

# Actuator Fault Diagnosis Using Probabilistic Ultimate Bounds

N. Pizzi, E. J. Kofman, M.M. Seron, and J. De Doná

**Abstract**— This work proposes a fault diagnosis scheme where the occurrence of failures is detected when certain trajectories reach some probabilistic sets, allowing the presence of unbounded disturbances. This is the first result that makes use of probabilistic sets, establishing a first connection between set-based and probabilistic fault diagnosis.

**Keywords**— Fault Diagnosis, Perturbed Systems, Probabilistic Ultimate Bounds.

## I. INTRODUCCIÓN

La operación segura y eficiente de los sistemas automáticos de control en las industrias modernas es esencial en vista de las crecientes demandas económicas, ambientales y de seguridad. Cuando ocurren fallas en alguno de los componentes del sistema, el desempeño del mismo normalmente se deteriora e incluso puede llegar a haber consecuencias catastróficas. La detección temprana de fallas en el funcionamiento del sistema, y el diagnóstico correcto de su origen, son críticos para tomar las medidas necesarias para acomodar, o reconfigurar, el sistema con vistas a adaptarse a la nueva situación.

Desde la introducción de las primeras técnicas de diagnóstico de fallas en la década de 1970, se han propuesto muchas metodologías de detección e identificación de fallas que pueden consultarse, por ejemplo, en los libros y trabajos de revisión literaria [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. La mayoría de estas técnicas se basan en el uso de observadores que proveen ‘redundancia analítica’. Estos observadores generan señales (comúnmente llamadas ‘residuos’) que actúan como indicadores de la presencia de fallas. En operación sin fallas, los residuos normalmente tienen valores pequeños causados por perturbaciones y otros tipos de incertidumbres. Cuando ocurre una falla, los valores de los residuos crecen y la falla es detectada si se supera cierto ‘umbral’ que se determina previamente en base a hipótesis sobre el sistema y señales externas.

Una metodología relacionada al principio de diagnóstico mediante residuos y umbrales se basa en verificar durante la operación del sistema la ‘pertenencia’ de los residuos a determinados ‘conjuntos’ que representan valores del estado consistentes con las mediciones del sistema [8, 9]. Dentro de este área de diagnóstico de fallas en base a conjuntos, los dos últimos autores del presente trabajo han propuesto en años recientes un nuevo método basado en el concepto de conjuntos invariantes y cotas finales [10, 11, 12, 13]. La característica más novedosa de este método es la posibilidad de proveer garantías de detección y diagnóstico, ya que los residuos (u otras señales de interés) convergen a estos conjuntos y

permanecen en ellos indefinidamente si no hay cambios en la situación de fallas. Esta metodología trata a las perturbaciones y otras fuentes de incertidumbre en forma determinística, asumiendo sólo que las perturbaciones son acotadas, sin necesidad de conocer si obedecen o no a alguna distribución probabilística.

Por otro lado, en muchas aplicaciones de la teoría de sistemas y control es más adecuado representar las perturbaciones como señales no acotadas, como por ejemplo el ruido blanco Gaussiano. En estos casos no es posible obtener cotas finales y conjuntos invariantes usando las técnicas determinísticas tradicionales [14]. Motivados por las limitaciones de estas técnicas, en el sentido de que no contemplan distribuciones más generales para las perturbaciones, hemos propuesto en [15, 16] los nuevos conceptos de cotas finales probabilísticas y conjuntos invariantes probabilísticos. Estos conceptos extienden los conceptos determinísticos de invariancia y cota final al caso estocástico mediante la consideración de ‘pertenencia en probabilidad’; de esa manera permiten el tratamiento de ruidos estocásticos con distribuciones más generales, incluyendo el ubicuo ruido blanco Gaussiano.

En este trabajo, siguiendo en parte el esquema determinístico desarrollado en [13], proponemos un esquema de detección de fallas en actuadores, reemplazando el empleo de conjuntos invariantes en dicho trabajo por cotas finales probabilísticas. De esta manera, ahora será posible considerar la presencia de ruido blanco no acotado.

El esquema en cuestión, similar al de la referencia citada pero sin reconfiguración del control, se encuentra representado en la Fig. 1.

