

Control tolerante a fallas en tiempo discreto basado en conjuntos probabilísticos. Teoría.

Nicolás Soncini*, Noelia Pizzi†, Ernesto Kofman*†,

*FCEIA - Universidad Nacional de Rosario

Email: soncininicolos@gmail.com

†CIFASIS - CONICET

Email: pizzi, kofman@cifasis-conicet.gov.ar

Resumen—En este trabajo se desarrolla una nueva técnica de control tolerante a fallas en actuadores para sistemas de tiempo discreto. Esta técnica, basada en una existente para sistemas de tiempo continuo, las fallas se detectan a partir de la pertenencia de ciertas variables a conjuntos determinados por cotas finales probabilísticas. Además de presentar la metodología de detección y reconfiguración de control, se demuestran las principales propiedades teóricas del esquema.

Index Terms—control tolerante a fallas, conjuntos probabilísticos, sistemas perturbados.

I. INTRODUCCIÓN

En muchos sistemas de control automáticos que se utilizan en la práctica es de suma importancia garantizar el adecuado desempeño ante la eventual ocurrencia de fallas en algunos de sus componentes. Esto puede lograrse mediante la detección y el diagnóstico temprano de dichas fallas y la reconfiguración del sistema de control para adaptarlo a la nueva situación.

En la literatura pueden encontrarse diferentes metodologías de detección e identificación de fallas [1]–[3]. La mayoría de las técnicas se basan en el uso de observadores que generan señales (llamadas residuos) que actúan como indicadores de la presencia de fallas. En ausencia de fallas estos residuos asumen valores pequeños causados por perturbaciones. Cuando ocurre una falla en el sistema, los valores de los residuos aumentan y permiten detectar la falla al superarse cierto umbral, el cual es determinado previamente en base a ciertas hipótesis sobre el sistema y las señales externas.

Una estrategia relacionada al diagnóstico mediante residuos y umbrales consiste en verificar durante la operación del sistema la pertenencia de los residuos a determinadas regiones que representan valores del estado consistentes con las mediciones del sistema [4]. Estas regiones en ciertos casos constituyen *conjuntos invariantes* y *cotas finales* [5]–[7], lo que provee garantías para la detección y diagnóstico ya que los residuos convergen a dichos conjuntos y permanecen en ellos indefinidamente si no hay cambios en la situación de fallas. La limitación de esto es que para garantizar la existencia de dichos conjuntos debe asumirse que las perturbaciones que afectan al sistema son acotadas lo que deja afuera la posibilidad de utilizar modelos de ruido blanco gaussiano.

En [8], [9] se desarrollaron los conceptos de *Cota Final Probabilística* y *Conjunto Invariante Probabilístico* que extienden al caso estocástico las nociones de invariancia y cota

final permitiendo incorporar la presencia de ruido no acotado. Estos conceptos fueron aplicados en problemas de diseño de control robusto [9] y en el diagnóstico de fallas en sistemas continuos [10] entre otras aplicaciones.

En particular, en [10] se presenta una estrategia de control tolerante a fallas en actuadores basado en conjuntos probabilísticos que permite garantizar el correcto diagnóstico de las fallas con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña y que, bajo ciertas condiciones, garantiza la estabilidad del sistema a lazo cerrado ante la ocurrencia de secuencias arbitrarias de fallas.

En este trabajo proponemos entonces extender la estrategia del artículo citado para sistemas de tiempo discreto, modificando para ello la forma de calcular los conjuntos, la técnica de detección de fallas y la demostración de las principales propiedades teóricas. En la segunda parte de este trabajo [11] veremos la aplicación de esta estrategia en un problema de robótica móvil.

II. PRELIMINARES

II-A. Cotas Finales Probabilísticas

Sea el sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) discreto de la forma

$$x(t+1) = Ax(t) + w(t)$$

con $x(t), w(t) \in \mathbb{R}^n$. Donde cada una de las componentes del vector w es una secuencia aleatoria independiente e idénticamente distribuida de media cero. Se define una cota final probabilística para el sistema dado de la siguiente manera ([8], [12]):

Definición 1. Dado $0 < p \leq 1$ y $S \subset \mathbb{R}^n$, decimos que S es una cota final probabilística (PUB por sus siglas en inglés) con probabilidad p para el sistema $x(t+1) = Ax(t) + w(t)$ si para cada estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $T = T(x_0) \in \mathbb{N}$ tal que la probabilidad $\Pr[x(t) \in S] \geq p$ para cada $t \geq t_0 + T$.

II-B. Control Tolerante a Fallas en Tiempo Continuo

La técnica propuesta en [10] para sistemas de tiempo continuo utiliza el esquema de la Fig.1. En el mismo, el objetivo es que la salida de la planta siga una señal de referencia y_0 , para lo cual un sistema de referencia (que cuenta con un modelo de

la planta) calcula una referencia para los estados y las entradas de la planta.

