final en la simulación. La particularización a los sistemas lineales de la sección 4, en cambio, permite obtener mediante fórmulas explícitas la cuantificación en cada variable de estado para acotar el máximo error en el transcurso de toda la simulación.

Finalmente, en la sección 5, los resultados son aplicados a la simulación de un ejemplo.

2 Quantized State Systems (QSS)

Los QSS o sistemas de estados cuantificados son sistemas continuos en los cuales cada variable de estado es cuantificada de forma tal que sus trayectorias resultan seccionalmente constantes. A continuación se presenta la definición formal de los QSS y las bases para su simulación.

2.1 Funciones de cuantificación

Sea $D = \{d_0, d_1, ..., d_r\}$ un conjunto de número reales, donde $d_{i-1} < d_i$ con $1 \leq i \leq r$ y sea $x \in \Omega$ una trayectoria continua, con $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $b : \Omega \to \Omega$ un funcional tal que si $q = b(x)$ la trayectoria q satisface:

$$q(t) = \begin{cases} d_m & \text{si } t = -\infty \\ d_{i+1} & \text{si } x(t) = d_{i+1} \wedge q(t^-) = d_i \wedge i < r \\ d_{i-1} & \text{si } x(t) = d_i - \varepsilon \wedge q(t^-) = d_i \wedge i > 0 \\ q(t^-) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

y

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } x(-\infty) < d_0 \\ r & \text{si } x(-\infty) \geq d_r \\ j & \text{si } d_j \leq x(-\infty) < d_{j+1} \end{cases}$$

Luego, el funcional b es una *Función de Cuantificación con Histéresis*. El ancho de la ventana de histéresis es ε en tanto que d_0 y d_r son los valores de saturación inferior y superior.

La Figura 1 ilustra una función de cuantificación con histéresis típica con intervalos de cuantificación uniformes.

Una propiedad fundamental de las funciones de cuantificación con histéresis es la dada por lo siguiente desigualdad:

$$d_0 \leq x(t) \leq d_r \Rightarrow |q(t) - x(t)| = |b(x(t)) - x(t)| \leq \max_{1 \leq i \leq r}(d_i - d_{i-1}, \varepsilon) \tag{2}$$

2.2 QSS relacionado a un sistema de ecuaciones de estado

Dado el Sistema de Ecuaciones de Estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{3}$$

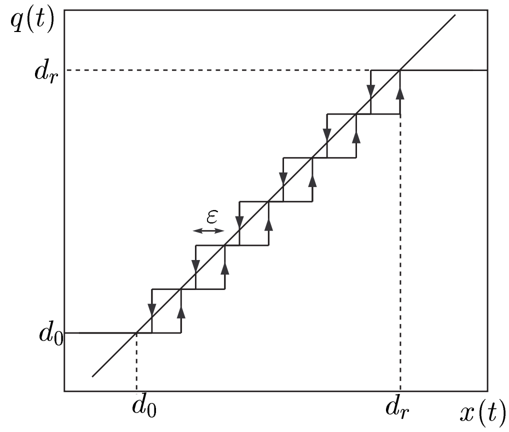

Figura 1: Función de Cuantificación con Histéresis

se define el QSS asociado a este sistema como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(q(t), u(t)) \\ y(t) &= g(q(t), u(t)) \end{cases} \tag{4}$$

donde $q(t)$ y $x(t)$ están relacionados componente a componente mediante funciones de cuantificación con histéresis. Las componentes del vector $q(t)$ se denominan *variables cuantificadas*. La Figura 2 muestra el diagrama de bloques de un QSS genérico.