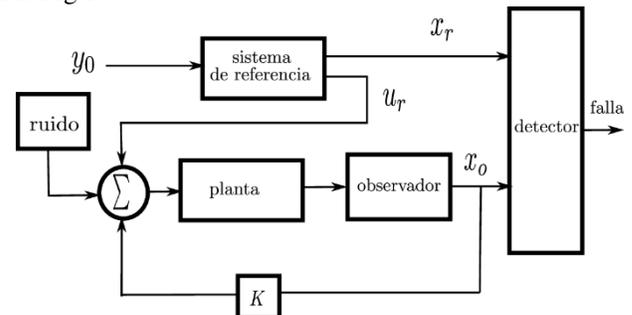


Figura 1. Esquema propuesto.

En el mismo, hay un sistema de control diseñado para que la planta siga la dinámica de un sistema de referencia. Dicho control utiliza un observador para realizar una realimentación de estados. El estado de la planta (medido por el observador) y el del sistema de referencia son comparados por el sistema de detección para determinar la eventual presencia de fallas. El sistema de detección en cuestión, que describiremos más adelante, hace uso de las cotas finales probabilísticas y sus

propiedades para diagnosticar si ocurre alguna falla y determinar cuál es ésta.

El artículo está organizado de la siguiente forma. Tras introducir los conceptos de cotas finales probabilísticas, la Sección II presenta el resultado principal que establece ciertas propiedades del filtrado de funciones indicatrices de dichos conjuntos que son luego utilizadas para proponer una técnica de diagnóstico. Luego, la Sección III ilustra con un ejemplo la técnica desarrollada y finalmente la Sección IV brinda las conclusiones del artículo.

### A. Cotas Finales Probabilísticas

Consideramos el sistema dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dx(t) = Ax(t)dt + dw(t) \quad (1)$$

con  $x(t), w(t) \in \mathbb{R}^n$ . Suponemos que  $A$  es una matriz Hurwitz, es decir, todos sus autovalores tienen parte real negativa, y que la perturbación  $w(t)$  es un proceso estocástico estacionario, con incrementos no correlacionados, media nula y con matriz de covarianza incremental  $\Sigma_w$  (es decir,  $w(t)$  es un proceso de Lévy que en el caso Gaussiano se reduce a un proceso de Wiener).

#### Definición 1. Cota Final Probabilística [16]

Sea  $p \in (0, 1]$  y sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $S$  es una cota final probabilística (en inglés, 'probabilistic ultimate bound', o PUB) con probabilidad  $p$  para el sistema (1) si para todo estado inicial  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe  $T = T(x_0) \in \mathbb{R}$  tal que la probabilidad  $P[x(t) \in S] \geq p$ , para cada  $t \geq t_0 + T$ .

Suponiendo que el ruido  $w(t)$  es Gaussiano, el método para calcular un PUB con probabilidad  $p$  para el sistema (1) es el siguiente:

- Primero, dada la probabilidad  $p$ , definimos  $n$  parámetros  $\tilde{p}_i \in (0, 1)$  tales que

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p.$$

- Luego, calculamos los valores

$$b_i \triangleq \sqrt{2[\Sigma_x]_{i,i}} \operatorname{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_i); \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

donde  $\Sigma_x$  es la solución de la ecuación de Lyapunov

$$A\Sigma_x + \Sigma_x A^T = -\Sigma_w \quad (3)$$

y  $\operatorname{erf}$  es la función error:  $\operatorname{erf}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$ .

Entonces, según el Teorema 16 de [16], el conjunto

$$S = \{x: |x_i| \leq b_i + \varepsilon; \quad i = 1, \dots, n\}$$

es una cota final probabilística para el sistema (1) con probabilidad  $p$  para cualquier vector  $\varepsilon > 0$ .

En el caso de ruido no Gaussiano, la Ec.(2) cambia por otra

expresión que se deduce de la desigualdad de Chebyshev (ver detalles en [16]).

## II. RESULTADO PRINCIPAL

### A. Formulación del Problema

Consideramos un sistema LTI perturbado descrito por

$$\begin{aligned} dx_p(t) &= Ax_p(t)dt + BPu(t)dt + Fdw(t), \\ y_p(t) &= Cx_p(t). \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w(t)$  es un proceso estocástico de Wiener con matriz de covarianza incremental  $\Sigma_w$ ,  $y_p(t) \in \mathbb{R}^q$  es la salida del sistema y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $F$  son matrices constantes de dimensiones adecuadas.