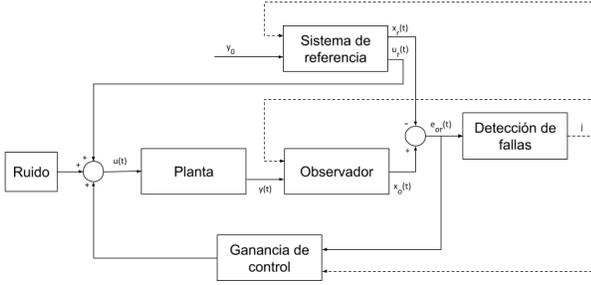


Figura 1. Esquema de control propuesto

Los estados de la planta se estiman mediante un observador y se comparan con los estados del sistema de referencia. Las situaciones de falla se detectan en función de la diferencia entre los estados observados y los estados de referencia. Más precisamente, para cada posible situación de falla se calcula un conjunto (dado por una cota final probabilística) al cual dicha diferencia debería converger con cierta probabilidad. Luego, en función del tiempo promedio de permanencia en dichos conjuntos de esta señal de residuo, se determina cuál es la situación de falla en un momento dado.

Al detectarse un cambio en la situación de falla, se reconfiguran los parámetros del control, del sistema de referencia, del observador y del propio mecanismo de detección de fallas, de manera que en esta nueva situación el sistema completo funcione correctamente.

Para este esquema, se demostró que las fallas pueden detectarse con probabilidad de error arbitrariamente pequeña y que las sucesivas reconfiguraciones ante la detección de una secuencia arbitraria de fallas garantizan que el sistema completo preserve la estabilidad práctica del sistema conmutado resultante.

III. ESQUEMA EN TIEMPO DISCRETO

La estrategia que proponemos en este trabajo es la extensión a tiempo discreto de la de [10], compartiendo por lo tanto el esquema básico de la Fig.1.

A continuación presentamos los modelos correspondientes a cada componente.

III-A. Modelo de la planta

La planta es un sistema LTI perturbado por ruido blanco

$$\begin{aligned} x_p(t+1) &= Ax_p(t) + BPu(t) + Fw(t) \\ y_p(t) &= Cx_p(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $w(t)$ es un vector de ruido gaussiano con media cero y matriz de auto-covarianza Σ_w , $y_p(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de salidas, y A , B , C y F son matrices constantes de dimensiones apropiadas que

representan la matriz de estados, matriz de entrada, matriz de salida y matriz de ruido respectivamente.

Al igual que en [10], la matriz P es utilizada para modelar los casos de falla de actuadores del sistema, donde

$$\begin{aligned} P &\triangleq \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \quad 0 \leq P_k \leq 1 \\ 0 < P_k < 1 &\iff \text{falla parcial en actuador } k \\ 0 = P_k &\iff \text{falla total en actuador } k \\ 1 = P_k &\iff \text{ninguna falla en actuador } k \end{aligned}$$

de manera que en ausencia de fallas P es la matriz de identidad. En nuestro caso consideraremos un número finito de fallas posibles del sistema, representadas por $P = P^i$ (para $i = 0, \dots, q$) que definimos como

$$P^0 = I, \quad P^i = \text{diag}\{P_1^i, P_2^i, \dots, P_m^i\}.$$

De aquí en más asumiremos que el sistema (1) es estabilizable para todos los valores posibles de P considerados. Además denotaremos la falla que está afectando al sistema con un supra índice ($P = P^j$), con lo cual obtenemos la siguiente notación para la dinámica del sistema

$$\begin{aligned} x_p(t+1) &= Ax_p(t) + BP^j u(t) + Fw(t) \\ y_p(t) &= Cx_p(t) \end{aligned} \quad (2)$$

III-B. Planta de referencia

Utilizaremos un sistema de referencia para computar la entrada de referencia $u_r(t)$, y la trayectoria de los estados del sistema, $x_r(t)$. Bajo la j -ésima situación de falla estas trayectorias de referencia satisfacen el modelo libre de perturbaciones dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_r(t+1) &= Ax_r(t) + BP^j u_r(t) \\ y_r(t) &= Cx_r(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde la entrada

$$u_r(t) = \bar{u}_r^j + \Delta u_r(t) \quad (4)$$

se computa bajo una ley de control tal que $y_r(t)$ sigue exponencialmente la salida de referencia y_0 (esto es $\lim_{t \rightarrow \infty} [y_r(t) - y_0(t)] = 0$). Este último es el valor que finalmente queremos que describa nuestra salida de la planta y_p .

La entrada de referencia $u_r(t)$ está compuesta por una parte constante \bar{u}_r^j y una parte variable $\Delta u_r(t)$, donde \bar{u}_r^j representa la entrada en la situación del sistema en equilibrio, y $\Delta u_r(t)$ las variaciones en torno a la primera. Bajo condiciones de estabilidad, la segunda componente tiende a cero a medida que las trayectorias del sistema se aproximan al equilibrio.