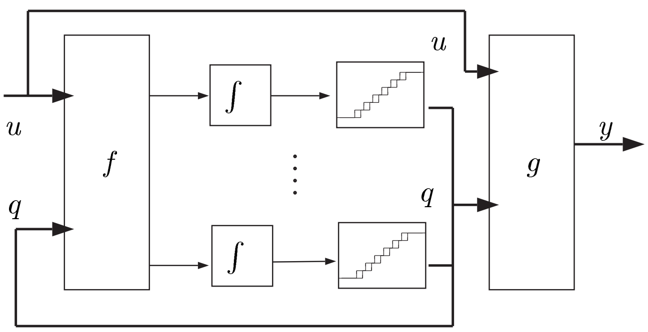

Figura 2: Diagrama de Bloques de un QSS

2.3 Bases para la simulación de un QSS

El agregado de cuantificadores[1] a la salida de los integradores de un sistema continuo lo transforma en un QSS. Cuando las variables de entrada tienen trayectorias seccionalmente constantes, las trayectorias de las variables cuantificadas y de las derivadas de las variables de estado resultan también seccionalmente constantes. Debido a estas características en las trayectorias es posible construir un modelo de eventos discretos DEVS que reproduce exactamente la dinámica del QSS. La demostración de estas propiedades y el modelo DEVS asociado a un QSS

[1] Sistema en el cual la entrada y la salida están relacionados por una función de cuantificación con histéresis

genérico se encuentran en [5]. Si bien aquí no se introducirá dicho modelo DEVS, a continuación se presentarán los principios que rigen la simulación de un QSS.

La idea básica detrás de la simulación por eventos discretos de un QSS radica en la representación mediante eventos de los cambios en las variables cuantificadas y en las derivadas de las variables de estado. Esta representación es posible debido a que dichas variables tienen trayectorias seccionalmente constantes.

Consideremos entonces un sistema constituido por un integrador con un cuantificador conectado a la salida, de forma tal que la salida del sistema es la variable cuantificada $q(t)$ como muestra la Figura 3.

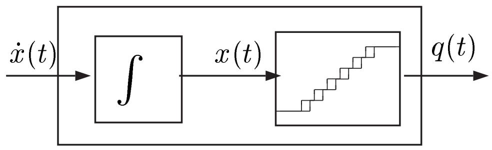

Figura 3: Un Integrador Cuantificado

De acuerdo a las propiedades explicadas anteriormente, las trayectorias de q y de $\dot{x}(t)$ serán seccionalmente constantes, en tanto que la variable de estado $x(t)$ tendrá una trayectoria seccionalmente lineal. En la Figura 4 se muestran las trayectorias típicas en un integrador cuantificado.

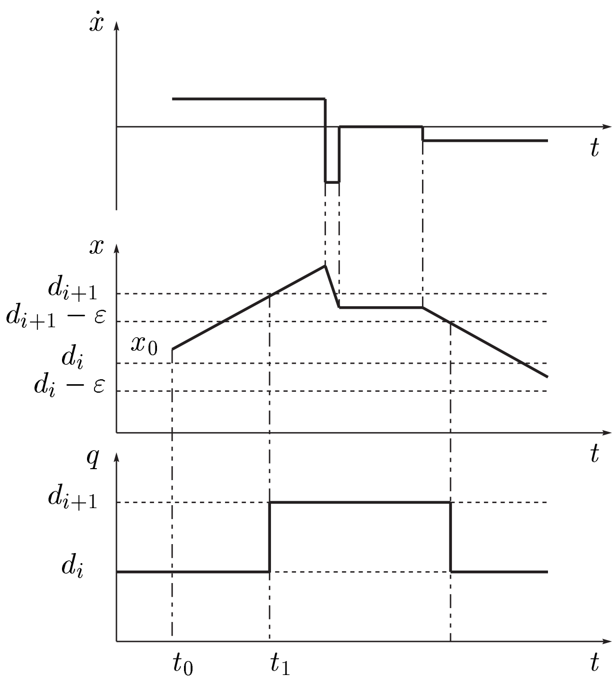

Figura 4: Trayectorias en un integrador cuantificado

Simular este sistema, es equivalente a predecir cuando cambia la variable q y que valor adopta después del cambio. Estos cálculos requieren del conocimiento de x_0, condición inicial de la variable de estado $x(t)$ y de la entrada (coincidente con la derivada de x en este caso). Debido a la presencia de histéresis también será necesario conocer el valor inicial de la variable cuantificada $q(t_0) = d_i$.