La matriz  $P$  es usada para modelar la ocurrencia de fallas en los actuadores. Siguiendo [13], definimos  $P$  de la siguiente manera,

$$P \triangleq \operatorname{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \quad P_i \in \{0, 1\}.$$

Así,  $P_i = 1$  significa que no hay falla en el  $i$ -ésimo actuador, mientras que  $P_i = 0$  modela la existencia de falla total en el  $i$ -ésimo actuador. En ausencia de falla,  $P$  es la matriz identidad.

Suponiendo que sólo puede fallar un actuador por vez podemos reescribir  $P = P^i$ , para  $i = 1, \dots, m$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P^0 &= I, \\ P^i &= \operatorname{diag}\left\{1, \dots, \underset{i}{0}, \dots, 1\right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

Por otro lado, consideramos que la planta sigue un sistema de referencia dado por

$$\begin{aligned} dx_r(t) &= Ax_r(t)dt + Bu_r(t)dt, \\ y_r(t) &= Cx_r(t), \end{aligned} \quad (6)$$

con la entrada  $u_r(t) = \bar{u}_r$  constante, de manera tal que la salida  $y_r(t)$  del sistema (6) siga exponencialmente una señal externa constante  $y_0$ .

Para obtener una estima del estado e implementar el control y detectar fallas en los actuadores, utilizamos un observador de la forma:

$$dx_o(t) = Ax_o(t)dt + Bu(t)dt + L(y_p(t) - Cx_o(t))dt, \quad (7)$$

con lo que el control en (4) será,

$$u(t) = K(x_o(t) - x_r(t)) + u_r(t), \quad (8)$$

donde  $K$  es la matriz de realimentación de estado.

Definiendo el error de seguimiento para la estimación del estado (que luego se utilizará como residuo) como

$$e_{or}(t) \triangleq x_o(t) - x_r(t), \quad (9)$$

reescribimos la ley de control (8) como sigue:

$$u(t) = Ke_{or} + u_r(t). \quad (10)$$

Definimos también el error de estimación del estado como

$$e_{po}(t) \triangleq x_p(t) - x_o(t). \quad (11)$$

Vamos a estudiar las dinámicas de los errores (9) y (11) cuando se aplica la entrada de control (10).

Considerando el sistema a lazo cerrado con (10), y utilizando las ecuaciones (6) y (7), la dinámica del error de seguimiento para el estado observado  $e_{or}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} de_{or}(t) &= dx_o - dx_r = \\ &= (A + BK)e_{or}(t)dt + LCe_{po}(t)dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Análogamente, utilizando las ecuaciones (4) y (7), la dinámica del error de estimación  $e_{po}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} de_{po}(t) &= dx_p - dx_o = \\ &= (A - LC)e_{po}(t)dt + B(P - I)Ke_{or}(t)dt + \\ &+ B(P - I)u_r(t)dt + Fdw \end{aligned} \quad (13)$$

Luego, combinando (12) y (13) y definiendo el vector

$$e(t) \triangleq \begin{bmatrix} e_{or}(t) \\ e_{po}(t) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} de(t) &= \begin{bmatrix} A + BK & LC \\ B(P - I)K & A - LC \end{bmatrix} e(t)dt + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ B(P - I) \end{bmatrix} u_r(t)dt + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} dw(t). \end{aligned} \quad (15)$$

**Observación 1** Para asegurar la estabilidad del sistema a lazo cerrado (15) bajo cualquier situación de falla considerada, debemos pedir que el control por realimentación  $K$  y la matriz  $L$  del observador en (7) sean tales que las matrices de lazo cerrado

$$A_\ell^i \triangleq \begin{bmatrix} A + BK & LC \\ B(P^i - I)K & A - LC \end{bmatrix} \quad (16)$$

sean Hurwitz para  $i = 0, \dots, n$ .

### B. Cálculo de las Cotas Finales con y sin Fallas

En esta sección vamos a calcular los conjuntos PUB para las trayectorias del estado del sistema a lazo cerrado descrito en (15).

