

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura



Centro Internacional Franco Argentino de Ciencias de la Información y de Sistemas

CONICET - UNR

Tesis Doctoral en Matemática

Métodos numéricos para resolver problemas de control óptimo

Autor: Justina Gianatti

Director: Lisandro A. Parente

Codirector: Pablo A. Lotito

2017

Certifico que el trabajo incluido en esta tesis es el resultado de tareas de investigación originales y que no ha sido presentado para optar a un título de postgrado en ninguna otra Universidad o Institución.

Justina Gianatti

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es proponer métodos numéricos para resolver ciertos problemas de control óptimo. En una primera etapa se analizan problemas de control óptimo determinista de tipo minimax y se presentan condiciones de optimalidad tanto necesarias como suficientes. Se plantea una discretización en tiempo de dicho problema y, a partir de las condiciones de optimalidad halladas, se propone un algoritmo de descenso convergente. Siguiendo con esta misma línea, se estudia un problema de control óptimo minimax con incertezas. Se plantean aproximaciones por promedios muestrales (*sample average approximations*) y se demuestra la epiconvergencia de las funciones de costo de estos nuevos problemas cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. Estos últimos se aproximan mediante problemas discretos en tiempo con controles seccionalmente constantes, para los cuales se estudian condiciones de optimalidad y se generaliza el algoritmo propuesto para el caso determinista. Además, se estudia la convergencia de minimizadores de los problemas discretos a minimizadores del problema continuo.

En una segunda etapa se estudia un problema de control óptimo estocástico con costo integral. Se generaliza el algoritmo de Sakawa-Shindo que había sido propuesto para el caso determinista, el cual está basado en el Principio del Máximo de Pontryagin (PMP). El estudio del algoritmo está hecho en tiempo continuo, y esto es lo que motiva la última parte de la tesis en la que se estudia un problema de control óptimo estocástico en tiempo discreto. Se demuestra el Principio de la Programación Dinámica (PPD) para este problema, se estudia la convergencia de las funciones valor cuando el paso de tiempo tiende a cero y también se analiza la convergencia de controles óptimos. Finalmente se dan condiciones de optimalidad necesarias para el problema en tiempo discreto y se demuestra que el algoritmo de Sakawa-Shindo estocástico puede adaptarse a este caso.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Control Óptimo	1
1.1.1. Control óptimo determinista	2
1.1.2. Control óptimo minimax determinista	4
1.1.3. Control óptimo minimax con incertezas	6
1.1.4. Control óptimo estocástico	9
1.1.5. Control óptimo estocástico en tiempo discreto	12
1.1.6. Algoritmo de Sakawa-Shindo	14
1.2. Resultados obtenidos y estructura de la tesis	14
1.3. Difusión de las contribuciones	16
2. Problema de control óptimo minimax determinista	19
2.1. Introducción	20
2.2. Problema en tiempo continuo	21
2.2.1. Descripción del problema	21
2.2.2. Hipótesis generales	22
2.2.3. Condiciones de optimalidad	23
2.3. Problema en tiempo discreto	28
2.3.1. Descripción del problema en tiempo discreto	29
2.3.2. Condiciones de optimalidad para el problema discreto	29
2.4. Convergencia	33
2.5. Algoritmo	34

2.5.1.	Convergencia del algoritmo	37
2.6.	Resultados Numéricos	39
3.	Problema de control óptimo minimax con incerteza	43
3.1.	Introducción	44
3.2.	Problemas de control óptimo minimax	45
3.2.1.	Problema de control óptimo minimax con incertezas	45
3.2.2.	Aproximaciones por promedios muestrales (SAA)	51
3.2.3.	Aproximación discreta en tiempo	51
3.3.	Convergencia	52
3.4.	Condiciones de Optimalidad	57
3.4.1.	Problema de control óptimo minimax con incertezas	57
3.4.2.	Aproximaciones por promedios muestrales (SAA)	60
3.4.3.	Aproximación discreta en tiempo	61
3.5.	Algoritmo	64
3.6.	Resultados numéricos	66
3.6.1.	Un ejemplo simple con solución analítica	67
3.6.2.	Oscilador armónico	69
4.	El algoritmo de Sakawa-Shindo para el caso de control estocástico	75
4.1.	Introducción	75
4.1.1.	Descripción del problema	77
4.1.2.	Descripción del algoritmo	77
4.2.	Hipótesis generales	79
4.3.	Buena definición del algoritmo	81
4.4.	Convergencia	84
4.5.	Velocidad de convergencia	92
5.	Discretización en tiempo de un problema de control óptimo estocástico	97
5.1.	Introducción	97
5.2.	Preliminares	99

5.2.1.	Problema en tiempo continuo	99
5.2.2.	Problema en tiempo discreto	100
5.2.3.	Hipótesis generales	101
5.3.	Estimaciones del estado para el caso continuo y discreto	102
5.4.	Principio de la Programación Dinámica para el problema en tiempo discreto	107
5.4.1.	Estimaciones preliminares	108
5.4.2.	Principio de la Programación Dinámica	110
5.4.3.	Control óptimo feedback	117
5.5.	Propiedades de regularidad de la función valor	118
5.6.	Convergencia	129
6.	El algoritmo de Sakawa-Shindo para el caso discreto	135
6.1.	Introducción	135
6.1.1.	Problema en tiempo discreto	135
6.1.2.	Hipótesis	136
6.2.	Estado adjunto discreto	137
6.3.	Expansiones de primer orden	141
6.4.	Condición de optimalidad de primer orden	145
6.5.	El algoritmo de Sakawa-Shindo para el caso discreto	147
6.5.1.	Versión discreta del algoritmo de Sakawa-Shindo	148
6.5.2.	Buena definición del algoritmo	149
6.5.3.	Convergencia del algoritmo	152
	Conclusiones	156
	Bibliografía	159

Capítulo 1

Introducción

1.1. Control Óptimo

El objetivo habitual de la teoría de control es influir en el comportamiento de un sistema dinámico, que evoluciona con el tiempo, para alcanzar ciertos objetivos deseados. La teoría de control óptimo surge cuando además se busca que el control optimice un cierto criterio, o función de costo. El control óptimo es una rama de la teoría de control estrictamente relacionada con la optimización. Si bien este tipo de problemas aparecen en la práctica desde hace cientos de años, es en las décadas de 1950 y 1960 que cobran real importancia.

El estudio de problemas de control óptimo determinista fue un área de investigación muy activa a partir de los años 1950, motivado fuertemente por el creciente interés en la ingeniería aeroespacial. Por otro lado, el campo del control óptimo estocástico se desarrolló desde los años 1970 y una de sus mayores motivaciones fueron las aplicaciones relacionadas con las finanzas.

En este primer capítulo daremos algunas nociones y resultados preliminares que serán necesarios para los capítulos que siguen. Comenzamos por dar una breve introducción al control óptimo, así como también algunos de los enfoques clásicos para atacar estos tipos de problemas.

1.1.1. Control óptimo determinista

Es usual encontrar en la literatura clásica de problemas de control óptimo con horizonte finito y condición inicial fija, el siguiente planteo:

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u) := \int_0^T f(t, y(t), u(t)) dt + h(y(T)), \\ \text{sujeto a (s.a.)} & \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t), u(t)), & t \in (0, T), \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \end{aligned} \quad (P)$$

Es decir, el objetivo es minimizar el *funcional de costo* J sobre el conjunto de *controles admisibles*, generalmente definido como

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u : [0, T] \rightarrow U_{ad} \subset \mathbb{R}^r : u \text{ es medible}\}.$$

Con el objetivo de garantizar la integrabilidad de $t \mapsto f(t, y(t), u(t))$, es usual considerar el conjunto U_{ad} acotado o, por ejemplo cuando la dinámica es lineal, pensar directamente al conjunto \mathcal{U}_{ad} como subconjunto de $L^2([0, T]; \mathbb{R}^r)$ (cuando sea claro el contexto, escribiremos $L^2[0, T]$ en lugar de $L^2([0, T]; \mathbb{R}^r)$). La existencia de controles óptimos, es decir, controles admisibles que minimicen el funcional J , no está siempre garantizada. Sin embargo bajo hipótesis de convexidad, utilizando argumentos de minimización de funciones semicontinuas inferiormente, en general se puede probar la existencia de los mismos.

Este área de investigación tiene particular importancia a partir de 1950, década en la cual se presentaron dos grandes avances, conocidos como el Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) [76] y el Principio de la Programación Dinámica (PPD) [16]. El PMP presenta condiciones necesarias de optimalidad y el PPD permite transformar el problema de minimización en el problema de hallar la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales, conocida como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Más precisamente, el PMP dice que si (y, u) es una solución óptima de (P) , donde $y(\cdot)$ es el estado asociado a $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$, entonces existe un *estado adjunto* $p(\cdot)$, solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -H_y(t, y(t), u(t), p(t)), & t \in (0, T), \\ p(T) = h_y(y(T)), \end{cases}$$

tal que

$$H(t, y(t), u(t), p(t)) = \min_{u \in U_{ad}} H(t, y(t), u, p(t)),$$

donde H es el *Hamiltoniano* del problema y se define como

$$H(t, y, u, p) := f(t, y, u) + p \cdot g(t, y, u).$$

Este enunciado se corresponde con una de las versiones más sencillas del problema de control óptimo y se verifica bajo hipótesis clásicas de los coeficientes. Cuando se consideran diferentes restricciones sobre el estado y el control, así como también hipótesis más generales sobre las funciones involucradas en la dinámica o el costo, este principio va tomando diferentes formas. Referimos al lector a la bibliografía clásica sobre el tema para ver las diferentes variantes [76, 19, 84, 44, 11, 20].

Por otro lado, al problema (P) se lo puede considerar como un caso particular de la familia de problemas parametrizados por (s, x) , donde s es el tiempo inicial y x el correspondiente estado inicial. Es decir, para $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ consideramos el estado $y_u^{s,x}$ solución la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t), u(t)), & t \in (s, T), \\ y(s) = x, \end{cases}$$

donde el conjunto de controles admisibles está definido como

$$\mathcal{U}_{ad}^s := \{u : [s, T] \rightarrow U_{ad} \subset \mathbb{R}^r : u \text{ es medible}\},$$

y el funcional de costo es,

$$J^{s,x}(u) := \int_s^T f(t, y_u^{s,x}(t), u(t))dt + h(y_u^{s,x}(T)).$$

Por último definimos la *función valor* como,

$$\begin{cases} V(s, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^s} J^{s,x}(u), & \forall (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ V(T, x) = h(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Luego el problema (P) que presentamos al comienzo se corresponde con $V(0, x)$. Teniendo en cuenta estas definiciones y bajo ciertas hipótesis, el PPD establece que

$$V(s, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^s} \left\{ \int_s^{\bar{s}} f(t, y^{s,x}(t), u(t))dt + V(\bar{s}, y_u^{s,x}(\bar{s})) \right\}, \quad \forall 0 \leq s \leq \bar{s} \leq T.$$

1.1.2. Control óptimo minimax determinista

A diferencia del problema que acabamos de describir, en la primera parte de esta tesis trabajaremos con un problema de control óptimo de tipo minimax determinista, es decir la función de costo que consideramos es

$$J(u) := \sup_{es} \{f(y_u(t)) : t \in [0, T]\},$$

donde la dinámica viene dada por

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t), u(t)) & t \in [0, T], \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

la cual consideraremos lineal y el conjunto de controles admisibles es

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in L^2[0, T] : u(t) \in U_{ad} \subset \mathbb{R}^m \text{ para casi todo (p.c.t.) } t \in [0, T]\},$$

donde U_{ad} es un conjunto compacto y convexo. Hipótesis más precisas sobre las funciones involucradas así como también sobre los espacios de estados y controles serán dadas en el próximo capítulo.