Deberán luego tenerse en cuenta dos posibilidades distintas para predecir el siguiente cambio de q.

1. que el cambio ocurra sin modificación previa del valor de entrada
2. que haya al menos una modificación del valor de entrada antes del cambio de q

Suponiendo que el tiempo inicial de simulación es t_0, para el primer caso el tiempo para el próximo cambio se puede calcular como:

$$t_1 = \begin{cases} t_0 + \dfrac{d_{i+1} - x_0}{\dot{x}} & \text{si } \dot{x} > 0 \\ t_0 + \dfrac{x_0 - (d_i - \varepsilon)}{\dot{x}} & \text{si } \dot{x} < 0 \\ \infty & \text{si } \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

donde d_i es el valor actual de la variable cuantificada y ε es el ancho de la ventana de histéresis. El valor de q después del cambio, será d_{i+1} o d_{i-1} dependiendo del signo de $\dot{x}$. La nueva condición inicial para x podrá ser calculada como d_{i+1} o $d_i - \varepsilon$ también dependiendo del signo de $\dot{x}$.

Cuando hay una modificación del valor de entrada antes del cambio de q, la situación puede tratarse como un cambio en la condición inicial x_0 y un cambio en el tiempo inicial t_0. El incremento en x_0 se puede calcular como:

$$\Delta x_0 = \dot{x}(t_0) \cdot e \tag{6}$$

donde e es el tiempo transcurrido desde t_0 hasta el tiempo del cambio en el valor de u.

El uso alternado de las ecuaciones (5) y (6) permite la simulación exacta del integrador con el cuantificador. En términos del formalismo DEVS, las reglas deducidas para el primer caso (cambios en el valor de q) determinan la *función de transición interna*, mientras que las reglas del segundo caso determinan la *función de transición externa*. La ecuación (5) estará relacionada con la *función de avance de tiempo*, en tanto que el estado del modelo DEVS guardará los últimos valores de x_0, d_i y $\dot{x}$.

Dado que DEVS permite el acoplamiento de múltiples submodelos, un QSS general se puede simular exactamente mediante una estructura DEVS acoplada. El modelo de los integradores se construye utilizando las ideas que se explicaron en los párrafos previos y el resto del sistema, consistente simplemente en funciones estáticas, tiene una representación trivial en DEVS.

De esta forma, dado un sistema de ecuaciones de estado, mediante el agregado de una cuantificación *adecuada* puede arribarse a un modelo de simulación por eventos discretos que, como se verá en las siguientes secciones, tendrá un comportamiento bastante similar al del sistema original.

3 Convergencia del Método de Cuantificación de Estados

Una de las propiedades fundamentales que debe satisfacer todo método de simulación es que las soluciones del modelo de simulación deben converger hacia las soluciones del modelo original cuando ciertos parámetros de la aproximación tienden a algún límite. Estos son resultados bien conocidos en los métodos clásicos de tiempo discreto, y dicha convergencia se logra cuando el paso de integración tiende a cero.

El siguiente teorema brinda condiciones suficientes para asegurar que las trayectorias de un QSS convergen hacia las trayectorias del sistema continuo asociado cuando los intervalos de cuantificación tienden conjuntamente a cero. Esta propiedad garantiza la posibilidad de simular sistemas generales con un error arbitrariamente pequeño.