Suponiendo que el sistema está bajo la  $i$ -ésima situación de falla ( $i = 0, \dots, m$ ) el sistema (15) puede reescribirse como

$$de(t) = [A_\ell^i e(t) + B_\ell^i u_r(t)]dt + Gdw(t), \quad (17)$$

con  $A_\ell^i$  definida en la Ec.(16) y con

$$B_\ell^i \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ B(P - I) \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Definimos entonces,

$$\bar{e}^i = \begin{bmatrix} \bar{e}^i_{or} \\ \bar{e}^i_{po} \end{bmatrix} \triangleq -(A_\ell^i)^{-1} B_\ell^i \bar{u}_r, \quad (19)$$

y considerando el cambio de variable  $\bar{e}^i(t) = e(t) - \bar{e}^i$ , el sistema (17), con  $u_r(t) = \bar{u}_r$  constante, puede expresarse como

$$d\bar{e}^i(t) = A_\ell^i \bar{e}^i(t)dt + Gdw(t). \quad (20)$$

De acuerdo a la Observación 1, la matriz  $A_\ell^i$  en (20) es Hurwitz y como  $w(t)$  es un proceso estocástico de Wiener con matriz de covarianza incremental  $\Sigma_w$ , podemos utilizar el Teorema 16 de [16] para calcular la cota final probabilística, para  $0 < p < 1$ , como

$$\tilde{S}^i = \{ \bar{e}^i \in \mathbb{R}^{2n}: |\bar{e}_j^i| \leq b_j^i + \varepsilon; j = 1, \dots, 2n \} \quad (21)$$

donde

$$b_j^i \triangleq \sqrt{2[\Sigma_x^i]_{j,j} \operatorname{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_j)}; j = 1, \dots, 2n, \quad (22)$$

con  $\tilde{p}_j \in (0,1)$  tales que

$$\sum_{j=1}^{2n} \tilde{p}_j = 1 - p, \quad (23)$$

y siendo  $\Sigma_x^i$  la solución de la ecuación de Lyapunov

$$A_\ell^i \Sigma_x^i + \Sigma_x^i (A_\ell^i)^T = -G \Sigma_w G^T.$$

Volviendo a las variables originales  $e(t)$ , los conjuntos  $\tilde{S}^i$  se transforman en

$$\tilde{S}^i = \{ e \in \mathbb{R}^{2n}: |e_j - \bar{e}_j^i| \leq b_j^i + \varepsilon; j = 1, \dots, 2n \}$$

que constituyen los PUB del sistema (15) en presencia de cada situación de falla.

### C. Técnica Propuesta de Diagnóstico

En la Ec. (14) definimos el vector de error  $e(t) \triangleq [e_{or}(t)^T \ e_{po}(t)^T]^T$ , pero, dado que la componente  $e_{po}(t)$  no puede ser medida, estaremos interesados en la dinámica del error de seguimiento para el estado observado  $e_{or}(t)$ .

Si el sistema permanece en la  $i$ -ésima situación de falla a lo largo del tiempo,  $e_{or}(t)$  convergerá, en el sentido PUB, al conjunto

$$S_{or}^i = \{ e_{or} \in \mathbb{R}^n: |e_{or} - \bar{e}_{or}^i| \leq b_{or}^i + \varepsilon \}, \quad (24)$$

donde  $b_{or}^i \triangleq [b_1^i, \dots, b_n^i]^T$ , de acuerdo a (22).

La técnica de diagnóstico de fallas propuesta se basa en la pertenencia o no de las trayectorias a los conjuntos  $S_{or}^i$ . Para

definirla, primero demostramos un lema que nos va a permitir obtener el resultado principal de este trabajo.