Este tipo de problema fue muy estudiado en las últimas décadas por varios autores ([14], [13], [15], [65], [85], [5], [2], [3] y [41]). El hecho de considerar un costo en términos de un supremo en lugar de un costo acumulado, resulta más natural en muchas aplicaciones, como por ejemplo cuando se busca minimizar la distancia a cierta trayectoria deseada ([34], [35], [70]), o para problemas de control óptimo robusto de sistemas con incertezas ([72], [83]).

Agregando una nueva variable de estado, al problema de control minimax se lo puede escribir como un problema de control óptimo de tipo Mayer, es decir donde el costo sólo está compuesto por un costo final y para el cual tenemos restricciones más complejas para el estado. Siguiendo esta idea, gracias al PMP, algunos autores ([13], [65], [85]) obtuvieron condiciones necesarias de optimalidad. Sin embargo, en este caso, debido a la nueva restricción para el estado, el estado adjunto que resulta involucra una medida de Radon, lo cual es una dificultad a la hora de querer plantear métodos numéricos que resuelvan el nuevo problema.

Como mencionamos al comienzo, otro enfoque posible, incluso para los problemas minimax, es el de la programación dinámica y, en este sentido, varios autores realizaron avances sobre el tema ([14], [5], [2], [3], [41]). Nuevamente la dificultad radica en plantear métodos numéricos, ya que cuando se busca resolver la ecuación HJB, usualmente se necesitan discretizaciones no sólo del tiempo, sino también del espacio de estados, lo cual conduce a problemas de gran escala.

Debido a que en este trabajo nos concentramos en problemas con estado inicial fijo, a diferencia de los enfoques recién mencionados, abordaremos el problema como un problema de optimización abstracto. De este modo, sólo necesitaremos plantear una discretización temporal del problema, lo cual será de gran utilidad para evitar problemas de dimensionalidad cuando planteemos un algoritmo que resuelva al problema discreto en tiempo. El principal inconveniente que surge en este planteo es que, debido a su definición, el funcional J no resulta diferenciable (entenderemos diferenciable siempre en el sentido de Fréchet, ver [29]). Es por ello que estudiaremos la diferenciabilidad direccional del funcional de costo.

Uno de los resultados clásicos de optimización continua que utilizaremos para obtener condiciones de optimalidad es la siguiente condición de optimalidad de primer orden (ver por ejemplo [29] o [26]),

Teorema 1.1.1. [26, Teorema 3.11] *Si J es direccionalmente diferenciable y u es un óptimo entonces*

$$J'(u, v) \geq 0, \quad \forall v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u),$$

donde $J'(u, v)$ es la derivada direccional de J en u con respecto a la dirección v y $T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ denota el cono tangente de \mathcal{U}_{ad} en u . Además, si J es convexa, entonces todo control admisible que verifica la desigualdad anterior es una solución óptima del problema.

Recordamos que para todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $K \subseteq X$ el cono radial y el cono tangente a K en el punto u están definidos como

$$R_K(u) := \{v \in X ; \exists \hat{\tau} > 0 \text{ tal que } u + \tau v \in K, \text{ para } \tau \in [0, \hat{\tau}]\},$$

$$T_K(u) := \{v \in X ; \exists u(\tau) = u + \tau v + o(\tau) \in K, \tau > 0, \|o(\tau)/\tau\|_X \rightarrow 0, \text{ cuando } \tau \downarrow 0\}.$$

Se sabe que (ver por ejemplo [30, Proposición 2.55]) si K es convexo, entonces $T_K(u) =$

$\text{cl}_X(R_K(u))$, donde $\text{cl}_X(A)$ denota la clausura en X de $A \subseteq X$. Cuando sea claro del contexto el espacio X que estemos considerando escribiremos directamente $\text{cl}(A)$.

1.1.3. Control óptimo minimax con incertezas

Existen muchas aplicaciones que se modelan mejor o de manera más natural si incorporamos incertezas al sistema. Hay diversas fuentes de incertezas, como por ejemplo, errores de medición, condiciones iniciales inciertas, o parámetros o coeficientes desconocidos. En general, en la literatura existen dos enfoques posibles para este tipo de problemas de optimización. El primero es considerar una función objetivo que involucre el costo promedio, como por ejemplo en los trabajos [79, 53, 74]. El segundo enfoque consiste en considerar como criterio el *peor escenario posible*, como en [72, 83, 88].

Cuando se tiene información sobre el comportamiento de las perturbaciones (por ejemplo si se tienen datos estadísticos), es decir, si asumimos que conocemos la distribución de probabilidad de los parámetros estocásticos, entonces el primer enfoque resulta más natural. Si por el contrario, no tenemos información sobre las perturbaciones, entonces es más usado el criterio del peor escenario. Sin embargo, la elección de criterio también depende de las características propias de cada problema. Está fuera del alcance de este trabajo una comparación entre ellos o un análisis de ventajas y desventajas. En nuestro caso, cuando consideremos el problema minimax con incertezas, asumimos que tenemos conocimiento sobre la distribución de probabilidad de las mismas y utilizaremos un costo promedio.

En este caso, el problema que consideramos es el siguiente. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad completo. El conjunto de controles admisibles es el mismo que consideramos para el caso determinista, es decir los controles sólo dependen del tiempo. Dado un control $u \in \mathcal{U}_{ad}$, definido en la sección anterior, el estado asociado a dicho control es la solución del siguiente sistema con incertezas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t, \omega) = g(t, y(t, \omega), u(t), \omega), & t \in [0, T] \\ y(0, \omega) = x + \phi(\omega), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\omega \in \Omega$ y $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones dadas. El

objetivo es minimizar el funcional $J : L^2[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega) \right]. \quad (1.2)$$

En esta sección recordamos algunas nociones y resultados preliminares que serán de utilidad para estudiar este problema y para entender de qué manera podemos aproximar al mismo.

Definición 1.1.2 (Funciones Carathéodory). *Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible, X, Y espacios métricos y consideramos una función $f : X \times \Omega \rightarrow Y$. La función f se dice función Carathéodory si*

- *la aplicación $x \mapsto f(x, \omega)$ es continua para cada $\omega \in \Omega$,*
- *la aplicación $\omega \mapsto f(x, \omega)$ es medible para cada $x \in X$.*

En particular se tiene que las funciones Carathéodory son funciones conjuntamente medibles, i.e. medibles con respecto a la σ -álgebra producto.

Con el objetivo de diseñar esquemas numéricos que aproximen al problema original, consideraremos una primera aproximación por promedios muestrales (*sample average approximation* en inglés). De la Ley de los Grandes Números, tenemos convergencia puntual casi todo punto de las funciones objetivos que resultan de estas aproximaciones. Sin embargo, mostraremos que se verifica una convergencia más fuerte, que es la *epi-convergencia*.

La noción de epi-convergencia fue estudiada por primera vez en la década de 1960, en los trabajos iniciales [86, 87, 67]. Luego en la década de 1980, se utilizó para aproximar problemas de programación no lineal como por ejemplo [7], [8] y [9]. Para un análisis más profundo así como también para obtener detalles históricos sobre el tema, recomendamos [78, Capítulo 7]. En particular, esta noción de convergencia resulta fundamental en la teoría de optimización y análisis variacional, cuando se estudian sucesiones de funciones *aleatorias semicontinuas inferiormente*. A continuación damos definiciones más precisas sobre estos conceptos.

Definición 1.1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico separable. Consideramos la sucesión funciones semicontinuas inferiormente $f_M : X \rightarrow \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$. Decimos que f_M epi-converge a f , y se denota $f_M \xrightarrow{\text{epi}} f$, si y sólo si*

- $\liminf f_M(x_M) \geq f(x)$ para toda sucesión que verifica $x_M \rightarrow x$,
- $\lim f_M(x_M) = f(x)$ para al menos una sucesión que verifica $x_M \rightarrow x$.

Definición 1.1.4. Sea (X, d) un espacio métrico separable con σ -álgebra de Borel B . Sea \mathbb{P} una medida de probabilidad en el espacio medible (Ω, \mathcal{A}) tal que \mathcal{A} es \mathbb{P} -completa. Una función $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función aleatoria semicontinua inferiormente si y sólo si

- para todo $\omega \in \Omega$, la función $x \rightarrow f(x, \omega)$ es semicontinua inferiormente,
- $(x, \omega) \mapsto f(x, \omega)$ es $B \otimes \mathcal{A}$ medible.

Para poder justificar que los problemas que resultan de plantear una aproximación por promedios muestrales, aproximan de hecho al problema original, será fundamental el siguiente resultado.

Teorema 1.1.5. [6, Teorema 2.3] Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad tal que \mathcal{A} es \mathbb{P} -completa. Sea (X, d) un espacio métrico completo y separable. Supongamos que la función $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función aleatoria semicontinua inferiormente y que existe una función integrable $a_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, \omega) \geq a_0(\omega)$ casi seguramente (c.s.). Sea $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ una muestra aleatoria, independientemente \mathbb{P} -distribuida. Definimos

$$\hat{f}(\cdot, \omega_1, \dots, \omega_M) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(\cdot, \omega_i). \quad (1.3)$$

Entonces, cuando $M \rightarrow \infty$, $\hat{f}(\cdot, \omega_1, \dots, \omega_M)$ epi-converge casi seguramente a $\mathbb{E}[f(\cdot, \omega)]$.

Por último presentamos un resultado sobre la convergencia de minimizadores.

Teorema 1.1.6. [9, Teorema 2.5] Sea (X, d) un espacio métrico completo y separable. Consideramos una sucesión de funciones semicontinuas inferiormente $f_M : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f_M epi-converge a f . Si $\{x_M\}_{M \in \mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión de minimizadores globales de f_M y \bar{x} es algún punto de acumulación de dicha sucesión (la cual indexamos con $K \subset \mathbb{N}$), entonces \bar{x} es un minimizador global de f y $\lim_{M \in K} \inf_{x \in X} f_M(x_M) = \inf_{x \in X} f(x)$.

Un análisis más profundo sobre estos temas puede encontrarse en [52].

1.1.4. Control óptimo estocástico

Los problemas de control óptimo estocástico fueron muy estudiados en las últimas décadas. Su importancia radica en las múltiples aplicaciones de los mismos, como por ejemplo su aplicación en economía, matemática financiera e ingeniería. Al igual que para el caso determinista, en general existen dos enfoques posibles para este problema, el primero es el enfoque variacional que se relaciona con el PMP y el segundo es el de la programación dinámica. Para un análisis más detallado recomendamos los libros [45, 73, 89, 56]. Comenzamos dando algunas definiciones y resultados que utilizaremos en los últimos capítulos de esta tesis.

Recordamos que un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ se dice que satisface las condiciones usuales si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es completo, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t$ es continua a derecha, y \mathcal{F}_0 contiene todos los conjuntos de medida \mathbb{P} -nula de \mathcal{F} (ver [89, Capítulo 1]).