Teorema 1 (Convergencia de QSS). *Consideremos el sistema* (3) *y su QSS asociado* (4). *Sea D la región de* no-saturación *definida por*

$$D = \{x = (x_1, ..., x_n) / d_{0_i} < x_i < d_{r_i}\} \tag{7}$$

Supóngase que la entrada $u(t) \in D_u$ siendo D_u una región acotada y asumamos que la función $f(x, u)$ es Lipschitz en $D \times D_u$. Sea $\phi(t)$ la solución de (3) *desde la condición inicial $x(0) = x_0$ y sea $\phi_1(t)$ la solución del QSS asociado* (4) *a partir de la misma condición inicial x_0. Supongamos que $\phi(t) \in D_1$ donde $D_1 \subset D$ (la solución del sistema* *continuo se mantiene en la región de no-saturación. Luego, $\phi_1(t) \to \phi(t)$ cuando los intervalos de cuantifiación tienden a* 0.[2]

Demostración: Sea $S = \mathbb{R}^n - D$ y F definido según

$$F = \sup_{u \in D_u} (\sup_{x \in D} \|f(x,u)\|)$$

Sea d un escalar definido como

$$d = \inf_{x \in S} (\inf_{t \in [0,\infty]} \|\phi(t) - x\|) \tag{8}$$

Teniendo en cuenta lo asumido para f y $\phi(t)$, se puede encontrar una constante positiva t_1 que satisfaga

$$t_1 < \frac{d}{F} \tag{9}$$

Luego, de acuerdo a esta última definición, la trayectoria $\phi_1(t)$ permanecerá en el interior de D al menos durante el intervalo $[0, t_1]$.

La ecuación del QSS (4) puede reescribirse:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = f(x(t) + \Delta x(t), u(t)) \\ y(t) & = g(x(t) + \Delta x(t), u(t)) \end{cases} \tag{10}$$

donde $\Delta x(t)$ verifica

$$\|\Delta x(t)\| \leq \Delta_x \quad (0 \leq t \leq t_1) \tag{11}$$

siendo Δ_x una constante definida por los intervalos de cuantificación. Sea $t \in [0, t_1]$. Luego, de (10), (3) y del hecho que $\phi_1(0) = \phi(0)$ sigue que:

$$\phi_1(t) - \phi(t) = \int_0^t (f(\phi_1(\tau) + \Delta x(t), u(\tau)) - f(\phi(\tau), u(\tau)))d\tau$$

Entonces, aplicando miembro a miembro la norma euclídea se tiene:

$$\|\phi_1(t) - \phi(t)\| = \| \int_0^t (f(\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau), u(\tau)) - f(\phi(\tau), u(\tau)))d\tau \|$$

y luego,

$$\|\phi_1(t) - \phi(t)\| \leq \int_0^t \|f(\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau), u(\tau)) - f(\phi(\tau), u(\tau))\| d\tau \tag{12}$$

Sea M la constante de Lipschitz de la función f sobre $D \times D_u$. Dado que el argumento de la función f en (12) está dentro de esta región, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M \|\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau) - \phi(\tau)\| d\tau \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M (\|\phi_1(\tau) - \phi(\tau)\| + \|\Delta x(\tau)\|) d\tau \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M (\|\phi_1(\tau) - \phi(\tau)\| + \Delta_x) d\tau \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M \|\phi_1(\tau) - \phi(\tau)\| d\tau + M t \Delta_x \end{aligned}$$

[2]Sin modificar los limites de saturación (i.e. el número de niveles de cuantificación tiende a ∞).

Las funciones ϕ y ϕ_1 son continuas, lo mismo que el término $Mt\Delta_x$. Como M es además positiva, se puede aplicar la *Desigualdad de Gronwall-Bellman* [10], lo que resulta en

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq Mt\Delta_x + \int_0^t M^2 s \Delta_x e^{\int_s^t M d\tau} ds \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq (e^{Mt} - 1)\Delta_x \end{aligned}$$

Luego, dado que M y t_1 no dependen de Δ_x, para $0 \leq t \leq t_1$ se tiene que