**Lema 1** *Supongamos que a partir de  $t_f^i$  el sistema se encuentra en la  $i$ -ésima situación de falla. Entonces, dado  $p \in (0,1)$ , existe  $T > 0$  tal que la probabilidad  $P[e_{or}(t) \in S_{or}^i] \geq p, \forall t \geq t_f^i + T$ .*

Demostración:

Como  $S^i$  es un PUB con probabilidad  $p$ , para todo estado inicial  $e(t_f^i) = e_0$ , existe  $T = T(e_0)$  tal que la probabilidad

$$P[e(t) \in S^i] \geq p, \forall t \geq t_f^i + T.$$

Además, si  $e(t) \in S^i$  resulta  $e_{or}(t) \in S_{or}^i$ , y entonces,

$$P[e_{or}(t) \in S_{or}^i] \geq P[e(t) \in S^i] \geq p, \forall t \geq t_f^i + T. \quad \blacksquare$$

Establecido este lema, el siguiente Teorema constituye el resultado principal del trabajo.

**Teorema 1** *Sea*

$$d^k(t) \triangleq \mathbf{1}_{S_{or}^k}(e_{or}(t)); \quad k = 0, \dots, m. \quad (25)$$

donde  $\mathbf{1}_S$  denota la función indicatriz del conjunto  $S$ . Consideramos además las ecuaciones diferenciales

$$\dot{d}_f^k(t) = -\lambda[d_f^k(t) - d^k(t)]; \quad k = 0, \dots, m, \quad (26)$$

con  $d_f^k(t_f^i) \in [0,1]$ . Supongamos que a partir de  $t_f^i$  el sistema se encuentra en la  $i$ -ésima situación de falla y que  $S_{or}^i \cap S_{or}^j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ . Entonces, si  $p > p^*$  y  $\lambda > 0$  es suficientemente chico, dado  $\hat{\delta} > 0$ , existe  $\hat{T} > 0$  tal que

$$P[d_f^i(t) < d_f^j(t)] < \hat{\delta} \quad \forall t > \hat{T},$$

donde  $p^* \approx 0.8133$  es la solución de

$$\sup_{\gamma > 0} [1 - 2e^{-\gamma} - 2\gamma(1-p)] = 0. \quad (27)$$

Demostración:

Dado  $t_0 \gg t_f^i$ , para todo  $\tau \geq t_0$ , el proceso  $e_{or}$  es Gaussiano y estacionario, y por lo tanto, uniformemente ergódico. Entonces, llamando  $C^i = \mathbb{R}^n \setminus S_{or}^i$  al complemento de  $S_{or}^i$  y tomando cualquier  $t_1 \geq t_0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_1+t} \mathbf{1}_{C^i}(e_{or}(\tau)) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{1}_{C^i}(e_{or}(t_1))] = p$$

uniformemente en  $t_1$ . En particular, dado  $\delta > 0$ , y  $\epsilon > 0$ , existe  $T > 0$  independiente de  $t_1$  tal que  $\forall t > T$ ,

$$P\left[\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^i(\tau)] d\tau \geq E[\mathbf{1}_{C^i}(e_{or}(t_1))] + \epsilon\right] < \delta$$

donde usamos el hecho que  $\mathbf{1}_{C^i}(e_{or}(\tau)) = 1 - d^i(\tau)$ .

Como  $E[\mathbf{1}_{C^i}(e_{or}(t_1))] = P[e_{or}(t_1) \notin S_{or}^i] = 1 - P[e_{or}(t_1) \in S_{or}^i] \leq 1 - p$  (por Lema 1), resulta, para todo  $t > T$ ,

$$P\left[\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^i(\tau)] d\tau \geq 1 - p + \epsilon\right] < \delta,$$

Luego, para  $\lambda > 0$ , resulta

$$P\left[\lambda \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^i(\tau)] d\tau \geq \lambda t(1 - p + \epsilon)\right] < \delta, \quad (28)$$

y teniendo en cuenta que  $e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} < 1$  si  $\tau < t + t_1$ , y que  $[1 - d^i(\tau)] \geq 0, \forall \tau$ ,

$$P\left[\lambda \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^i(\tau)] e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} d\tau > \lambda t(1 - p + \epsilon)\right] < \delta, \quad (29)$$

Por otro lado, resolviendo (26) para  $k = i$ ,

$$\begin{aligned} d_f^i(t_1 + t) &= e^{-\lambda t} d_f^i(t_1) + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} d^i(\tau) d\tau \\ &= e^{-\lambda t} d_f^i(t_1) + (1 - e^{-\lambda t}) - \\ &\quad - \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} [1 - d^i(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Usando (29), y que  $d_f^i(t_f^i) \geq 0 \Rightarrow d_f^i(t_1) \geq 0$  y por lo tanto  $e^{-\lambda t} d_f^i(t_1) \geq 0$ , resulta,

$$P[d_f^i(t_1 + t) < 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t(1 - p + \epsilon)] < \delta, \quad (30)$$

para todo  $t > T$ .