Consideramos entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espacio filtrado de probabilidad que satisface las condiciones usuales, en el cual está definido un movimiento browniano m -dimensional estándar W . Suponemos que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ ($T > 0$) es la filtración natural, aumentada por todos los conjuntos \mathbb{P} -nulos en \mathcal{F} , asociada a $W(\cdot)$. Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$\begin{cases} dy(t) = f(t, y(t), u(t), \omega)dt + \sigma(t, y(t), u(t), \omega)dW(t) & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ son funciones dadas. Denotamos con $y \in \mathbb{R}^n$ al estado y con $u \in \mathbb{R}^r$ al control. Definimos al funcional de costo, como

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \ell(t, y(t), u(t))dt + g(y(T)) \right],$$

donde $\ell : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

El problema de control óptimo que consideramos es

$$\text{mín } J(u); \quad u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (P)$$

donde \mathcal{U}_{ad} es el conjunto de controles admisibles. En particular, a lo largo de esta tesis,

trabajaremos con el siguiente conjunto

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in (\mathbb{H}^2)^r : u(t, \omega) \in U_{ad}, \text{ p.c.t. } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega\},$$

donde $U_{ad} \subset \mathbb{R}^r$ un conjunto no vacío y cerrado, el cual en algunos casos lo supondremos convexo y en otros compacto. Recordamos que

$$\mathbb{H}^2 := \{v \in L^2([0, T] \times \Omega) : \text{el proceso } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \mapsto v(t, \omega) \text{ es } \mathbb{F}\text{-adaptado}\},$$

en el cual consideramos la norma dada por,

$$\|v\|_{\mathbb{H}^2}^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^T |v(t)|^2 dt \right].$$

En general se define como conjunto de controles admisibles a un conjunto de controles \mathbb{F} -adaptados (i.e. progresivamente medibles, ver [89, Proposición 2.8, Capítulo 1]), con imagen en U_{ad} , para los cuales existe una única solución de (1.4). Al considerar el conjunto de controles admisibles como un subconjunto de \mathbb{H}^2 tenemos garantizado que bajo hipótesis clásicas sobre los coeficientes, para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ existe una única solución de (1.4), con la suficiente regularidad como para que el funcional J esté bien definido y el problema bien planteado. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.1.7. [68, Proposición 2.1] *Para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$, la ecuación (1.4) admite una única solución fuerte $y \in L^2(\Omega; C[0, T]; \mathbb{R}^n)$ y existe $C > 0$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |y(t)|^2 \right] \leq C \left[|x|^2 + \left(\int_0^T |f(t, 0, u(t))| dt \right)^2 + \int_0^T |\sigma(t, 0, u(t))|^2 dt \right].$$

Además, sea $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ y sea \bar{y} el estado asociado al control \bar{u} y la condición inicial \bar{x} , entonces para todo $\gamma \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |y(t) - \bar{y}(t)|^\gamma \right] &\leq C \left[|x - \bar{x}|^\gamma + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |f(t, y(t), u(t)) - f(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))| dt \right)^\gamma \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |\sigma(t, y(t), u(t)) - \sigma(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Ahora daremos una breve reseña sobre los posibles enfoques para abordar este tipo de problema. Comenzamos con el PMP.

Los primeros trabajos relacionados al principio del máximo en el marco estocástico fueron los de Kushner y Schweppe [60], Kushner [58, 59], Bismut [22, 24], Haussmann [50] y Bensoussan [17, 18]. Luego, una extensión más general fue presentada por Peng en [71] y Cadenillas y Karatzas en [37]. El principio del máximo estocástico usualmente involucra dos pares de estados adjuntos (ver [71]). Sin embargo, el gradiente del funcional de costo depende solamente de un par de estados adjuntos y si asumimos que \mathcal{U}_{ad} es convexo, la condición de optimalidad de primer orden en un mínimo local depende solamente del gradiente (ver [89, Capítulo 3, Sección 3.2] para una discusión más detallada). El primer par de estados adjuntos, está dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica retrógrada (EDER):

$$\begin{cases} dp(t) = -\nabla_y H(t, y(t), u(t), p(t), q(t), \omega) dt + q(t) dW(t) & t \in [0, T], \\ p(T) = \nabla_y g(y(T)). \end{cases} \quad (1.5)$$

Donde (y, u) es un par admisible de estado y control y $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es el *Hamiltoniano* que en este caso se define como

$$H(t, y, u, p, q, \omega) := \ell(t, y, u, \omega) + p \cdot f(t, y, u, \omega) + q \cdot \sigma(t, y, u, \omega),$$

donde $p \cdot f(t, y, u, \omega)$ es el producto escalar en \mathbb{R}^n y $q \cdot \sigma(t, y, u, \omega) := \sum_{j=1}^m q_j \cdot \sigma_j(t, y, u, \omega)$, donde q_j y σ_j denotan las columnas de las matrices q y σ .

Bajo hipótesis clásicas, se tiene que existe una única solución de la ecuación (1.5) que verifica $(p, q) \in (\mathbb{H}^2)^n \times (\mathbb{H}^2)^{n \times m}$. Más precisamente, tenemos

Proposición 1.1.8. [68, Proposición 3.1] *Para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$, siendo y el estado asociado a u , existe una única solución \mathbb{F} -adaptada (p, q) de (1.5) y además existe $C > 0$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |p(t)|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T |q(t)|^2 dt \right] \leq C \left[1 + \mathbb{E} \left[\int_0^T |u(t)|^2 dt \right] \right].$$

Por otro lado, al igual que en el caso determinista, podemos definir una familia de problemas de optimización parametrizados por el tiempo y estado inicial. Para ello, dado $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ consideramos la siguiente familia de controles admisibles

$$\mathcal{U}_{ad}^s := \{ u \in L^2([s, T] \times \Omega) : u(t) \text{ es } \mathbb{F}^s\text{-adaptado y } u(t, \omega) \in U_{ad}, \text{ p.c.t. } (t, \omega) \in [s, T] \times \Omega \},$$

donde $\mathbb{F}^s = \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \in [s, T]}$ y \mathcal{F}_t^s es la completación de $\sigma(W(r) - W(s) : s \leq r \leq t)$ para $t \in [s, T]$. Dado $u \in \mathcal{U}_{ad}^s$, definimos el estado $y_u^{s,x}$ asociado a dicho control, como la solución de

$$\begin{cases} dy_u^{s,x}(t) = f(t, y_u^{s,x}(t), u(t))dt + \sigma(t, y_u^{s,x}(t), u(t))dW(t), & t \in [s, T], \\ y_u^{s,x}(s) = x. \end{cases}$$

La función valor del problema $V : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$V(s, x) := \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^s} J^{s,x}(u) := \mathbb{E} \left[\int_s^T \ell(t, y_u^{s,x}(t), u(t))dt + g(y_u^{s,x}(T)) \right].$$

Se puede demostrar que $V(s, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J^{s,x}(u)$ (ver [73] y la demostración del Teorema 5.5.1).

Para el caso estocástico también tenemos que esta función V verifica el PPD, el cual establece que

$$V(s, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^s} \mathbb{E} \left[\int_s^{\bar{s}} \ell(t, y_u^{s,x}(t), u(t))dt + V(\bar{s}, y^{s,x}(\bar{s})) \right], \quad \forall 0 \leq s \leq \bar{s} \leq T.$$

En particular el PPD permite caracterizar a la función valor V como la única solución de viscosidad de la ecuación HJB (ver [62, 63, 64]). Aunque en esta tesis nos orientaremos más bien con el enfoque variacional, demostraremos una versión discreta del PPD, la cual será de utilidad para estudiar el problema discreto que describimos brevemente en la siguiente sección.

1.1.5. Control óptimo estocástico en tiempo discreto

Como mencionamos anteriormente los problemas de control óptimo estocástico en tiempo continuo tienen un gran campo de aplicación, y es por ello que representan un área de investigación muy activa en la actualidad. Por otro lado, casi independientemente cobró gran interés en la últimas décadas el campo de los problemas de control óptimo de procesos de tiempo discreto y espacio general de estados. En este contexto, los controles en el tiempo k (también llamado políticas) son medidas de probabilidad en los espacios de acciones, las cuales dependen de la historia de los estados hasta el tiempo k y las acciones elegidas hasta el tiempo $k - 1$. Dado un control, una acción es elegida de acuerdo a la medida de probabilidad asociada al control, lo cual fija la función de probabilidad de transición entre

los estados en los tiempos k y $k + 1$. La literatura en este área es muy extensa y sobre este tema referimos al lector a las monografías clásicas [42, 21, 47, 77, 90], y las referencias que aparecen en ellas, en las cuales también se trata la cuestión histórica de este campo de investigación. Generalmente, las hipótesis son bastante clásicas y un tema común de investigación es la existencia de políticas markovianas óptimas (o ε -óptimas), i.e., el control elegido en el tiempo k sólo depende del valor del estado en el tiempo k .

A diferencia de lo que mencionamos en el párrafo anterior, en este capítulo consideraremos una formulación más específica. En lugar de tomar controles como medidas de probabilidad, consideraremos controles adaptados a la filtración generada por los incrementos del movimiento browniano, con respecto a la discretización en tiempo. Esta elección se basa en el hecho de que para el caso continuo consideramos la formulación *fuerte* de la ecuación de estado (ver [89, Capítulo 2, Section 4.1]), y por lo tanto es natural considerar para el caso discreto una formulación similar. Para ello, supondremos que los coeficientes son deterministas y dada una discretización temporal uniforme, la ecuación de estado está dada por un esquema explícito de Euler para el caso estocástico.

Más precisamente, dado $h := T/N$, tomamos $t_k = kh$ ($k = 0, \dots, N$) y consideramos la sucesión de variables aleatorias con valores en \mathbb{R}^m independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), definidas como $\Delta W_{j+1} = W(t_{j+1}) - W(t_j)$, para $j = 0, \dots, N - 1$ y $\Delta W_0 = 0$ c.s. Consideramos la filtración en tiempo discreto $\mathbb{F}^h = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ definida como $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_k = \sigma(\Delta W_{k'} ; 0 \leq k' \leq k)$. Notamos $L_{\mathcal{F}_k}^2 := L^2(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$ y definimos $\mathcal{U}^h := \prod_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^2$, al cual dotamos de la norma $\|u\|_{\mathcal{U}^h}^2 := h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}|u_k|^2$.

El conjunto de controles admisibles será

$$\mathcal{U}_{ad}^h := \{u \in \mathcal{U}^h; u_k \in U_{ad} \text{ } \mathbb{P}\text{-c.s., } \forall k = 0, \dots, N - 1\}.$$

y dado $u = (u_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$, definimos el estado $y = (y_0, \dots, y_N)$ de manera recursiva como,

$$\begin{cases} y_k &= y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}) + \sigma(t_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1})\Delta W_k, & k = 1, \dots, N, \\ y_0 &= x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

El objetivo será minimizar sobre \mathcal{U}_{ad}^h al funcional de costo discreto $J^h : \mathcal{U}^h \rightarrow \mathbb{R}$ definido

como

$$J^h(u) := \mathbb{E} \left[h \sum_{k=0}^{N-1} \ell(t_k, y_k, u_k) + g(y_N) \right].$$

1.1.6. Algoritmo de Sakawa-Shindo

En el Capítulo 4 y 6 propondremos métodos numéricos que están basados en el Algoritmo de Sakawa-Shindo. Este algoritmo fue introducido por primera vez en [80] por Sakawa y Shindo en 1980. Una breve descripción del método podría ser la siguiente: dado un control y su estado asociado, en la iteración actual, se calcula el estado adjunto correspondiente y luego se busca de manera simultánea un nuevo estado y control que verifiquen la ecuación de estado y al mismo tiempo el control minimice una función, la cual está compuesta por el Hamiltoniano del problema y un término cuadrático que penaliza la distancia entre el nuevo control y el control actual. En [80] los autores muestran que la sucesión generada por el algoritmo hace decrecer a la función objetivo en cada paso y que si una subsucesión de la misma converge casi todo punto a un cierto control, entonces ese control satisface las condiciones de optimalidad de primer orden, relacionadas al PMP.

Continuando con el estudio de este método, Bonnans presenta en el año 1986 el trabajo [25], en donde se prueba la buena definición del método y además, que la norma de los gradientes proyectados del funcional de costo evaluado sobre los controles generados por el algoritmo tiende a cero. Bajo hipótesis de convexidad se obtiene que los límites débiles de la sucesión de controles obtenida son soluciones óptimas del problema. Por último, si se tiene una dinámica lineal y un costo cuadrático con respecto al control, dotando de una nueva métrica al espacio, se demuestra que el algoritmo es equivalente al método de gradiente más proyección.