III-C. Observador de planta

El observador del esquema configurado para la j -ésima situación de falla está caracterizado por

$$x_o(t+1) = Ax_o(t) + BP^j u(t) + L_j(y_p(t) - Cx_o(t)) \quad (5)$$

para $j = 0, \dots, q$. Las propiedades y restricciones que hacen a las matrices L_j se verán más adelante al analizar la dinámica de lazo cerrado.

III-D. Ganancia de Control

La entrada de la planta se calcula con la siguiente ley de realimentación:

$$u(t) = K_j(x_o(t) - x_r(t)) + u_r(t) \quad (6)$$

donde K_j es la matriz de ganancia de realimentación diseñada para la j -ésima situación de falla.

IV. DINÁMICA Y PROPIEDADES DEL ESQUEMA

IV-A. Dinámica de lazo cerrado

De aquí en más consideraremos que el sistema está configurado para la j -ésima situación de falla y atravesando la i -ésima (con $i, j \in \{0, \dots, m\}$ las situaciones de falla consideradas).

Definiendo el error de seguimiento de la estimación de estado (que será utilizado como residuo) según

$$e_{or}(t) \triangleq x_o(t) - x_r(t), \quad (7)$$

la ley de control (6) puede reescribirse como

$$u(t) = K_j e_{or}(t) + u_r(t). \quad (8)$$

Definimos además el error de estimación de estado:

$$e_{po}(t) \triangleq x_p(t) - x_o(t). \quad (9)$$

Considerando el sistema de lazo cerrado con control (8), y utilizando las ecuaciones (1), (3) y (5), las dinámicas del error de seguimiento de la estimación de estado $e_{or}(t)$ puede escribirse como

$$e_{or}(t+1) = (A + BP^j K_j) e_{or}(t) + L_j C e_{po}(t) \quad (10)$$

De forma similar, utilizando (1) y (5), la dinámica del error de estado $e_{po}(t)$ pueden reescribirse como

$$e_{po}(t+1) = (A - L_j C) e_{po}(t) + B(P^i - P^j) K_j e_{or}(t) + B(P^i - P^j) u_r(t) + F w(t)$$

y definiendo $e(t) \triangleq [e_{or}(t) \ e_{po}(t)]^T$ se obtiene

$$e(t+1) = \begin{bmatrix} A + BP^j K_j & LC \\ B(P^i - P^j) K_j & A - LC \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B(P^i - P^j) \end{bmatrix} u_r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} w(t) \quad (11)$$

que modela la dinámica de lazo cerrado.

Observación 1. Supondremos que las matrices de ganancia de realimentación K_j y del observador L_j fueron diseñadas tales que

$$A_\ell^{i,j} = \begin{bmatrix} A + BP^j K_j & L_j C \\ B(P^i - P^j) K_j & A - L_j C \end{bmatrix} \quad (12)$$

para todo par $i, j \in \{0, \dots, q\}$ resulte estable (es decir, que los autovalores de $A_\ell^{i,j}$ se encuentren estrictamente dentro del círculo unitario).

IV-B. Cotas finales probabilísticas

Si asumimos que el sistema está configurado para la j -ésima situación de falla y atravesando la i -ésima (con $i, j \in \{0, \dots, m\}$) podemos reescribir la ecuación (11) como

$$e(t+1) = A_\ell^{i,j} e(t) + B_\ell^{i,j} u_r(t) + G w(t), \quad (13)$$

con $A_\ell^{i,j}$ definida en (12), $B_\ell^{i,j} \triangleq [0 \ B(P^i - P^j)]^T$ y $G \triangleq [0 \ F]^T$. Luego, utilizando el término de referencia de entrada constante de (4) podemos definir $\bar{e}^{i,j} = [\bar{e}_{or}^{i,j} \ \bar{e}_{po}^{i,j}]^T \triangleq (I - A_\ell^{i,j})^{-1} B_\ell^{i,j} \bar{u}_r^j$, y considerando el cambio de coordenadas $\tilde{e}^{i,j}(t) = e(t) - \bar{e}^{i,j}$ el sistema en (13) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \tilde{e}^{i,j}(t+1) &= A_\ell^{i,j} e(t) + B_\ell^{i,j} u_r(t) + G w(t) - \bar{e}^{i,j} \\ &= A_\ell^{i,j} \tilde{e}^{i,j}(t) + B_\ell^{i,j} \Delta u_r(t) + G w(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Dado que en el cálculo de PUBs sólo nos interesa el comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$, podemos ignorar el término $B_\ell^{i,j}$ del mismo, ya que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u_r(t) = 0$.