Resolviendo ahora la Ec.(26) para  $k = j$ , y teniendo en cuenta que  $d_f^j(t_f^i) \leq 1 \Rightarrow d_f^j(t_1) \leq 1$  y que,  $S_{or}^i \cap S_{or}^j = \emptyset \Rightarrow d^j(\tau) \leq 1 - d^i(\tau)$ , resulta

$$\begin{aligned} d_f^j(t_1 + t) &= e^{-\lambda t} d_f^j(t_1) + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} d^j(\tau) d\tau \\ &\leq e^{-\lambda t} + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} [1 - d^i(\tau)] d\tau \\ &\leq e^{-\lambda t} + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^i(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad y la Ec.(28), resulta

$$P[d_f^j(t_1 + t) > e^{-\lambda t} + \lambda t(1 - p + \epsilon)] < \delta. \quad (31)$$

De (30) y (31), usando propiedades de las probabilidades y operando, se obtiene,

$$P\left[\begin{aligned} &d_f^i(t_1 + t) - d_f^j(t_1 + t) < \\ &< 1 - 2e^{-\lambda t} - 2\lambda t(1 - p + \epsilon) \end{aligned}\right] < 2\delta,$$

para cualquier  $t_1 \geq t_0$  y para todo  $t > T$ .

Notar que una condición  $\alpha(t_1 + t) > \beta(t)$  para todo  $t_1 \geq t_0$  y para todo  $t > T$  implica que  $\alpha(t_0 + t) >$

$\sup_{\tau > T} \beta(\tau)$  para todo  $t \geq T_s \triangleq \text{argsup}_{\tau > T} \beta(\tau)$  y por lo tanto  $P[\alpha(t_1 + t) < \beta(t)] \geq P[\alpha(t_0 + t) < \sup_{\tau > T} \beta(\tau)]$ . Usando este razonamiento, resulta

$$P \left[ \begin{array}{l} d_f^i(t_0 + t) - d_f^j(t_0 + t) < \\ < \sup_{\tau > T} [1 - 2e^{-\lambda t} - 2\lambda t(1 - p + \epsilon)] \end{array} \right] < 2\delta,$$

para todo  $t \geq T_s$ . Sea  $\gamma \triangleq \lambda\tau$ ,

$$P \left[ \begin{array}{l} d_f^i(t_0 + t) - d_f^j(t_0 + t) < \\ < \sup_{\gamma > \lambda T} [1 - 2e^{-\gamma} - 2\gamma(1 - p + \epsilon)] \end{array} \right] < 2\delta, \quad (32)$$

Luego, siendo  $p^*$  la solución de (27) y calculando  $\gamma^* \approx 1.6783$  tal que  $1 - 2e^{-\gamma^*} - 2\gamma^*(1 - p^*) = 0$ , y, suponiendo que  $p > p^* + \epsilon$  y  $\lambda < \frac{\gamma^*}{T}$ , el supremo en (32) resulta mayor que cero y finalmente

$$P[d_f^i(t_0 + t) < d_f^j(t_0 + t)] < 2\delta, \quad \forall t > T_s,$$

y la prueba concluye tomando  $\hat{T} = t_0 + T_s$  y  $\hat{\delta} = 2\delta$ . ■

El Teorema 1 muestra que aplicando un filtrado de primer orden sobre las funciones indicatrices de los distintos conjuntos y esperando cierto tiempo  $\hat{T}$ , la probabilidad de que la señal filtrada correspondiente al estado de falla actual sea menor que la de cualquier otra puede hacerse arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, tomando como estado de falla al que tiene el mayor valor  $d_f^k$ , la probabilidad de error se torna arbitrariamente pequeña.

En base a esta idea, el esquema propuesto de detección es el de la Fig.2.