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| = 0 \tag{13}$$

Además, de (8) tenemos que

$$d \leq \inf_{x \in S}(\|\phi(t_1) - x\|) \tag{14}$$

Tomando en cuenta (9), (13) y (14), es posible encontrar una cuantificación lo suficientemente pequeña tal que

$$t_1 < \frac{\inf_{x \in S}(\|\phi_1(t_1) - x\|)}{F}$$

Esta desigualdad implica que la solución $\phi_1(t)$ no abandona la región D durante el intervalo de tiempo $[t_1, 2t_1]$. Luego, la validez de las ecuaciones (11) a (13) se mantiene para el intervalo $[0, 2t_1]$. Usando repetidas veces este argumento, podemos asegurar que (13) es válida para todo t. $\square$

Un QSS puede simularse por un DEVS cuando $u(t)$ es seccionalmente constante. Si esto no ocurre, $u(t)$ puede ser aproximada por una función seccionalmente constante $u_q(t)$. Si la norma de la diferencia entre $u(t)$ y $u_q(t)$ está acotada y dicha cota tiende a cero con el resto de los intervalos de cuantificación, los resultados del Teorema 1 se pueden extender fácilmente a este caso.

4 Estudio del Error en Sistemas Lineales y Estacionarios

Consideremos el siguiente sistema lineal y estacionario:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) \tag{15}$$

Luego, el QSS asociado tendrá la siguiente expresión:

$$\dot{x}(t) = A(x(t) + \Delta x) + Bu(t) \tag{16}$$

donde $\Delta x(t) = q(t) - x(t)$, siendo $q(t)$ la versión cuantificada de $x(t)$. Luego, el error $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ cumplirá la siguiente ley:

$$\dot{e}(t) = A(e + \Delta x) \tag{17}$$

Dado que se supone conocida la condición inicial $x(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0$, se trata de estudiar el problema de la evolución de $e(t)$ a partir de la condición inicial $e(t_0) = 0$.

En virtud de (2), la elección del intervalo de cuantificación y de la ventana de histéresis para cada variable será equivalente a la elección de una cota para la correspondiente componente de Δx. Por esto, en los siguientes teoremas, se darán condiciones necesarias para la elección de estas cotas con el objetivo de garantizar que cada componente $e_i(t)$ de $e(t)$ se mantenga acotada de acuerdo a cierto error máximo admisible para la misma.

Formalmente, se buscarán las cotas $\Delta q_1, \cdots, \Delta q_n$ tales que la condición:

$$|\Delta x_i(t)| \leq \Delta q_i \; i = 1, \cdots, n \tag{18}$$

garantice que

$$|e_j(t)| \leq \Delta e_j \ \forall t \geq t_0, \ j = 0, \cdots, n \tag{19}$$

o equivalentemente, que la desigualdad vectorial

$$|\Delta x(t)| \leq \Delta q \tag{20}$$

implique que

$$|e(t)| \leq \Delta e \tag{21}$$

con $e(t_0) = 0$

Teorema 2 *Sea el sistema dado por* (17) *siendo A un escalar real negativo. Cuando $e(t_0) = 0$, la condición dada por* (21) *puede garantizarse tomando $\Delta q = \Delta e$.*

Demostración: La prueba es muy simple, ya que cuando $e(t) = \Delta e = \Delta q \geq \Delta x$, de (17) se deduce que $\dot{e}(t) \leq 0$, y de manera análoga, cuando $e(t) = -\Delta e$, resulta $\dot{e}(t) \geq 0$. Luego, $e(t)$ no puede abandonar el intervalo $[-\Delta e, \Delta e]$. □

Este teorema expresa que el error en un sistema estable de primer orden está acotado por el intervalo de cuantificación.