1.2. Resultados obtenidos y estructura de la tesis

En el Capítulo 2 estudiamos un problema de control óptimo determinista de tipo minimax. Planteamos una aproximación del mismo en tiempo discreto y desarrollamos condiciones de optimalidad para ambos problemas. Basados en una de ellas proponemos un método de descenso para resolver el problema discreto. Demostramos que el algoritmo es

convergente, i.e. que todo punto de acumulación de la sucesión de controles generada por el algoritmo es una solución óptima para el problema discreto. Por último mostramos resultados numéricos para un ejemplo académico. Estos resultados fueron resumidos en la publicación [46].

En el Capítulo 3 estudiamos un problema de control óptimo minimax con incertezas. Como un primer acercamiento al mismo planteamos una aproximación por promedios muestrales. Demostramos que los funcionales de costo epi-convergen al costo original y también mostramos que puntos de acumulación de minimizadores de estos nuevos problemas, son soluciones óptimas del problema original. Luego, definimos problemas discretos en tiempo que aproximan a estos últimos. Demostramos que cuando el tamaño de la muestra crece y el paso de tiempo decrece lo suficiente, la sucesión de controles óptimos de estos problemas discretos verifica que todos sus puntos límites son controles óptimos para el problema original. Estudiamos condiciones de optimalidad para los tres problemas y ampliando las ideas del algoritmo propuesto en el Capítulo 2, definimos un método numérico para resolver el problema discreto. Por último probamos que el algoritmo es convergente y lo aplicamos a algunos ejemplos obteniendo resultados numéricos muy alentadores. La publicación [4] engloba estos resultados.

En el Capítulo 4 estudiamos un problema de control óptimo estocástico. El objetivo principal es extender el algoritmo de Sakawa-Shindo [80] al caso estocástico. Comenzamos demostrando que el algoritmo está bien planteado en este marco. Luego vemos que se trata de un método de descenso y, desarrollando condiciones de optimalidad débiles, vemos que todo punto de acumulación débil de la sucesión generada por el algoritmo es una solución óptima del problema. Por último analizamos un caso particular, en el cual el algoritmo es equivalente al de gradiente más proyección y estudiamos la velocidad de convergencia para este caso. Los resultados obtenidos fueron publicados en [27].

En el Capítulo 5 estudiamos un problema de control óptimo estocástico discreto. Comenzamos demostrando que el PPD es válido para este marco discreto y el mismo nos permite probar que existen controles óptimos en retroalimentación (a los cuales llamaremos *feedback*, por su traducción en inglés) para los problemas discretos. Estudiamos varias propiedades para la función valor discreta y mostramos que cuando el paso de la discre-

tización tiende a cero, las funciones valor de los problemas discretos convergen a la del continuo. Además, toda sucesión de soluciones ε -óptimas para los problemas discretos forman una sucesión minimizante del problema original. Bajo ciertas hipótesis, se tiene que todo punto de acumulación débil de la misma será un control óptimo para el problema continuo. Estos resultados pueden encontrarse en [28].

Por último, en el Capítulo 6, basados en los dos capítulos anteriores, los cuales justifican que, combinando las hipótesis necesarias, se puede aproximar el problema descrito en el Capítulo 4 mediante el problema discreto definido en el Capítulo 5, lo que haremos es extender el algoritmo desarrollado en el Capítulo 4 para resolver este problema discreto. Para ello desarrollamos una condición de optimalidad de primer orden para el problema discreto.

1.3. Difusión de las contribuciones

1. Publicaciones

- [46] J. Gianatti, L. S. Aragone, P. A. Lotito, L. A. Parente, “Solving minimax control problems via nonsmooth optimization”, *Operations Research Letters*, Elsevier, Vol. 44, Num. 5 (2016), pp. 680-686, doi:10.1016/j.orl.2016.08.001.
- [4] L. S. Aragone, J. Gianatti, P. A. Lotito, L. A. Parente, “An approximation scheme for uncertain minimax optimal control problems”, aceptado para ser publicado en *Set-Valued and Variational Analysis*, 2017.
- [27] J. F. Bonnans, J. Gianatti, F. J. Silva: “On the convergence of the Sakawa-Shindo algorithm in stochastic control”, *AIMS-Mathematical Control and Related Fields*, Vol. 6, Num. 3, September 2016, pp. 391-406, doi:10.3934/mcrf.2016008.

2. Pre-publicaciones

- [28] J. F. Bonnans, J. Gianatti, F. J. Silva: “On the time discretization of stochastic optimal control problems: The Dynamic Programming Approach”, pre-publicación, HAL-INRIA, febrero 2017, <https://hal.inria.fr/hal-01474285>.

3. Artículos en congresos

- L. S. Aragone, J. Gianatti, P. A. Lotito, L.A. Parente. “A discrete sample average approximation for uncertain minimax optimal control problems”. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 6 (2017), en edición.
- Laura S. Aragone, Justina Gianatti, Pablo A. Lotito. “A numerical method for a minimax optimal control problem”. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 5 (2015). pp. 495-498.
- Laura S. Aragone, Justina Gianatti, Pablo A. Lotito. “A Necessary Optimality Condition for a Discrete Time Min-Max Problem”. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 4 (2013), pp. 706-709.

4. Comunicaciones científicas

- L. S. Aragone, J. Gianatti, P. A. Lotito, L.A. Parente. “A discrete sample average approximation for uncertain minimax optimal control problems”. Presentado en la sesión “Teoría de Control Optimo y Aplicaciones”, en el VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial. Comodoro Rivadavia del 2 al 5 de mayo de 2017.
- J. Frédéric Bonnans, Justina Gianatti, Francisco J. Silva. “On the convergence of the Sakawa-Shindo algorithm in stochastic control”, en el V Workshop Latinoamericano en Optimización y Control, LAWOC 2016, Tandil, del 5 al 7 de julio de 2016.
- J. Frédéric Bonnans, Justina Gianatti, Francisco J. Silva. “The Sakawa-Shindo Algorithm in Stochastic Control”. Presentado en la sesión “Stochastic Systems; Risk Sensitive Control, II” en SIAM Conference of Control and its Applications. París, del 8 al 10 de julio de 2015.
- Laura S. Aragone, Justina Gianatti, Pablo A. Lotito. “A numerical method for a minimax optimal control problem”. Presentado en la sesión “Teoría de Control Optimo y Aplicaciones”, en el V Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial. Tandil del 4 al 6 de mayo de 2015.

- Laura S. Aragone, Justina Gianatti, Pablo A. Lotito. “Solving a Min-max Control Problem via an Associated Discrete Problem”. X Brazilian Workshop on Continuous Optimization. Florianópolis, Brasil, del 17 al 21 de marzo 2014.
- Laura S. Aragone, Justina Gianatti, Pablo A. Lotito. “Condiciones de optimalidad para un problema de control Min-Max”. Reunión anual de la Unión Matemática Argentina. Rosario, del 17 al 21 de septiembre 2013.
- Laura S. Aragone, Justina Gianatti, Pablo A. Lotito. “A Necessary Optimality Condition for a Discrete Time Min-Max Problem”. Presentado en la sesión “Teoría de Control Óptimo y Aplicaciones”, en el IV Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial. Buenos Aires, del 15 al 17 de mayo 2013.

Capítulo 2

Problema de control óptimo minimax determinista

En este capítulo presentamos un algoritmo para resolver problemas de control óptimo determinista de tipo minimax con dinámica lineal. Consideramos un intervalo de tiempo finito y comenzamos estudiando el problema en tiempo continuo. Asumiendo hipótesis de convexidad, mediante técnicas de optimización no diferenciable, damos condiciones de optimalidad necesarias y suficientes. Luego planteamos un problema discreto en tiempo, tomando controles seccionalmente constantes, que aproxima al anterior y para el cual probamos condiciones de optimalidad análogas a las del caso continuo. Basados en una de dichas condiciones diseñamos un método de descenso, siguiendo la regla de Armijo. Finalmente, demostramos que el algoritmo propuesto es convergente y mostramos algunos resultados numéricos.

2.1. Introducción

En este capítulo centramos nuestro estudio en un problema de control óptimo, donde la trayectoria está dada por una ecuación diferencial lineal con condición inicial fija. El objetivo es minimizar un funcional definido como el supremo esencial sobre el intervalo de tiempo de una cierta función que depende de la trayectoria.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, a la hora de diseñar algoritmos para resolver el problema, los enfoques clásicos dados por el PMP o la ecuación HJB presentan dificultades. En el primer caso el problema surge cuando se quiere calcular el estado adjunto, el cual involucra una medida de Radon. En el caso de HJB como es bien sabido, la dificultad está relacionada con la gran escala del problema que se obtiene de discretizar en tiempo y en espacio. Es por ello que nosotros consideramos al problema de control óptimo minimax como un problema abstracto de optimización.

Es claro que al estar involucrado el supremo en la definición de la función objetivo, no podemos esperar que la misma sea diferenciable. Por ello, bajo ciertas hipótesis de convexidad, siguiendo resultados clásicos de optimización no diferenciable (ver [26, 29]), demostramos que el funcional de costo es direccionalmente diferenciable, lo cual nos permite plantear condiciones de optimalidad necesarias de primer orden.

Luego, aproximamos al problema original por un problema de control óptimo en tiempo discreto. Estudiamos también para este problema condiciones de optimalidad, análogas a las del caso continuo, algunas de las cuales eran sólo necesarias en el caso continuo y resultan necesarias y suficientes para el caso discreto. Utilizando una de estas condiciones de optimalidad proponemos un método de descenso para resolver el problema discreto.

La idea del algoritmo es mejorar en cada paso el valor de la función objetivo, moviéndose en direcciones que se obtienen a partir de las condiciones de optimalidad dadas. La ventaja del método es que es de fácil implementación y demostramos que es convergente, en el sentido que todo punto de acumulación de la sucesión de controles generada por el algoritmo es un control óptimo del problema discreto.

Además, se sabe que cuando el paso de discretización del tiempo tiende a cero, el valor del problema discreto tiende al valor del problema continuo. Se puede ver entonces que los

controles óptimos de los problemas discretos, obtenidos mediante nuestro algoritmo, dan una buena aproximación del valor del problema continuo.

2.2. Problema en tiempo continuo

En esta sección presentamos el problema a abordar junto con todas las hipótesis que haremos a lo largo del capítulo.

2.2.1. Descripción del problema

Consideramos en el intervalo de tiempo $[0, T]$, con $T < \infty$, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t), u(t)) & t \in [0, T], \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada. En este caso, denotamos por $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^r)$ al control y con y_u a la función de estado o trayectoria, asociada a dicho control mediante (2.1).

Definimos el funcional de costo, o función objetivo, $J : L^2[0, T] \mapsto \mathbb{R}$ como,

$$J(u) := \sup_{t \in [0, T]} f(y_u(t)). \quad (2.2)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada. El conjunto de controles admisibles \mathcal{U}_{ad} está dado por,

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in L^2[0, T] : u(t) \in U_{ad} \subset \mathbb{R}^r \text{ p.c.t. } t \in [0, T]\}, \quad (2.3)$$

donde U_{ad} es un conjunto compacto y convexo.

Luego, el problema de control óptimo que consideraremos consiste en minimizar el funcional de costo sobre el conjunto de controles admisibles, i.e.

$$\text{Min } J(u) \quad \text{sujeto a } u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (P)$$

2.2.2. Hipótesis generales

Establecemos ahora las hipótesis que haremos a lo largo del capítulo. En lo que sigue, dado un espacio euclídeo \mathbb{R}^l , denotamos con $|\cdot|$ a la norma euclídea y cuando consideremos el espacio de Lebesgue $L^2([0, T]; \mathbb{R}^l)$ notamos con $\|\cdot\|_{L^2}$ o simplemente $\|\cdot\|$ a su norma.

(H1) Hipótesis sobre la dinámica:

La función $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal y tiene la forma,

$$g(t, y, u) = A(t)y + B(t)u + C(t),$$

donde $A : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ y $C : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones Lipschitz continuas.