Como mencionamos en la Observación 1, la matriz $A_\ell^{i,j}$ en (14) es estable, y dado que $w(t)$ es ruido blanco gaussiano de media cero y matriz de auto-covarianza Σ_w , podemos utilizar el Teorema 14 de [8] para calcular la cota final, para $0 < p < 1$, como

$$\tilde{S}^{i,j} = \{\tilde{e}^{i,j} \in \mathbb{R}^{2n} : |\tilde{e}_k^{i,j}| \leq b_k^{i,j} + \epsilon; k = 1, \dots, 2n\} \quad (15)$$

donde $b_k^{i,j} \triangleq \sqrt{2[\Sigma_x^{i,j}]_{k,k} \text{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_k)}$ con $\tilde{p}_k \in (0, 1)$ tal que $\sum_{k=1}^{2n} \tilde{p}_k = 1 - p$, siendo $\Sigma_x^{i,j}$ la solución de la ecuación discreta de Lyapunov

$$A_\ell^{i,j} \Sigma_x^{i,j} (A_\ell^{i,j})^T + \Sigma_x^{i,j} = -G \Sigma_w G^T,$$

y erf es la función de error: $\text{erf}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$.

Volviendo a las coordenadas originales ($e(t)$), el conjunto $\tilde{S}^{i,j}$ se transforma en

$$S^{i,j} = \{e \in \mathbb{R}^{2n} : |e_k - \bar{e}_k^{i,j}| \leq b_k^{i,j} + \epsilon; k = 1, \dots, 2n\}, \quad (16)$$

que representa una cota final probabilística para el sistema (11) configurado para la j -ésima falla y transcurriendo la i -ésima falla.

IV-C. Diagnóstico de fallas

Calculados los PUBs correspondientes a cada falla, el diagnóstico se basa en comprobar si el residuo $e(t)$ se ha asentado dentro de alguno de estos conjuntos. Como sólo podemos observar los componentes del residuo $e(t)$ correspondientes a $e_{or}(t)$ ($e_{po}(t)$ es inaccesible), utilizaremos los siguientes conjuntos dados por

$$S_{or}^{i,j} = \{e_{or} \in \mathbb{R}^n : |e_{or} - \bar{e}_{or}^{i,j}| \leq b_{or}^{i,j} + \bar{\epsilon}\},$$

donde $\bar{\epsilon} \triangleq [\epsilon, \dots, \epsilon]$, $b_{or}^{i,j} \triangleq [b_1^{i,j}, \dots, b_n^{i,j}]^T$, y el símbolo \leq representa la desigualdad componente a componente de los vectores correspondientes.

De esta manera el diagnóstico de fallas se basará en verificar si el error $e_{or}(t)$ se encuentra dentro de uno de los conjuntos S_{or} a partir de la propiedad que establece el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [10].

Lema 1. Dado el sistema de la Ec.(13) configurado para la falla j y transcurriendo la i -ésima falla desde el instante de tiempo t_f^i . Entonces, dado $p \in (0, 1)$, existe un $T > 0$ tal que la probabilidad $\Pr[e_{or}(t) \in S_{or}^{i,j}] \geq p$, $\forall t \geq t_f^i + T$.

Debido a la presencia de ruido no acotado, el residuo $e(t)$ puede escaparse con cierta probabilidad de los PUBs calculados para la situación correspondiente ingresando incluso a conjuntos que se corresponden a otra situación de falla. Para evitar que esto implique un diagnóstico incorrecto de la falla, lo que se hará es buscar en qué conjunto estuvo más frecuentemente el residuo durante los últimos intervalos de muestreo, para lo cual se calculará la media móvil sobre la función indicatriz de cada conjunto aplicada al residuo.

El siguiente teorema demuestra que si esta media móvil utiliza una ventana suficientemente grande, la probabilidad de realizar un diagnóstico incorrecto de las fallas se hace arbitrariamente pequeña.

Teorema 1. Sea el sistema de la Ec.(13) bajo la configuración j y transcurriendo la i -ésima situación de falla desde el instante de tiempo t_f^i . Asumiendo que los conjuntos PUB son disjuntos ($S_{or}^{i,j} \cap S_{or}^{k,j} = \emptyset$) para $i \neq k$, y definiendo

$$d^{k,j}(t) \triangleq \mathbf{1}_{S_{or}^{k,j}}(e_{or}(t)); \quad k = 0, \dots, q, \quad (17)$$

donde $\mathbf{1}_S$ es la función indicatriz del conjunto S . Definiendo también la media móvil

$$\check{d}_N^{k,j}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\tau=t-N}^t d^{k,j}(\tau); \quad k = 0, \dots, q. \quad (18)$$

con $N > 0$ y suponiendo que la probabilidad del PUB es $p > \frac{1}{2}$ y el parámetro N es lo suficientemente grande, entonces dado $\delta > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\Pr \left[\check{d}_N^{i,j}(t) < \check{d}_N^{k,j}(t) \right] < \delta; \quad \forall t > T. \quad (19)$$