Teorema 3 *Sea el sistema dado por* (17) *siendo A una matriz diagonal con todos sus autovalores reales negativos. Cuando $e(t_0) = 0$, la condición dada por* (21) *puede garantizarse si se toma $\Delta q = \Delta e$.*

Demostración: La demostración es inmediata utilizando el teorema 2 para cada componente de $e(t)$. □

Teorema 4 *Sea el sistema dado por* (17) *siendo A una matriz diagonalizable con todos sus autovalores reales negativos. Cuando $e(t_0) = 0$, la condición dada por* (21) *puede garantizarse tomando Δq tal que*

$$|V| \cdot |V^{-1}| \Delta q = T \Delta q \leq \Delta e \tag{22}$$

donde V es la matriz de autovectores de A. [3]

Demostración: Sea $e(t) = V w(t)$. Luego, de (17) resulta

$$V \dot{w}(t) = A(Vw + \Delta x) \tag{23}$$

de donde

$$\dot{w}(t) = V^{-1} A V (w + V^{-1} \Delta x) = V^{-1} A V (w + \Delta x_w) \tag{24}$$

y además

$$|\Delta x_w(t)| = |V^{-1} \Delta x| \leq |V^{-1}| \cdot |\Delta x| \leq |V^{-1}| \Delta q \tag{25}$$

Dado que $V^{-1}AV$ es diagonal, para $w(t)$ es válido el teorema 3. Teniendo además en cuenta la desigualdad anterior, resulta

$$|w(t)| \leq |V^{-1}| \Delta q \tag{26}$$

Luego, de esta desigualdad y de la definición de $w(t)$ se obtiene

$$|e(t)| = |V w(t)| \leq |V| \cdot |w(t)| \leq |V| \cdot |V^{-1}| \Delta q = T \Delta q \leq \Delta e \tag{27}$$

[3] $|\cdot|$ denota el valor absoluto por componentes de la matriz o vector

lo que completa la demostración. □

La desigualdad (22) puede ser satisfechas mediante diversos juegos de cotas Δq. Una fórmula para satisfacer esta condición es la siguiente:

$$\Delta q_i = \frac{1}{n} \min_j \left(\frac{\Delta e_j}{T_{ji}}\right) \tag{28}$$

El teorema 4 y la ecuación (28) brindan una fórmula *práctica* para el cálculo de la cuantificación y el ancho de la ventana de histéresis que aseguran que el error en cada variable nunca sobrepase cierta cota Δe_j. Sin embargo, dicha fórmula requiere el cálculo de los autovectores de la matriz A. Si se tienen estos autovectores, es claro que se puede conocer muy fácilmente la solución exacta de (15), por lo que la simulación puede carecer de sentido (excepto que se busque simular para muchas entradas diferentes y complejas).

De todas formas, el análisis hecho muestra muchas propiedades teóricas de implicancia práctica y conceptual. Por un lado, puede verse que el error máximo en una simulación es una función lineal de la cuantificación adoptada. De esta manera, se pueden inferir reglas prácticas consistentes en ir modificando la cuantificación hasta obtener un resultado "adecuado". La identificación del orden del error en función del paso de integración en los métodos de tiempo discreto es la base para la formulación de algoritmos de adaptación automática de dicho paso. En este caso, esta puede ser la base para la futura formulación de algoritmos de cuantificación adaptiva.

Otra propiedad que se deduce del análisis es que cualquiera sea la cuantificación utilizada, siempre habrá una cota para el error en todo instante de tiempo. Esta es una característica que sólo poseen los métodos clásicos implícitos. Sin embargo, el método de cuantificación de estados no posee ninguna fórmula implícita, lo que constituye una ventaja considerable desde el punto de vista del costo computacional de la implementación.

5 Ejemplos y Resultados

En [5] se introduce el ejemplo del siguiente sistema, correspondiente a un circuito RLC serie.