(H2) Hipótesis sobre el costo:

La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, continuamente diferenciable y existe $C_f > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\nabla f(y)| \leq C_f [|y| + 1]. \quad (2.4)$$

Nota 2.2.1. 1. La hipótesis **(H1)** garantiza que para cada $u \in L^2[0, T]$ el sistema (2.1) admita una única solución continua y_u (ver [49]). Además, de la linealidad de la dinámica y el Lema de Grönwall se desprende que existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_u(t)| \leq C [|x| + \|u\|_{L^2} + 1]. \quad (2.5)$$

Dado que el conjunto U_{ad} es compacto, el lado derecho de desigualdad previa está uniformemente acotado para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

2. De la continuidad de f e y_u surge que la función J está bien definida y además el supremo sobre $[0, T]$ en (2.2) es en efecto un máximo.

3. Por último, de **(H2)** tenemos que sobre todo conjunto acotado $K \subset \mathbb{R}^n$, para $x, y \in K$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \int_0^1 |\nabla_y f(y + \xi(x - y))| |x - y| d\xi \\ &\leq C_f [|y| + |x - y| + 1] |x - y| \\ &\leq \tilde{C}_f |x - y|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde \tilde{C}_f es una constante que depende del conjunto K acotado. En particular, dado que \mathcal{U}_{ad} es acotado en $L^2[0, T]$ y la condición inicial x está fija, de la primera observación de esta nota resulta que existe $M_f > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ se tiene

$$\sup_{t \in [0, T]} |\nabla f(y_u(t))| \leq M_f, \quad (2.7)$$

y existe $L_f > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathcal{U}_{ad}$ obtenemos

$$\sup_{t \in [0, T]} |f(y_u(t)) - f(y_v(t))| \leq L_f \sup_{t \in [0, T]} |y_u(t) - y_v(t)|. \quad (2.8)$$

Estas últimas desigualdades nos serán de gran utilidad en las próximas secciones.

2.2.3. Condiciones de optimalidad

En esta sección daremos condiciones de optimalidad necesarias y suficientes para el problema en tiempo continuo. La idea principal es considerar el problema de control óptimo como un problema de optimización no lineal en el espacio $L^2[0, T]$. Notemos que como el conjunto imagen U_{ad} es convexo y compacto, es claro que el conjunto de controles admisibles \mathcal{U}_{ad} es un subconjunto convexo y cerrado de $L^2[0, T]$.

Empezamos analizando algunas propiedades de la función de costo J que se deducen fácilmente de las hipótesis.

Lema 2.2.2. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), la función J es convexa y Lipschitz continua sobre \mathcal{U}_{ad} .*

Demostración. Si (H1) se verifica, es decir, si la dinámica es lineal, entonces la aplicación $u \mapsto y_u$ es afín. Si además se verifica (H2), entonces la función f es convexa y por lo tanto, la aplicación $u \mapsto J(u)$ resultará convexa, ya que el supremo de funciones convexas es convexo (ver [33, Capítulo 1]). Por último, de (2.8) en la Nota 2.2.1, deducimos que J es un funcional Lipschitz continuo sobre el conjunto \mathcal{U}_{ad} . En efecto, sean $u, v \in \mathcal{U}_{ad}$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos,

$$\begin{aligned} |y_u(t) - y_v(t)|^2 &\leq 2 \left| \int_0^t A(s)[y_u(s) - y_v(s)] ds \right|^2 + 2 \left| \int_0^t B(s)[u(s) - v(s)] ds \right|^2 \\ &\leq 2 \left(\int_0^t |A(s)|^2 ds \right) \left(\int_0^t |y_u(s) - y_v(s)|^2 ds \right) \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t |B(s)|^2 ds \right) \left(\int_0^t |u(s) - v(s)|^2 ds \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como las funciones A y B son continuas sobre el intervalo compacto $[0, T]$, deducimos que son acotadas. Luego, aplicando el Lema de Grönwall a esta última desigualdad, podemos deducir que existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_u(t) - y_v(t)| \leq C \|u - v\|_{L^2}. \quad (2.10)$$

De (2.8), obtenemos

$$|J(u) - J(v)| \leq L_f C \|u - v\|_{L^2}. \quad (2.11)$$

□

Gracias al resultado anterior, podemos demostrar que el problema planteado tiene solución.

Lema 2.2.3. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), existe una solución óptima para (P).*

Demostración. De la convexidad y compacidad del conjunto U_{ad} se deduce que \mathcal{U}_{ad} es un subconjunto convexo, cerrado y acotado del espacio reflexivo $L^2[0, T]$. Luego, de [33, Teorema 3.7] es un subconjunto débilmente cerrado de $L^2[0, T]$. Del lema previo tenemos que el funcional J es continuo y convexo en $L^2[0, T]$, por lo tanto es semicontinuo inferiormente en la topología débil. El resultado se desprende de [33, Corolario 3.23].

□

Dado que el problema admite al menos una solución, queremos obtener condiciones que nos ayuden a encontrarla. De la definición de J , no es de esperar que dicha función sea diferenciable. Sin embargo, gracias a la convexidad podremos demostrar que es direccionalmente diferenciable, lo cual nos será de gran utilidad a la hora de establecer condiciones de optimalidad. Comenzamos por el siguiente resultado:

Proposición 2.2.4. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), la función J es direccionalmente derivable en todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ y la derivada direccional en una dirección $v \in L^2[0, T]$ está dada por,*

$$J'(u; v) = \sup_{t \in C_u} \langle \nabla f(y_u(t), z_v(t)), v(t) \rangle, \quad (2.12)$$

donde C_u es el conjunto de los tiempos críticos, asociado a u , i.e.

$$C_u := \operatorname{argmax}_{t \in [0, T]} f(y_u(t)), \quad (2.13)$$

y z_v es la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t), & t \in [0, T] \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Demostración. Como f es convexa y diferenciable, de [29, Teorema 4.16] sabemos que J es direccionalmente derivable y en cada dirección v la derivada direccional es

$$J'(u; v) = \sup_{t \in C_u} D_u f(y_u(t))v. \quad (2.15)$$

Denotamos con ϕ a la aplicación $u \mapsto y_u$, luego $D_u f(y_u(t))v = \langle \nabla f(y_u(t)), \phi'(u; v) \rangle$, donde

$$\phi'(u; v) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{y_{u+sv} - y_u}{s}. \quad (2.16)$$

Como para todo $s > 0$, tenemos que $\frac{y_{u+sv} - y_u}{s}$ es solución de (2.14), podemos concluir que

$$\phi'(u; v) = z_v, \quad (2.17)$$

donde z_v es la única solución de (2.14). \square

Como es sabido de resultados clásicos de optimización continua (ver Teorema 1.1.1 y [26, Capítulo 3]), si la función que estamos minimizando es direccionalmente derivable, en este caso J , entonces una condición necesaria para que un punto $u \in \mathcal{U}_{ad}$ sea óptimo es la siguiente:

$$J'(u; v) \geq 0, \quad \forall v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u). \quad (2.18)$$

Y si además la función es convexa, entonces (2.18) es una condición suficiente de optimalidad. Gracias a la proposición anterior, la condición (2.18) resulta equivalente a:

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \sup_{t \in C_u} \langle \nabla f(y_u(t)), z_v(t) \rangle \geq 0. \quad (2.19)$$

Sin embargo, nos gustaría tener una condición de optimalidad donde la dependencia con respecto a v sea más explícita. Para ello, analizamos la aplicación $v \mapsto z_v$. Por la fórmula de variación de las constantes, tenemos que la solución de (2.14) está dada por

$$z_v(t) = \int_0^t S_{ts} B(s) v(s) ds, \quad (2.20)$$

donde la matriz S_{ts} es la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S_{ts} = A(t)S_{ts}, & t \in [s, T] \\ S_{ss} = I. \end{cases} \quad (2.21)$$

Luego, a la derivada direccional de J la podemos escribir como,

$$J'(u; v) = \sup_{t \in C_u} \left\langle \nabla f(y_u(t)), \int_0^t S_{ts} B(s) v(s) ds \right\rangle. \quad (2.22)$$

Ahora, podemos definir para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$ y $t \in [0, T]$, el funcional $q_{u,t} \in L^2[0, T]$, como sigue

$$q_{u,t}(s) := I_{[0,t]}(s) B^\top(s) S_{ts}^\top \nabla f(y_u(t)), \quad \forall s \in [0, T], \quad (2.23)$$

donde $I_{[0,t]}$ es la función indicatriz del conjunto $[0, t]$, es decir, es igual a 1 si $0 \leq s \leq t$ y 0 si no. Tenemos entonces,

$$J'(u; v) = \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle, \quad (2.24)$$

donde el producto escalar es el usual de $L^2[0, T]$. Teniendo en cuenta esta última expresión, obtenemos fácilmente el siguiente resultado:

Teorema 2.2.5. *Asumimos que valen (H1) y (H2). Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}$, luego u es óptimo para (P) si y sólo si*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}-u} \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle = 0. \quad (2.25)$$

Demostración. \Rightarrow) Si u es un minimizador de J entonces vale (2.18), luego de (2.24), deducimos que

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle \geq 0. \quad (2.26)$$

De (H1), tenemos que las funciones A , B y C son acotadas en $[0, T]$, además de (H2) sabemos que la función f es diferenciable con continuidad y de la Nota 2.2.1 tenemos que el gradiente de f evaluado en las trayectorias asociadas a controles de \mathcal{U}_{ad} es acotado. Por lo tanto, de la definición (2.23), surge que $q_{u,t}$ es acotado en $L^2[0, T]$ uniformemente en $t \in [0, T]$, para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Entonces, como \mathcal{U}_{ad} es convexo, tomar el ínfimo sobre el cono tangente $T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ en (2.26) es equivalente a minimizar sobre el cono radial $R_{\mathcal{U}_{ad}}(u) = \mathcal{U}_{ad} - u$, ya que $\text{cl}(R_{\mathcal{U}_{ad}}(u)) = T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ (ver [29, Proposición 2.55]).

Finalmente, como $v = 0$ es una dirección admisible, tenemos que

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad} - u} \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle = 0. \quad (2.27)$$

\Leftrightarrow) Como J es direccionalmente derivable y convexa, la condición (2.18) es también una condición de optimalidad suficiente (ver Teorema 1.1.1), luego u es óptimo. \square

Si bien la condición de optimalidad (2.25) tiene la ventaja de caracterizar las soluciones óptimas, tiene también la desventaja de involucrar al conjunto de los tiempos críticos C_u , cuyo cálculo podría ser complicado y el cual no es muy conveniente a la hora de diseñar algoritmos. Teniendo en cuenta esta última cuestión, presentamos dos condiciones de optimalidad necesarias en las cuales no se involucra a este conjunto.

De ahora en adelante notamos $\mathcal{U}_u := \mathcal{U}_{ad} - u$, y cualquier elemento de este conjunto diremos que es una dirección admisible.

Teorema 2.2.6. *Bajo las hipótesis anteriores, asumimos que se verifica (2.25). Entonces vale*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}, v \rangle = 0, \quad (2.28)$$

y

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\} = 0. \quad (2.29)$$

Además, la condición (2.29) implica

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 = 0, \quad (2.30)$$

para todo $\rho > 0$.

Demostración. Primero, como asumimos que vale (2.25), tenemos

$$0 = \inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}, v \rangle, \quad (2.31)$$

y como $v = 0$ es una dirección admisible, obtenemos

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}, v \rangle = 0. \quad (2.32)$$

Por otro lado, de la definición, tenemos que $f(y_u(t)) \leq J(u)$ para todo $t \in [0, T]$, luego

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\} \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}, v \rangle. \quad (2.33)$$

De las ecuaciones (2.32) y (2.33), se deduce

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\} \leq 0. \quad (2.34)$$

Ahora, de la definición de C_u , se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle &= \sup_{t \in C_u} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\} \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$0 = \inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in C_u} \langle q_{u,t}, v \rangle \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle\}. \quad (2.35)$$

Combinando (2.34) y (2.35), concluimos que vale (2.29).