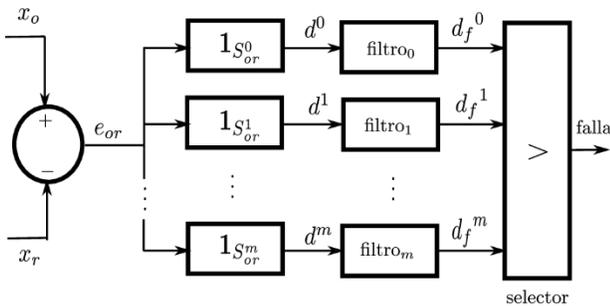


Figura 2. Esquema de detección propuesta.

### III. EJEMPLO

Consideramos el sistema descrito por (4) con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, y F = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

donde  $w(t)$  es un proceso de Wiener con covarianza incremental  $\Sigma_w dt = 1dt$ . La matriz de salida del sistema viene dada por  $C = [-0.1 \quad 0.5]$ .

Para este ejemplo tenemos tres posibles situaciones de falla (una por cada entrada y la restante cuando no hay falla).

La matriz del observador de la ecuación (7) se tomó como  $L = [4 \quad 6.8]^T$  y la ganancia de control por realimentación considerada en (8) se adoptó según

$$K = \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ -1 & -14 \end{bmatrix}.$$

Tomando  $p = 0.9$ , y la entrada de referencia  $u_r(t) = \bar{u}_r = [100 \quad 50]^T$  los conjuntos  $S_{or}^i$  a los que converge la componente  $e_{or}(t)$  del vector de estado  $e(t)$  del sistema a lazo cerrado (17), en el sentido PUB, para cada situación de falla pueden verse en la Figura 3.

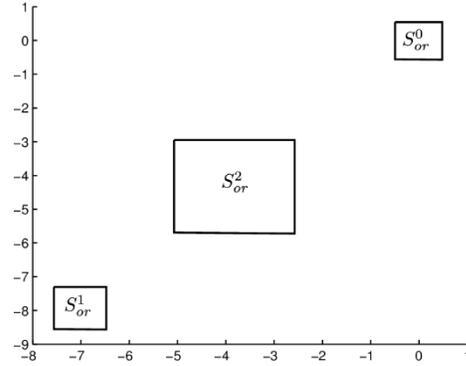


Figura 3. PUBs para cada situación de falla.

El bloque de diagnóstico, siguiendo el esquema de la Fig.2, se completó tomando como parámetro de los filtros pasabajos un tiempo de respuesta  $T_r = 1/\lambda = 10$ .

Para ensayar el esquema, se simuló el sistema durante 300 segundos, variando la situación de falla entre las 3 posibilidades mencionadas ( $i = 0, 1, \text{ ó } 2$ ) como se muestra en la curva punteada de la Fig.4. En la misma figura, puede verse también en línea sólida la salida del bloque de diagnóstico, el cual detecta correctamente la falla tras un lapso de tiempo del orden del tiempo de respuesta de los filtros utilizados.

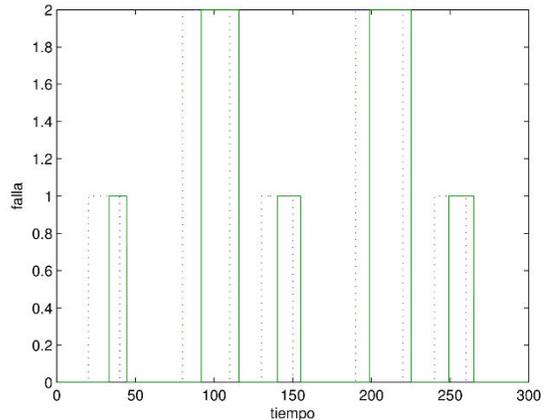


Figura 4. Situación de falla (línea punteada) y su correspondiente detección (línea sólida).

### IV. CONCLUSIONES

Se presentó un nuevo esquema de diagnóstico de fallas, cuya principal novedad es el uso de conjuntos probabilísticos

lo que permite considerar la presencia de perturbaciones no acotadas como el ruido blanco Gaussiano. El esquema propuesto garantiza el correcto diagnóstico con una probabilidad de error que puede hacerse arbitrariamente pequeña.