Demostración. Dado $t_0 \gg t_f^i$, para cada $\tau \geq t_0$, $e_{or}(\tau)$ es un proceso gaussiano uniformemente ergódico y estacionario. Sea $C^{i,j} \triangleq \mathbb{R}^n \setminus S_{or}^{i,j}$ el complemento de $S_{or}^{i,j}$. Tomando $t_1 \geq t_0$ resulta

$$\frac{1}{N} \sum_{\tau=t_1}^{t_1+N} \mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(\tau)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p} \mathbf{E}[\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(t_1))]$$

uniformemente en t_1 . En particular, dados $\frac{\delta}{2} > 0$ y $\epsilon > 0$, existe $N_0 > 0$ independiente de t_1 tal que para todo $N > N_0$

$$\Pr \left[\frac{1}{N} \sum_{\tau=t_1}^{t_1+N} [1 - d^{i,j}(\tau)] \geq \mathbf{E}[\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(t_1))] + \epsilon \right] < \frac{\delta}{2},$$

donde se usó que $\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(\tau)) = 1 - d^{i,j}(\tau)$.

Como $\mathbf{E}[\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(t_1))] = \Pr[e_{or}(t_1) \notin S_{or}^{i,j}] = 1 - \Pr[e_{or}(t_1) \in S_{or}^{i,j}] \leq 1 - p$, entonces, para cada $N > N_0$

$$\Pr \left[\frac{1}{N} \sum_{\tau=t_1}^{t_1+N} [1 - d^{i,j}(\tau)] \geq 1 - p + \epsilon \right] < \frac{\delta}{2}.$$

Además,

$$\begin{aligned} & \Pr \left[\frac{1}{N} \sum_{\tau=t_1}^{t_1+N} [1 - d^{i,j}(\tau)] \geq 1 - p + \epsilon \right] \\ &= \Pr \left[\frac{1}{N} \sum_{\tau=t_1}^{t_1+N} 1 - \frac{1}{N} \sum_{\tau=t_1}^{t_1+N} d^{i,j}(\tau) \geq 1 - p + \epsilon \right] \\ &= \Pr \left[1 - \check{d}_N^{i,j}(t_1 + N) \geq 1 - p + \epsilon \right] \\ &= \Pr \left[\check{d}_N^{i,j}(t_1 + N) < p - \epsilon \right], \end{aligned}$$

lo cual resulta en

$$\Pr \left[\check{d}_N^{i,j}(t_1 + N) < p - \epsilon \right] < \frac{\delta}{2}. \quad (20)$$

Dado que $S_{or}^{i,j} \cap S_{or}^{k,j} = \emptyset \stackrel{i \neq k}{\Rightarrow} d^{k,j}(\tau) \leq 1 - d^{i,j}(\tau) \Rightarrow \check{d}_N^{i,j}(\tau) \leq 1 - \check{d}_N^{k,j}(\tau)$, y utilizando (20) podemos derivar que

$$\Pr \left[\check{d}_N^{k,j}(t_1 + N) > 1 - p + \epsilon \right] < \frac{\delta}{2}. \quad (21)$$

De las Ecs.(20) y (21) obtenemos que

$$\Pr \left[\check{d}_N^{i,j}(t_1 + N) - \check{d}_N^{k,j}(t_1 + N) < 2p - 2\epsilon - 1 \right] < \delta, \quad (22)$$

para cualquier $t_1 \geq t_0$ y $N > N_0$. Luego, podemos asegurar que

$$\Pr \left[\check{d}_N^{i,j}(t_0 + N) - \check{d}_N^{k,j}(t_0 + N) < 2p - 2\epsilon - 1 \right] < \delta. \quad (23)$$

Si asumimos que p fue elegido de tal forma que $p > \frac{1}{2} + \epsilon$, obtenemos $2p - 2\epsilon - 1 > 0$ y luego

$$\Pr \left[\check{d}_N^{i,j}(t_0 + N) < \check{d}_N^{k,j}(t_0 + N) \right] < \delta; \quad \forall N > N_0, \quad (24)$$

lo que concluye la prueba tomando $T = t_0 + N_0$. \square

El Teorema 1 nos muestra que si el sistema está configurado para la j -ésima falla y en tiempo t_f^i ocurre la i -ésima falla, cuando N es suficientemente grande la media móvil simple de la función indicatriz del i -ésimo conjunto tendrá una probabilidad arbitrariamente pequeña de hacerse más pequeña que cualquier otra señal. Esto es, podemos diagnosticar la ocurrencia de la i -ésima falla con una probabilidad arbitrariamente pequeña de error.

IV-D. Estrategia de reconfiguración

Cuando ocurre un cambio en la situación de falla y el mismo es diagnosticado a partir de la media móvil antes descrita, se procede a reconfigurar los sistemas de control, observador y referencia según la falla detectada cambiando los valores de K_j , L_j y P^j por los de K_i , L_i y P^i donde i es la falla diagnosticada.