Además, dado que para todo $t \in [0, T]$ y $v \in \mathcal{U}_u$ se tiene

$$f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle \leq f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle + \frac{\rho}{2} \|v\|^2, \quad (2.36)$$

podemos concluir que si vale (2.29), entonces

$$0 \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_u} \sup_{t \in [0, T]} f(y_u(t)) - J(u) + \langle q_{u,t}, v \rangle + \frac{\rho}{2} \|v\|^2, \quad (2.37)$$

y como $v = 0$ pertenece al conjunto \mathcal{U}_u , deducimos que vale (2.30). \square

2.3. Problema en tiempo discreto

En la sección anterior presentamos el problema de control óptimo en tiempo continuo que nos interesa resolver. Como el objetivo central de este capítulo es proponer métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas a dicho problema, lo que haremos es definir un problema discreto en tiempo que aproxime en algún sentido al problema continuo. Propondremos condiciones de optimalidad para este nuevo problema, que sean de utilidad para diseñar un algoritmo que nos ayude a resolver el problema discreto.

2.3.1. Descripción del problema en tiempo discreto

Dividimos al intervalo de tiempo $[0, T]$ en $N \in \mathbb{N}$ subintervalos de longitud $h := T/N$. Consideraremos controles que sean seccionalmente constantes, es decir,

$$\mathcal{U}^h = \{u \in L^2[0, T] : u \text{ es constante p.c.t.p en } [kh, (k+1)h), k = 0, \dots, N-1\}. \quad (2.38)$$

Y en este caso el conjunto de controles admisibles será

$$\mathcal{U}_{ad}^h = \{u \in \mathcal{U}^h : u(t) \in U_{ad} \text{ p.c.t. } t \in [0, T]\}. \quad (2.39)$$

A cada elemento de este conjunto lo podemos identificar con el elemento $(u^n)_{n=0}^{N-1}$, con $u^n \in U_{ad}$, para todo $n = 0, \dots, N-1$. Luego, podemos identificar al conjunto \mathcal{U}_{ad}^h con $U_{ad}^N \subset \mathbb{R}^{r \times N}$.

Como dijimos anteriormente, la idea no será sólo reemplazar el conjunto de controles, sino que plantearemos un nuevo problema discreto en tiempo. Para ello, dado un control $u \in \mathcal{U}^h$ definimos el estado y_u asociado a dicho control de manera recursiva, mediante un esquema de Euler discreto,

$$\begin{cases} y_u^{n+1} = y_u^n + hg(t_n, y_u^n, u^n), & n = 0, \dots, N-1, \\ y_u^0 = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.40)$$

Definimos el funcional de costo discreto $J^h : \mathcal{U}^h \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$J^h(u) := \text{máx} \{f(y_u^n) : n = 0, \dots, N\}. \quad (2.41)$$

Luego, el problema de control óptimo en tiempo discreto que consideraremos es

$$\text{Min } J^h(u) \text{ sujeto a } u \in \mathcal{U}_{ad}^h. \quad (P^h)$$

Nota 2.3.1. De las hipótesis **(H1)** y **(H2)** y de la definición, resulta J^h continuo, luego como el conjunto U_{ad}^N es compacto en $\mathbb{R}^{r \times N}$, es claro que el problema (P^h) tiene al menos una solución.

2.3.2. Condiciones de optimalidad para el problema discreto

Siguiendo los argumentos presentados en la Proposición 2.2.4, obtenemos el siguiente resultado análogo, para el caso discreto.

Proposición 2.3.2. *Asumimos que valen (H1) y (H2). Dado un control discreto $u = (u^n)_{n=0}^{N-1}$, el funcional J^h es direccionalmente diferenciable en u y la derivada direccional en una dirección $v \in \mathcal{U}^h$ está dada por*

$$J^{h'}(u; v) = \max_{n \in C_u} \langle \nabla f(y_u^n), z_v^n \rangle, \quad (2.42)$$

donde C_u es el conjunto de los tiempos críticos, definido como

$$C_u := \operatorname{argmax}_{0 \leq n \leq N} f(y_u^n), \quad (2.43)$$

y z_v es la solución del siguiente sistema de ecuaciones en diferencia,

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h[A(t_n)z^n + B(t_n)v^n], & n = 0, \dots, N-1, \\ z^0 = 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

con $v^n := v(t_n)$.

Ahora veamos que a z_v , definida por (2.44) la podemos escribir como función de $v = (v^j)_{j=0}^{N-1}$ de una manera más explícita. En efecto,

$$z_v^n = \sum_{j=0}^{n-1} S_{n-1,j} v^j \quad (2.45)$$

donde S está definida por

$$\begin{cases} S_{n+1,j} = [I + hA(t_{n+1})] S_{n,j}, & 0 \leq j \leq n, \\ S_{jj} = hB(j), & \forall j \geq 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Luego, como hicimos en el caso continuo, definimos para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ y $n = 0, \dots, N-1$ la matriz $q_{u,n} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ de columnas $q_{u,n}^j$ dadas por

$$q_{u,n}^j := \begin{cases} 0 & n \leq j \leq N-1, \\ S_{n-1,j}^\top \nabla f(y_u^n) & 0 \leq j < n. \end{cases} \quad (2.47)$$

Podemos concluir entonces,

$$J^{h'}(u; v) = \max_{n \in C_u} \sum_{j=0}^{n-1} \langle q_{u,n}^j, v^j \rangle = \max_{n \in C_u} \sum_{j=0}^{N-1} \langle q_{u,n}^j, v^j \rangle = \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, v \rangle, \quad (2.48)$$

donde el último producto escalar está definido como $\langle q_{u,n}, v \rangle := \operatorname{tr}(q_{u,n}^\top v)$. Teniendo esto en cuenta, podemos enunciar el siguiente teorema que nos da una condición de optimalidad necesaria y suficiente.

Teorema 2.3.3. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), un control $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ es un control óptimo para el problema (P^h) si y sólo si*

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, v \rangle = 0, \quad (2.49)$$

donde $\mathcal{U}_u^h := \mathcal{U}_{ad}^h - u$.

Esta condición también tiene la desventaja de involucrar al conjunto de puntos críticos, es por eso, que planteamos la condición análoga a la del caso continuo (2.29). La diferencia es que en el caso discreto esta condición no sólo es necesaria, sino que también resulta suficiente.

Teorema 2.3.4. *Bajo las hipótesis anteriores, la condición (2.49) es equivalente a*

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} = 0. \quad (2.50)$$

Demostración. De la misma manera en que lo hicimos para el caso continuo en el Teorema 2.2.6, podemos ver que (2.49) implica (2.50).

Por otro lado, supongamos que vale (2.50). Si suponemos que (2.49) no es cierta, entonces

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, v \rangle < 0, \quad (2.51)$$

pues $v = 0$ es una dirección admisible. Luego, existe una dirección $w \in \mathcal{U}_u^h$ para la cual

$$\max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, w \rangle < 0. \quad (2.52)$$

Tenemos entonces que para todo $\lambda \in (0, 1)$,

$$\max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle < 0. \quad (2.53)$$

Como \mathcal{U}_{ad}^h es convexo, λw es una dirección admisible para todo $\lambda \in (0, 1)$.

De (2.50), tenemos,

$$\max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(t_n)) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle\} \geq 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1). \quad (2.54)$$

Como $\max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle < 0$, necesariamente tiene que valer

$$\max_{n \notin C_u} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle\} \geq 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad (2.55)$$

y tomando $\lambda \downarrow 0$ obtenemos

$$\max_{n \notin C_u} \{f(y_u^n) - J^h(u)\} \geq 0, \quad (2.56)$$

lo cual contradice la definición de C_u . Concluimos entonces que vale (2.49). \square

Nuevamente, como hicimos en el caso continuo, presentamos una condición de optimalidad más regular, teniendo siempre presente que el objetivo es plantear un algoritmo para resolver el problema. Es por ello que sumamos un término cuadrático, que convierte a la función que estamos minimizando en un función fuertemente convexa, y por lo tanto tiene un único minimizador.

Teorema 2.3.5. *Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$, la condición (2.49) es equivalente a*

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 = 0, \quad (2.57)$$

para todo $\rho > 0$.

Demostración. Empecemos suponiendo que vale (2.49). Como $v = 0$ es una dirección admisible, tenemos

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 \leq 0. \quad (2.58)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, v \rangle &= \max_{n \in C_u} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} \\ &\leq \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

luego, combinando (2.49), (2.58) y (2.59) deducimos que vale (2.57).

Ahora, asumamos que (2.57) es cierta. Si suponemos que (2.49) no vale, es decir

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, v \rangle < 0, \quad (2.60)$$

entonces, existe $w \in \mathcal{U}_u^h$ tal que

$$\max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, w \rangle < 0. \quad (2.61)$$

Sea $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ lo suficientemente chico de manera que para todo $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ se obtenga

$$\max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, w \rangle + \frac{\rho}{2} \lambda \|w\|^2 < 0. \quad (2.62)$$

Entonces, para todo $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ tenemos,

$$\lambda \left(\max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, w \rangle + \frac{\rho}{2} \lambda \|w\|^2 \right) = \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle + \frac{\rho}{2} \|\lambda w\|^2 < 0. \quad (2.63)$$

Como \mathcal{U}_{ad}^h es un conjunto convexo, $\lambda w \in \mathcal{U}_u^h$ para todo $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$. De (2.57), concluimos

$$\max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\lambda w\|^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}). \quad (2.64)$$

Luego, de (2.62), tenemos necesariamente que

$$\max_{n \notin C_u} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, \lambda w \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\lambda w\|^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}). \quad (2.65)$$

Tomando $\lambda \downarrow 0$ deducimos

$$\max_{n \notin C_u} f(y_u^n) - J^h(u) \geq 0, \quad (2.66)$$

que contradice la definición de C_u . Por lo tanto (2.49) debe valer. \square

2.4. Convergencia

Hasta aquí no hemos dicho de qué manera podemos garantizar que el problema discreto aproxima al problema continuo. Para analizar la relación que existe y dado que en este problema tanto el tiempo inicial como la condición inicial están fijas, definimos

$$V := \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u), \quad (2.67)$$

y para el problema discreto

$$V^h := \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^h} J^h(u).$$

Es decir, consideramos la función valor para el problema continuo y discreto evaluada en nuestro tiempo y condición inicial fija $(0, x)$. A V y V^h los llamamos valor del problema continuo y discreto, respectivamente.

En [41] se prueba que

$$|V - V^h| \leq M\sqrt{h}, \quad (2.68)$$

para cierta constante $M > 0$, independiente de la condición inicial x . Además de la prueba de dicho resultado en [41], se puede ver que para todo minimizador del problema discreto $\bar{u}^h \in \mathcal{U}_{ad}^h$, se obtiene

$$|V - J(\bar{u}^h)| \leq M\sqrt{h}. \quad (2.69)$$

Lo cual implica que las soluciones óptimas del problema discreto dan buenas aproximaciones del valor óptimo del problema continuo. Más aún, de (2.69) deducimos que la sucesión de soluciones óptimas de los problemas discretos $\{\bar{u}^h\}_h$ es una sucesión minimizante para el problema (P), cuando $h \rightarrow 0$. Luego, como el funcional J es convexo y continuo, resulta débilmente semicontinuo inferiormente. Podemos deducir entonces que todo límite débil de dicha sucesión es un control óptimo para el problema original.

En particular, si J es fuertemente convexo, entonces se tiene que toda la sucesión $\{\bar{u}^h\}$ converge fuertemente al único control óptimo del problema (P) (ver por ejemplo [30, Lema 2.33]).