## REFERENCIAS

- [1] S. Ding, *Model-based Fault Diagnosis Techniques*. Springer, 2008.
- [2] R. Patton, P. Frank, and R. Clark, *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer, 2000.
- [3] M. Basseville and I. Nikiforov, *Detection of Abrupt Changes – Theory and Application*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [4] R. Isermann, *Fault-Diagnosis Systems. An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer, 2006.
- [5] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki, *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, 2nd ed. Springer, 2006.
- [6] J. Gertler, “Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, no. 6, pp. 3–11, 1988.
- [7] P. M. Frank and X. Ding, “Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems,” *Journal of Process Control*, vol. 7, no. 6, pp. 403–424, 1997.
- [8] V. Puig, “Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches: application to real case studies,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 20, no. 4, pp. 619–635, 2010.
- [9] A. Ingimundarson, V. Puig, T. Alamo, J. Bravo, and P. Guerra, “Robust fault detection using zonotope-based set-membership consistency test,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 23, no. 4, pp. 311–330, 2008.
- [10] M. Seron, X. Zhuo, J. De Doná and J. Martínez, “Multisensor switching control strategy with fault tolerance guarantees,” *Automatica*, vol. 44, no. 1, pp. 88–97, 2008.
- [11] S. Oлару, J.A. De Doná, M. Seron and F. Stoican, “Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes,” *International Journal of Control*, vol. 83, no. 12, pp. 2622–2640, December 2010.
- [12] M. Seron, J. De Doná and S. Oлару, “Fault tolerant control allowing sensor healthy-to-faulty and faulty-to-healthy transitions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 77, no. 7, pp. 1657–1669, 2012.
- [13] C. Ocampo-Martínez, J. De Doná and M. Seron, “Actuator fault-tolerant control based on set separation,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 24, no. 12, pp. 1070–1090, 2010.
- [14] F. Blanchini and S. Miani, *Set-theoretic methods in control*. Birkhauser, 2007.
- [15] E. Kofman, J. De Doná, and M. Seron, “Probabilistic set invariance and ultimate boundedness,” *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2670–2676, 2012.
- [16] E. Kofman, J. De Doná, M. Seron, and N. Pizzi, “Probabilistic Set Invariance and Ultimate Boundedness of Continuous-Time Systems,” in *IFAC World Congress 2014, Ciudad del Cabo, Sudáfrica*, 2014.



**Maria M. Seron** received the Electronic Engineer degree from the Universidad Nacional de Rosario, Argentina in 1988 and the PhD degree from The University of Newcastle, Australia in 1996. During 1997-1998, she held post-doctoral positions in Belgium, Australia and the USA. From 1999 to 2002, she was an Associate Professor with the Department of Electronic Engineering, Universidad Nacional de Rosario, Argentina. Since 2002, she has been a Research Fellow with the Centre for Complex Dynamic Systems and Control, The University of Newcastle, Australia. Her research interests include constrained control, fault tolerant control and hybrid systems.



**José A. De Doná** received the B.E. degree from the Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina, in 1989 and the Ph.D. degree from the University of Newcastle, Callaghan, Australia, in 2000. During 2000, he held post-doctoral positions in the Universities of Liege and Gent in Belgium. Since 2001, he has held various positions at the School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Newcastle, where he is currently an Associate Professor. From 2008 to 2009, he held a Visiting Academic position at Ecole des Mines de Paris, Paris, France. His research interests include constrained control and estimation, model predictive control, nonlinear control, and fault-tolerant control systems.



**Noelia Pizzi** received the B.Sc. degree in Mathematics in 2013 from the Universidad Nacional de Rosario, Argentina and she currently is Ph.D. student in Mathematics. She works as a teaching assistant at the Universidad Nacional de Rosario, Argentina, and she is a research fellow from the Argentine Research Council (CONICET). His research interests include probabilistic set invariance and ultimate bounds, stochastic equations and control system theory.



**Ernesto Kofman** received the Electronics Engineering degree in 1999 and the Ph.D. degree in 2003, both from the Universidad Nacional de Rosario, Argentina. He currently works as an adjoint professor at the Universidad Nacional de Rosario, Argentina, and holds a research position from the Argentine Research Council (CONICET). His research interests include discrete event and hybrid systems simulation, numerical methods for ordinary differential equations and quantized and sampled-data control systems.