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x_2} &= U - \frac{1}{C}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \\ y &= \frac{1}{L}x_2 \end{cases} \tag{29}$$

Con los parámetros $R = 100.01, L = 0.01, C = 0.01$, el sistema resulta stiff, ya que los autovalores de la matriz A son -1 y -10000. Utilizando una cuantificación uniforme de 10^{-2} y 10^{-4} para x_1 y x_2 respectivamente y aplicando una entrada constante $U = 100$ se obtiene la trayectoria de salida de las figuras 5 y 6. Los primeros 10 segundos de la simulación se realizan en 300 pasos y la trayectoria del error de salida es la de la Figura 7.

La utilización de la ecuación (22) da como resultado:

$$T\Delta q = |V| \cdot |V^{-1}|\Delta q \simeq \begin{bmatrix} 1.0002 & 0.02 \\ 0.02 & 1.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.0003 \end{bmatrix} \tag{30}$$

De esta forma, se puede garantizar que el error en la variable $x_2(t)$ será siempre menor que 0.0003, y luego, el error en la variable $y(t) = 100 \cdot x_2(t)$, no podrá superar el valor de 0.03. Como se desprende de la Figura 7, efectivamente el error no sobrepasa el valor de 0.006.

6 Conclusiones

Sumadas a las ventajas prácticas mostradas en trabajos anteriores, se presentaron y demostraron nuevas propiedades y características del método de simulación de ecuaciones diferenciales ordinarias por cuantificación de estados.

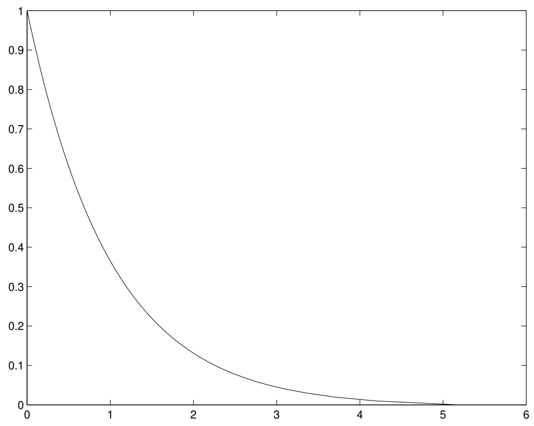

Figura 5: Trayectoria de $y(t)$ en la simulación con QSS

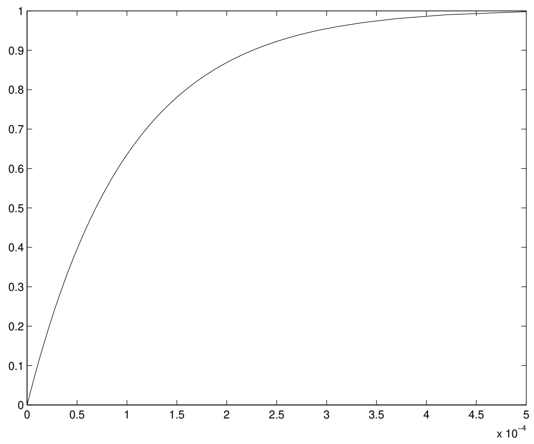

Figura 6: Primeros $500\mu s$ de la trayectoria de $y(t)$

Por un lado, las propiedades de convergencia deducidas tienen la importancia conceptual de garantizar que el método puede alcanzar un error tan pequeño como se quiera para sistemas generales con la única condición de que las funciones involucradas en el mismo sean Lipschitz. La mayor parte de los problemas de aplicación práctica satisfacen esta condición, ya que se trata de una condición suficiente para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación.

Por otro lado, del estudio del error en sistemas lineales se desprenden algunas características más que interesantes. Lo mas importante radica sin dudas en el hecho que el método garantiza un error acotado para cualquier cuantificación. Esta propiedad de estabilidad de la solución aproximada (que es una particularización de lo deducido en [4] para casos generales mediante un análisis basado en Lyapunov), tiene además como característica interesante la validez de la cota calculada en (22) para cualquier entrada seccionalmente constante y para cualquier condición inicial.

En lo que se refiere al trabajo futuro, en un primer lugar restaría deducir las cotas del error para matrices Hurwitz generales (no necesariamente diagonalizables y eventualmente con autovalores complejos con parte real negativa).