Dado que el Teorema 1 sólo garantiza la detección de una nueva falla tras cierto tiempo suficientemente largo T , tras la reconfiguración, se debe esperar cierto tiempo antes de activar nuevamente el mecanismo de diagnóstico. Al iniciarse este período de espera, se deben además inicializar en cero los filtros que calculan la media móvil de manera de evitar que los mismos contengan información correspondiente a la configuración de falla previa.

IV-E. Estabilidad del Esquema Completo

Si bien se pide que cada posible configuración preserve la estabilidad ante la ocurrencia de cualquier falla, esto de por sí no garantiza que el esquema preserve la estabilidad ante cualquier secuencia de fallas y reconfiguraciones. En general, la estabilidad de cada modo no garantiza la estabilidad de un sistema que conmuta entre dichos modos.

En virtud de esta observación, el siguiente teorema establece condiciones suficientes para garantizar que el esquema resulte estable en el sentido que las trayectorias converjan a una cota final probabilística.

Teorema 2. *Sea el sistema de la Ec.(13). Supongamos que todos los autovalores de las matrices $A_\ell^{i,j}$ recaen en el círculo unitario y que la señal de entrada de referencia $\bar{u}_r(t)$ es acotada. Asumamos también que los intervalos de conmutación están acotados por debajo por un valor $T > 0$ suficientemente grande, tal que $\|(A_\ell^{i,j})^t\| < 1$ para todo $t > T$ y todo par (i, j) . Entonces, dada una probabilidad arbitraria $0 < p < 1$, se puede encontrar un PUB acotado S con probabilidad p para el sistema.*

Demostración. Como en [10] comenzamos formando una sucesión t_k a partir de una sucesión de conmutaciones arbitraria $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \tau_{j+1}, \dots$ que satisfaga $\tau_1 \geq t_0 + T$, de la siguiente forma

$$t_{k+1} = \begin{cases} \tau_j & \text{si } \tau_j \text{ es tal que } t_k + T \leq \tau_j \leq t_k + 2T \\ t_k + T & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notar que $\{\tau_k\}$ está contenido en $\{t_k\}$ y los puntos adicionales son añadidos para satisfacer

$$T \leq t_{k+1} - t_k < 2T \quad (25)$$

Sea $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Como no hay instancias de conmutación en dicho intervalo, la solución de (13) es

$$\begin{aligned} e(t) &= A_\ell^{i,j(t-t_k)} e(t_k) + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) \right) \\ &+ \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} Gw(\tau) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Aplicando la función de esperanza en ambos lados se obtiene

$$\begin{aligned} E[e(t)] &= E \left[A_\ell^{i,j(t-t_k)} e(t_k) + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} Gw(\tau) \right) \right] \\ &= A_\ell^{i,j(t-t_k)} E[e(t_k)] + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) \right) \end{aligned}$$

donde se anula un término ya que $E[w(t)] = 0$.

Tomando luego norma 2,

$$\begin{aligned} \|E[e(t)]\| &= \|A_\ell^{i,j(t-t_k)} E[e(t_k)] + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) \right)\| \\ &\leq \|A_\ell^{i,j(t-t_k)}\| \|E[e(t_k)]\| \\ &\quad + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(\|A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} B_\ell^{i,j}\| \|u_r(\tau)\| \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Definamos

$$\gamma \triangleq \max_{i,j} \sup_{\tau > T} \|A_\ell^{i,j(\tau)}\|; \quad v \triangleq \max_{i,j} \sup_{\tau > 0} \|A_\ell^{i,j(\tau)}\| \quad (28)$$

Notar que cuando $\tau > T$ obtenemos $\|A_\ell^{i,j(\tau)}\| < 1$ y entonces $\gamma < 1$. Además, v está acotada por alguna constante.

Definamos también

$$\eta \triangleq \max_{i,j} \sup_{t > 0} \sum_{\tau=0}^t \left(\|A_\ell^{i,j(\tau)} B_\ell^{i,j}\| \bar{u}_r \right) \quad (29)$$

donde \bar{u}_r es una cota superior para la señal acotada $\|u_r(\tau)\|$ para todo $\tau \geq t_0$. Notar que η también está acotada.