2.5. Algoritmo

En esta sección, basados en la condición de optimalidad (2.57), presentaremos un algoritmo para resolver el problema discreto. Sabemos que si un control es óptimo entonces se verifica (2.57), y si no es óptimo, entonces la dirección que realiza el mínimo en (2.57) es una dirección de descenso. En efecto, definimos $\theta : U_{ad}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $\eta : U_{ad}^N \rightarrow \mathbb{R}^{m \times N}$ (mediante las identificaciones $\mathcal{U}_{ad}^h \equiv U_{ad}^N$, $U_u^N \equiv U_{ad}^N - u$) como

$$\theta(u) := \min_{v \in U_u^N} \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2, \quad (2.70)$$

$$\eta(u) := \operatorname{argmin}_{v \in U_u^N} \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2. \quad (2.71)$$

Luego,

$$\begin{aligned} J^{h'}(u; \eta(u)) &= \max_{n \in C_u} \langle q_{u,n}, \eta(u) \rangle \\ &\leq \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n) - J^h(u) + \langle q_{u,n}, \eta(u) \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\eta(u)\|^2 \\ &= \theta(u) < 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Teniendo en cuenta esto último, proponemos un método de descenso. Primero presentamos el algoritmo conceptual, es decir, donde asumimos que todos los cálculos se pueden realizar de manera exacta y probamos la convergencia del mismo. Luego damos un algoritmo implementable teniendo en cuenta los errores cometidos y probamos que un criterio de parada adecuado, puede ser alcanzado en tiempo finito si los subproblemas involucrados pueden resolverse con suficiente precisión.

Para diseñar el algoritmo decidimos utilizar la condición de optimalidad (2.57), ya que resulta la más adecuada entre las que presentamos. Por un lado, no involucra al conjunto de tiempos críticos, lo cual es una ventaja a la hora de obtener resultados de convergencia, ya que la aplicación multivaluada $u \mapsto C_u$ no es en general continua. Por otro lado, agregar el término cuadrático nos garantiza que la función a minimizar es fuertemente convexa y por lo tanto sabemos que existe una única solución. Finalmente, bajo nuestras hipótesis, se puede ver que θ y η son funciones continuas, (ver [75, Sección 5.4]).

La idea principal del algoritmo es en cada paso calcular la dirección de descenso dada por el minimizador de (2.57) y luego seguir un paso de Armijo. Comenzamos presentando el algoritmo de manera conceptual.

Algoritmo 2.1. (Algoritmo conceptual)

Paso 1: Elegir los parámetros $\alpha, \beta \in (0, 1)$ y $\rho > 0$. Definir $k := 1$ y elegir un control inicial $u_1 \in U_{ad}^N$.

Paso 2: Calcular:

$$y_{u_k}^n, f(y_{u_k}^n), \quad n = 0, \dots, N,$$

$$J^h(u_k) = \max_{n=0, \dots, N} f(y_{u_k}^n).$$

Paso 3: Calcular $\theta(u_k)$ y $\eta(u_k)$ dados por (2.70) y (2.71), respectivamente.

Paso 4: Si $\theta(u_k) = 0$, **Parar** (u_k satisface la condición de optimalidad). Si no, encontrar el máximo $\lambda_k = \beta^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$J^h(u_k + \lambda_k \eta(u_k)) < J^h(u_k) + \alpha \lambda_k \theta(u_k).$$

Paso 5: Definir $u_{k+1} := u_k + \lambda_k \eta(u_k)$, $k := k + 1$ y volver al **Paso 2**.

En la práctica, el **Paso 3** en el que se calculan (2.70) y (2.71), no se puede hacer de manera exacta. Por lo tanto un criterio de parada como el que aparece en el **Paso 4** carece de sentido. Es por eso que resulta natural, reemplazarlo por el criterio $|\theta(u_k)| \leq \varepsilon$, con alguna tolerancia positiva ε . No obstante, gracias a la naturaleza de los problemas (2.70) y (2.71) se pueden obtener soluciones muy precisas de los mismos. Notemos que,

si introducimos una variable auxiliar $\xi \in \mathbb{R}$, obtenemos el siguiente programa cuadrático equivalente,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{\rho}{2} \|v\|^2 + \xi \\ \text{s.a.} \quad & v \in U_u^N, \xi \in \mathbb{R}, \\ & \xi \geq f(y_u^n) + \langle q_{u,n}, v \rangle, \quad n = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.73)$$

el cual puede resolverse de manera eficiente con algoritmos conocidos (por ejemplo [38]).

Teniendo esto en mente, presentamos ahora un algoritmo implementable, desde el punto de vista computacional. El Algoritmo 2.2 es una versión inexacta del Algoritmo 2.1, pero con un criterio de parada alcanzable.

Algoritmo 2.2. (Algoritmo implementable)

Paso 1: Elegir los parámetros $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\rho > 0$ y la tolerancia $\varepsilon > 0$. Definir $k := 1$ y elegir un control inicial $u_1 \in U_{ad}^N$.

Paso 2: Calcular:

$$\begin{aligned} & y_{u_k}^n, f(y_{u_k}^n), \quad n = 0, \dots, N, \\ & J^h(u_k) = \max_{n=0, \dots, N} f(y_{u_k}^n). \end{aligned}$$

Paso 3: Obtener aproximaciones $\hat{\theta}(u_k)$ y $\hat{\eta}(u_k)$ de (2.70) y (2.71), respectivamente, i.e.,

$$\hat{\theta}(u_k) = \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_{u_k}^n) - J^h(u_k) + \langle q_{u_k, n}, \hat{\eta}(u_k) \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\hat{\eta}(u_k)\|^2,$$

con

$$\hat{\theta}(u_k) = \theta(u_k) + e_{\theta}^k, \quad \hat{\eta}(u_k) = \eta(u_k) + e_{\eta}^k, \quad (2.74)$$

donde $e_{\theta}^k \in \mathbb{R}$ y $e_{\eta}^k \in \mathbb{R}^N$ son errores desconocidos.

Paso 4: Si $|\hat{\theta}(u_k)| < \varepsilon$, **Parar**. Si no, encontrar el máximo $\lambda_k = \beta^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$J^h(u_k + \lambda_k \hat{\eta}(u_k)) < J^h(u_k) + \alpha \lambda_k \hat{\theta}(u_k).$$

Paso 5: Definir $u_{k+1} := u_k + \lambda_k \hat{\eta}(u_k)$, $k := k + 1$ y volver al **Paso 2**.

2.5.1. Convergencia del algoritmo

Teorema 2.5.1. *Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión de controles generada por el Algoritmo 2.1. Entonces, o bien $\{u_k\}$ es finita y termina en un minimizador de (P^h) , o bien es infinita y todo punto de acumulación de $\{u_k\}$ es un control óptimo.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es infinita, luego como U_{ad}^N es compacto, existe una subsucesión $\{u_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a algún elemento $\bar{u} \in U_{ad}^N$. Como el funcional J^h es continuo, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^h(u_{k_n}) = J^h(\bar{u}). \quad (2.75)$$

Como supusimos que $\{u_k\}$ es infinita, entonces debemos tener $\theta(u_k) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$J^h(u_{k+1}) < J^h(u_k) + \alpha \lambda_k \theta(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.76)$$

Por lo tanto, la sucesión $\{J^h(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente y en consecuencia toda la sucesión resulta convergente,

$$J^h(u_k) \rightarrow J^h(\bar{u}). \quad (2.77)$$

De (2.76), (2.77) y el hecho que $\lambda_k \theta(u_k) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \theta(u_k) = 0. \quad (2.78)$$

Gracias al Teorema 2.3.5, para probar que \bar{u} es óptimo alcanza con probar que $\theta(\bar{u}) = 0$. Si suponemos que $\theta(\bar{u}) < 0$, entonces existe $\bar{\lambda}$, el máximo de la forma β^j tal que

$$J^h(\bar{u} + \bar{\lambda} \eta(\bar{u})) < J^h(\bar{u}) + \alpha \bar{\lambda} \theta(\bar{u}). \quad (2.79)$$

Como J^h , η y θ con continuas, existe $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$J^h(u_{k_n} + \bar{\lambda} \eta(u_{k_n})) - J^h(u_{k_n}) - \alpha \bar{\lambda} \theta(u_{k_n}) < 0, \quad \forall n \geq \bar{N}. \quad (2.80)$$

Concluimos entonces que $\lambda_{k_n} \geq \bar{\lambda}$ para todo $n \geq \bar{N}$. Luego, de (2.78) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(u_{k_n}) = 0. \quad (2.81)$$

Pero, de la continuidad de θ se deduce $\theta(\bar{u}) = 0$, lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto, debemos tener $\theta(\bar{u}) = 0$, i.e. \bar{u} es óptimo para (P^h) . \square

Nota 2.5.2. Denotamos \mathcal{S} al conjunto de soluciones de (P^h) , i.e.

$$\mathcal{S} := \left\{ \bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h : J^h(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^h} J^h(u) \right\}. \quad (2.82)$$

Luego, como el conjunto \mathcal{U}_{ad}^h es compacto, del teorema anterior deducimos que si $\{u_k\}$ es la sucesión generada por el Algoritmo 2.1 entonces,

$$d(u_k, \mathcal{S}) \rightarrow 0, \quad (2.83)$$

donde d es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^{r \times N}$. En particular, si el conjunto \mathcal{S} es un singulete, como por ejemplo en el caso de un funcional de costo estrictamente convexo, entonces toda la sucesión $\{u_k\}$ converge a la única solución óptima.

Ahora veremos un resultado de convergencia para el Algoritmo 2.2

Teorema 2.5.3. Sea $\{u_k\}$ la sucesión generada por el Algoritmo 2.2 y supongamos que en cada iteración los subproblemas (2.70) y (2.71) se pueden resolver con suficiente precisión, de manera que los errores cometidos verifican,

$$|e_\theta^k| < \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{4}, \quad |e_\eta^k| < \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{4L}, \quad (2.84)$$

donde L es la constante de Lipschitz de J^h . Luego, $\{u_k\}$ es finita, i.e., existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|\hat{\theta}(u_K)| < \varepsilon$ y por lo tanto el algoritmo termina.

Demostración. Supongamos que $\{u_k\}$ es infinita. Luego,

$$\hat{\theta}(u_k) \leq -\varepsilon < 0 \quad (2.85)$$

y entonces $\hat{\eta}(u_k)$ es una dirección de descenso para todo $k \in \mathbb{N}$, y el paso de Armijo en el

Paso 4 del Algoritmo 2.2 está bien definido.