Si bien el método presenta ciertas ventajas con respecto a los métodos clásicos de tiempo discreto (por ejemplo, en el caso presentado en la Sección 5 la simulación mediante métodos no implícitos, incluyendo los de paso variable, requiere de al menos 30000 pasos para alcanzar una precisión similar), su utilización práctica se ve limitada por

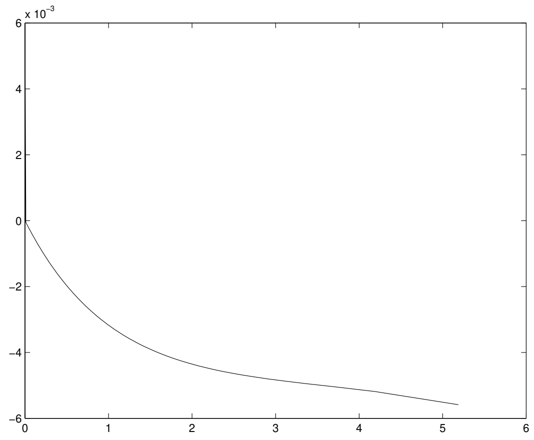

Figura 7: Error en la simulación con QSS

la necesidad de adopción de los intervalos de cuantificación. Esto puede superarse si se encuentran algoritmos de elección automática de dichos intervalos. Esto a su vez podría incluso solucionar el problema de aparición de oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio (la cuantificación provoca una perturbación permanente, por lo que en general no se alcanzan los puntos de equilibrio, sino que se permanece en una región pequeña alrededor de los mismos, como se demuestra en [4]).

Por otro lado, otra limitación del método es que al estar basado en una aproximación de primer orden, no puede alcanzarse una buena precisión salvo que se disminuyan considerablemente los intervalos de cuantificación (con el consecuente aumento del número de pasos y del costo computacional). La única forma de salvar este inconveniente es aumentando el orden de la aproximación. Una base para esta aproximación puede enontrarse en lo hecho en [3] utilizando secciones de polinomios en lugar de trayectorias seccionalmente constantes.

Referencias

[1] Press, W.H., Flannery B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[2] Zeigler, B. and Lee, J. S. "Theory of quantized systems: formal basis for DEVS/HLA distributed simulation environment,". *SPIE Proceedings.* Vol. 3369, pp. 49-58, 1998.

[3] Giambiasi, N. "Abstraction à évenements discrets de systèmes dynamiques,". *APII-Jesa.* Vol.32, No.3, pp. 275-311, 1999.

[4] E. Kofman. "Simulación de sistemas dinámicos por cuantificación de estados". In *Proceedings of AADECA 2000.* Buenos Aires, Argentina, Sep. 2000.

[5] E. Kofman and S. Junco, "Quantized State Systems. A DEVS approach for continuous system simulation". Technical Report LSD0004, LSD, FCEIA, UNR. Enviado a *Transactions of SCS*, 2000. Disponible en http://www.eie.fceia.unr.edu.ar/ lsd.

[6] Zeigler, B. *Theory of Modeling and Simulation.* New York: John Wiley & Sons, 1976.

[7] Zeigler, B. Kim, T. G. and Praehofer H. *Theory of Modeling and Simulation - Second Edition.* New York: Academic Press, 2000.

[8] E. Kofman. "Quantized Bond Graph. Una aproximación para la simulación de sistemas físicos por eventos discretos". In *Proceedings of AADECA 2000.* Buenos Aires, Argentina, Sep. 2000.

[9] E. Kofman and S. Junco, "Quantized Bond Graphs: An Approach for Discrete Event Simulation of Physical Systems". In *Proceedings of ICBGM'01*.pp. 369-374. Phoenix, Arizona, Ene. 2001.

[10] Khalil, H. *Nonlinear Systems.* 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.