Usando las ecuaciones (28)-(29) en la desigualdad (27) con $t = t_{k+1}$ obtenemos

$$\|E[e(t_{k+1})]\| = \gamma \|E[e(t_k)]\| + \eta \quad (30)$$

Por lo tanto la secuencia $\|E[e(t_k)]\|$ está acotada superiormente por una sucesión monótona que converge a $\frac{\eta}{1-\gamma}$. Luego tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E[e(t_{k+1})]\| \leq \frac{\eta}{1-\gamma} \quad (31)$$

y entonces, dado $\epsilon > 0$, existe K_ϵ tal que

$$\|E[e(t_k)]\| \leq \frac{\eta}{1-\gamma} + \epsilon, \quad \forall k \geq K_\epsilon \quad (32)$$

Usando ahora las ecuaciones (29)-(32) en la inecuación (27), obtenemos

$$\begin{aligned} \|E[e(t)]\| &\leq \|A_\ell^{i,j(t-t_k)}\| \left(\frac{\eta}{1-\gamma} + \epsilon \right) + \eta \\ &\leq v \left(\frac{\eta}{1-\gamma} + \epsilon \right) + \eta \triangleq \mu_\epsilon \end{aligned} \quad (33)$$

para todo $t > t_k$ con $k \geq K_\epsilon$.

Nótese que $t_{k+1} - t_k < 2T$ en (25) implica que $t_k < t_0 + 2kT$. Entonces si definimos $T_\epsilon \triangleq t_0 + 2K_\epsilon T$, la condición $t \geq T_\epsilon$ implica que $t > t_k$ con $k = K_\epsilon$, y $\|E[e(t)]\| < \mu_\epsilon$ para todo $t \geq T_\epsilon$.

La matriz de covarianza de $e(t)$ en (26) está definida como $\Sigma_e(t) = E[(e(t) - E[e(t)])(e(t) - E[e(t)])^T]$.

Como el término $\sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) \right)$ de (26) es determinista no contribuye a la matriz de covarianza de $e(t)$. Entonces podemos computarlo como $\Sigma_e(t) = \Sigma_z(t)$, donde

$$z(t) = A_\ell^{i,j(t-t_k)} z(t_k) + \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \left(A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} Gw(\tau) \right)$$

Véase que $z(t_k) = e(t_k)$. Esta ecuación es la solución de una ecuación en diferencias estocástica lineal cuya varianza, como muestra [13], está dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_z(t) &= A_\ell^{i,j(t-t_k)} \Sigma_z(t_k) [A_\ell^{i,j(t-t_k)}]^T \\ &+ \sum_{\tau=t_k}^{t-1} A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} G \Sigma_w G^T [A_\ell^{i,j(t-\tau-1)}]^T \end{aligned}$$

que volviendo a $e(t)$ quedaría

$$\begin{aligned} \Sigma_e(t) &= A_\ell^{i,j(t-t_k)} \Sigma_e(t_k) [A_\ell^{i,j(t-t_k)}]^T \\ &+ \sum_{\tau=t_k}^{t-1} A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} G \Sigma_w G^T [A_\ell^{i,j(t-\tau-1)}]^T \end{aligned}$$

Tomando la norma 2 en ambos lados de la última ecuación

$$\begin{aligned} \|\Sigma_e(t)\| &\leq \|A_\ell^{i,j(t-t_k)} \Sigma_e(t_k) [A_\ell^{i,j(t-t_k)}]^T\| \\ &+ \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \|A_\ell^{i,j(t-\tau-1)} G \Sigma_w G^T [A_\ell^{i,j(t-\tau-1)}]^T\| \\ &\leq \|A_\ell^{i,j(t-t_k)}\|^2 \|\Sigma_e(t_k)\| + \delta \end{aligned} \quad (34)$$

donde $\delta \triangleq \max_{i,j} \sup_{t>0} \sum_{\tau=t_k}^{t-1} \|A_\ell^{i,j(\tau)} G \Sigma_w G^T [A_\ell^{i,j(\tau)}]^T\|$.

Utilizando (34) con $t = t_{k+1}$ obtenemos

$$\|\Sigma_e(t_{k+1})\| \leq \|A_\ell^{i,j(t_{k+1}-t_k)}\|^2 \|\Sigma_e(t_k)\| + \delta \leq \gamma^2 \|\Sigma_e(t_k)\| + \delta$$

Si consideramos al estado inicial $e(t_0)$ determinista tendremos que la covarianza del estado inicial es cero ($\Sigma_e(t_0) = 0$). Esto, junto a la ecuación anterior, nos permite acotar a $\|\Sigma_e(t_k)\|$ por una secuencia monótona que converge al valor $\frac{\delta}{1-\gamma^2}$, luego

$$\|\Sigma_e(t_k)\| \leq \frac{\delta}{1-\gamma^2}$$

para todo $k \geq 0$. Luego, usando (34) nos queda

$$\|\Sigma_e(t)\| \leq \|A_\ell^{i,j(t-t_k)}\|^2 \|\Sigma_e(t_k)\| + \delta \leq v^2 \frac{\delta}{1-\gamma^2} + \delta \triangleq \sigma^2$$

que implica que la matriz de covarianza de $e(t)$ está acotada en norma por σ^2 para todo $t \geq t_0$.

Sea $e_i(t)$ la i -ésima componente de $e(t)$, y recordando que $\|E[e(t)]\| \leq \mu_\epsilon$ (para $t \geq T_\epsilon$), $\|\Sigma_e(t)\| \leq \sigma^2$, y que $e(t)$ es $2n$ dimensional, tenemos que $|E[e_i(t)]| \leq \mu_\epsilon$, $\forall t \geq T_\epsilon$ y

$$[\Sigma_e(t)]_{i,i} \leq \|\Sigma_e(t)\|_\infty \leq \|\Sigma_e(t)\| \sqrt{2n} \leq \sigma^2 \sqrt{2n} \quad (35)$$

Luego, para $t \geq T_\epsilon$, y para un dado \tilde{p}_i tal que $0 < \tilde{p}_i < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\Pr \left[|e_i(t)| \geq \mu_\epsilon + \sigma \sqrt{\frac{2n}{\tilde{p}_i}} \right] \\ &\leq \Pr \left[|e_i(t)| \geq |E[e_i(t)]| + \sqrt{[\Sigma_e(t)]_{i,i}} \sqrt{\frac{1}{\tilde{p}_i}} \right] \\ &\leq \Pr \left[|e_i(t) - E[e_i(t)]| \geq \sqrt{\frac{[\Sigma_e(t)]_{i,i}}{\tilde{p}_i}} \right] \leq \tilde{p}_i \end{aligned}$$

donde el último paso corresponde a la desigualdad de Chebyshev.

Tomando $0 < \tilde{p}_i < 1$ con $i = 1, \dots, 2n$ tales que $\sum_{i=1}^{2n} \tilde{p}_i = 1 - p$, definimos el conjunto

$$S = \left\{ e \in \mathbb{R}^{2n} : |e_i| < \mu_\epsilon + \sigma \sqrt{\frac{2n}{\tilde{p}_i}}; i = 1, \dots, 2n \right\} \quad (36)$$

y podemos demostrar que

$$\begin{aligned} \Pr[e(t) \in S] &= 1 - \Pr[e(t) \notin S] \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{2n} \Pr \left[|e_i(t)| \geq \mu_\epsilon + \sigma \sqrt{\frac{2n}{\tilde{p}_i}} \right] \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{2n} \tilde{p}_i = p \end{aligned}$$

para $t \geq T_\epsilon$, probando así que el conjunto acotado S es un PUB con probabilidad p para el sistema (13). \square

V. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un esquema de control tolerante a fallas en tiempo discreto con detección de fallas basado en cotas finales probabilísticas, demostrando sus principales propiedades teóricas. Una aplicación de esta estrategia a un modelo de un robot móvil es desarrollada en la segunda parte de este trabajo [11], mostrando el funcionamiento de la técnica propuesta.

REFERENCIAS

- [1] S. Ding, *Model-based Fault Diagnosis Techniques*. Springer, 2008.
- [2] R. Isermann, *Fault-Diagnosis Systems. An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer, 2006.
- [3] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki, *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, 2nd ed. Springer, 2006.
- [4] V. Puig, "Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches: application to real case studies," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 20, no. 4, pp. 619–635, 2010.
- [5] M. Seron, X. Zhuo, J. De Doná and J. Martínez, "Multisensor switching control strategy with fault tolerance guarantees," *Automatica*, vol. 44, no. 1, pp. 88–97, 2008.
- [6] M. Seron, J. De Doná and S. Olaru, "Fault tolerant control allowing sensor healthy-to-faulty and faulty-to-healthy transitions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 77, no. 7, pp. 1657–1669, 2012.
- [7] C. Ocampo-Martínez, J. De Doná and M. Seron, "Actuator fault-tolerant control based on set separation," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 24, no. 12, pp. 1070–1090, 2010.
- [8] E. Kofman, J. De Doná, and M. Seron, "Probabilistic set invariance and ultimate boundedness," *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2670–2676, 2012.
- [9] E. Kofman, M. Seron, J. De Doná, and N. Pizzi, "Continuous-Time Probabilistic Ultimate Bounds and Invariant Sets: Computation and Assignment," *Automatica*, vol. 71, pp. 98–105, 2016.
- [10] N. Pizzi, E. Kofman, J. A. De Doná, and M. M. Seron, "Actuator fault tolerant control based on probabilistic ultimate bounds," *ISA transactions*, vol. 84, pp. 20–30, 2019.
- [11] N. Soncini, N. Pizzi, and E. Kofman, "Control tolerante a fallas en tiempo discreto basado en conjuntos probabilísticos. Aplicación." 2021, enviado a RPIC 2021. Disponible en https://labdcc.fceia.unr.edu.ar/~nsoncini/control_tolerante_a_fallas_2021/.
- [12] E. Kofman, J. A. De Doná, and M. M. Seron, "Probabilistic ultimate bounds and invariant sets for lti systems with gaussian disturbances," in *2011 Australian Control Conference*, 2011, pp. 537–542.
- [13] K. J. Åström, *Introduction to Stochastic Control Theory*, ser. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, 1970.