Usando los mismos argumentos que en la demostración del Teorema 2.5.1, existe una subsucesión $\{u_{k_n}\}$ que converge a algún \bar{u} y además, toda la sucesión verifica

$$J^h(u_k) \rightarrow J^h(\bar{u}) \quad \text{y} \quad \lambda_k \hat{\theta}(u_k) \rightarrow 0. \quad (2.86)$$

De (2.85) se deduce

$$\lambda_k \rightarrow 0. \quad (2.87)$$

Además, de (2.84) y (2.85) deducimos que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\theta(u_k) \leq -\frac{3}{4}\varepsilon. \quad (2.88)$$

De la continuidad de θ resulta,

$$\theta(\bar{u}) \leq -\frac{3}{4}\varepsilon < 0, \quad (2.89)$$

y entonces $\eta(\bar{u})$ es una dirección de descenso. Luego, para $\bar{\alpha} = \frac{1+\alpha}{2} \in (0, 1)$, existe $\bar{\lambda} = \beta^{\bar{j}} > 0$ tal que

$$J^h(\bar{u} + \bar{\lambda}\eta(\bar{u})) < J^h(\bar{u}) + \bar{\alpha}\bar{\lambda}\theta(\bar{u}), \quad (2.90)$$

De la continuidad de J^h , η y θ , existe $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$J^h(u_{k_n} + \bar{\lambda}\eta(u_{k_n})) - J^h(u_{k_n}) - \bar{\alpha}\bar{\lambda}\theta(u_{k_n}) < 0, \quad \forall n \geq \bar{N}. \quad (2.91)$$

De (2.74), (2.84), (2.91) y como J^h es Lipschitz continua, obtenemos

$$J^h(u_{k_n} + \bar{\lambda}\hat{\eta}(u_{k_n})) - J^h(u_{k_n}) - \bar{\alpha}\bar{\lambda}\hat{\theta}(u_{k_n}) \leq \bar{\lambda}(L|e_\eta^k| + \bar{\alpha}|e_\theta^k|) < \frac{(1-\alpha)\bar{\lambda}\varepsilon}{2}, \quad (2.92)$$

y de la definición de $\bar{\alpha}$ y (2.85), podemos deducir

$$J^h(u_{k_n} + \bar{\lambda}\hat{\eta}(u_{k_n})) - J^h(u_{k_n}) - \alpha\bar{\lambda}\hat{\theta}(u_{k_n}) < \frac{(1-\alpha)\bar{\lambda}\varepsilon}{2} + (\bar{\alpha} - \alpha)\bar{\lambda}\hat{\theta}(u_{k_n}) \leq 0. \quad (2.93)$$

Por lo tanto, $\lambda_{k_n} \geq \bar{\lambda}$ para todo $n \geq \bar{N}$, lo cual contradice (2.87). Concluimos que la sucesión $\{u_k\}$ debe ser finita. \square

2.6. Resultados Numéricos

En esta sección mostraremos una implementación del Algoritmo 2.1 en un ejemplo académico sencillo. Es un caso particular del problema minimax estudiado en [65]. Más precisamente el problema que consideramos es,

$$\min_u \left\{ \max_{t \in [0,6]} \{y_1(t) + y_2(t)\} \right\},$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |u| \leq 1.$$

Como fue probado en [65], existen infinitos controles óptimos para este problema, pero todos satisfacen $u(t) \equiv -1$ para $t \in [0, 1)$. Además, el valor óptimo se obtiene para $t = 1$ con $f(1) = 4,5$.

Nuestro esquema reprodujo estos resultados en los ensayos numéricos realizados. El Algoritmo 2.1 fue programado utilizando Scilab 5.4.1 (INRIA-ENPC, ver www.scilab.org) y se ejecutó en una Intel i7 2.67GHz con 8Gb de RAM. Cada iteración comprende la resolución de un programa cuadrático (el cual se resuelve con la caja de herramientas *quapro*) y una búsqueda lineal de Armijo.

Cuadro 2.1: Función valor discreta, errores e iteraciones

N	h	V^h	$ V^h - V $	$ \theta(u_k) $	Iter.	Tiempo (s)
60	0.100000	4.550010	0.050010	9.85e-06	136	3.73
120	0.050000	4.525000	0.025000	3.42e-07	1	0.10
240	0.025000	4.512500	0.012500	1.71e-07	1	0.48
480	0.012500	4.506250	0.006250	8.56e-08	1	2.37
960	0.006250	4.503125	0.003125	4.28e-08	1	24.13
1920	0.003125	4.501563	0.001563	2.14e-08	1	235.25

El Cuadro 2.1 muestra los resultados obtenidos para 6 particiones sucesivas del intervalo $[0, 6]$, comenzando con $N = 60$ (i.e. $h = 0,1$) y duplicando esta cantidad en los ensayos siguientes. El test de parada utilizado fue $|\theta(u_k)| < \varepsilon_N$, con $\varepsilon_N = \frac{60}{N}10^{-5}$.

En cada caso exponemos el valor óptimo, el error y el valor de $|\theta(u_k)|$, así como también la cantidad de iteraciones necesarias y el tiempo computacional requerido. En el primer ensayo ($N = 60$) utilizando un control constante arbitrario y para las particiones sucesivas tomamos como control inicial a la interpolación lineal del control obtenido en el ensayo anterior. Esta elección de controles iniciales reduce notablemente el tiempo computacional requerido, para los ensayos que siguen al primero.

La figura 2.1 muestra las gráficas de la función f evaluada en algunas iteraciones de y_{u_k} .

Se puede observar como el máximo descende en las sucesivas iteraciones y esto se debe a que el Algoritmo 2.1 es un método de descenso.

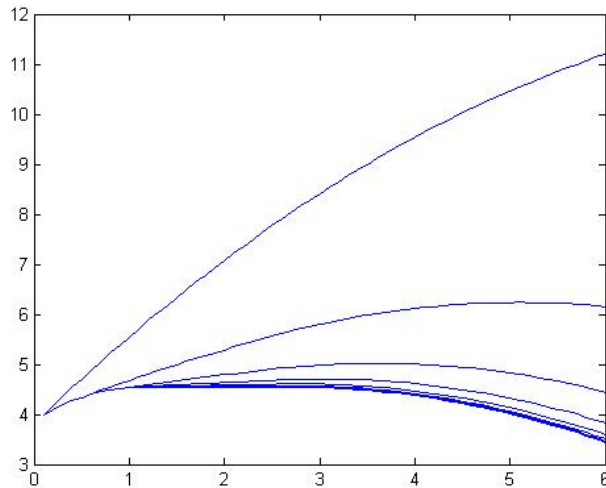


Figura 2.1: Iteraciones de f

La figura 2.2 muestra el control u obtenido por el Algoritmo 2.1 y la gráfica de la función f evaluada en el estado asociado a u . Obtenemos que $u(t) = -1$ para $t \in [0, 1)$, y f asume su máximo en $t = 1$ con un valor cercano a 4,5, como era esperado de lo expuesto en [65].

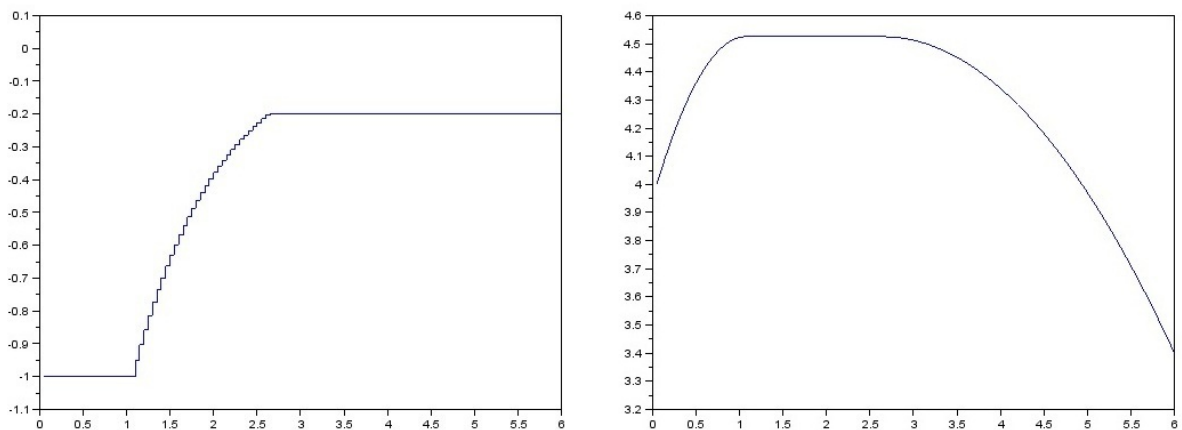


Figura 2.2: Control óptimo u y función f evaluada en la trayectoria óptima

Remarcamos que en [65] el algoritmo está basado en una condición de optimalidad que se deriva del PMP y cuya implementación requiere asumir que la función objetivo tiene un máximo aislado. La ventaja de nuestro enfoque es que no necesitamos hacer esa suposición.

Capítulo 3

Problema de control óptimo minimax con incerteza

En este capítulo estudiaremos un problema de control óptimo minimax con incertezas. El objetivo es minimizar la esperanza del supremo de una cierta función de costo, la cual depende de la trayectoria controlada y del parámetro estocástico. El estado viene dado por una ecuación diferencial lineal, donde los coeficientes involucrados también dependen del parámetro estocástico.

Lo primero que haremos será aproximar al problema mediante *aproximaciones por promedios muestrales* (SAA, por sus siglas en inglés, *sample average approximations*). Es decir, se toma una muestra aleatoria fija y se plantea un nuevo problema de control óptimo, el cual ahora resulta determinista. Estudiaremos la epi-convergencia de las funciones de costo, asociadas a estos nuevos problemas, a medida que el tamaño de la muestra tiende a infinito. También analizaremos la convergencia de minimizadores.

Con el objetivo de obtener soluciones numéricas para estos nuevos problemas, planteamos un esquema de Euler en tiempo discreto, con el cual obtenemos nuevos problemas de control óptimo. Veremos que cuando el paso de tiempo tiene a cero, los valores de los problemas discretos tienden al valor del problema que se obtiene mediante SAA. También demostraremos que existe una sucesión de problemas en tiempo discreto, para la cual, cualquier punto de acumulación de toda sucesión de minimizadores es una solución del problema original.

Por último, estudiaremos condiciones de optimalidad para los tres tipos de problemas definidos, las cuales nos serán de utilidad para plantear métodos numéricos de resolución. En particular, adaptaremos el algoritmo presentado en el Capítulo 2, para este nuevo problema discreto y veremos que siguen valiendo los mismos resultados de convergencia que teníamos. Al final del capítulo mostraremos algunos ejemplos numéricos.

3.1. Introducción

En este capítulo combinaremos algunos de los resultados presentados en el capítulo anterior, que se resumen en [46], con los recientemente publicados en [74]. Consideramos un problema de control óptimo, donde el estado está dado por una dinámica lineal, donde los coeficientes involucrados en la ecuación de estado dependen de cierto parámetro estocástico, pero los controles admisibles son funciones que dependen sólo del tiempo. El objetivo es minimizar un funcional que está dado por la esperanza del supremo sobre un intervalo de tiempo finito, de una función que depende tanto del estado como del parámetro estocástico.

Recientemente en [74], los autores presentan un enfoque numérico para resolver un problema de control óptimo con incertezas, con costo de tipo Mayer. La idea principal es aproximar al valor esperado por una aproximación de tipo SAA (ver [52, 79]). Bajo ciertas hipótesis de diferenciabilidad demuestran la epi-convergencia de los funcionales de costo y también que todos los puntos de acumulación de la sucesión de minimizadores de los problemas aproximados son controles óptimos para el problema original.

A diferencia de dicho trabajo, en este capítulo consideraremos un funcional de costo que involucra un supremo, lo cual nos permite debilitar ciertas hipótesis de diferenciabilidad, ya que no es de esperar que la función objetivo sea diferenciable. Justamente, para lidiar con este inconveniente es que sumaremos hipótesis de convexidad como lo hicimos en el capítulo anterior. Consideraremos que la función involucrada en el costo depende del estado y del parámetro estocástico. Utilizando ciertas nociones y resultados previos sobre epi-convergencia y funciones aleatorias semicontinuas inferiormente, analizaremos la relación entre el problema original y los que se obtienen como resultado de SAA.

Con el objetivo de encontrar aproximaciones numéricas de dichos problemas, planteare-

mos problemas discretos en tiempo, para los cuales también estudiaremos la convergencia de los valores. Además probaremos que existe una sucesión de problemas de tiempo discreto para los cuales, todo punto de acumulación de la sucesión de minimizadores es una solución del problema original. Daremos condiciones de optimalidad para los tres tipos de problemas, y modificando adecuadamente el método desarrollado en el capítulo anterior, propondremos un algoritmo de descenso para resolver el problema en tiempo discreto.

3.2. Problemas de control óptimo minimax

En esta sección presentaremos los tres tipos de problemas con los que trabajaremos a lo largo de la misma. Comenzamos introduciendo el problema de control minimax con incertezas que queremos resolver, al cual denotamos con (P) . Luego presentamos una primera aproximación del mismo vía SAA, que notaremos (P_M) , donde M es el tamaño de la muestra, y por último un problema discreto en tiempo (P_M^h) que aproxima a (P_M) , donde h es el tamaño de la discretización temporal. Establecemos las hipótesis con las que trabajaremos a lo largo del capítulo y por último, veremos que los problemas están bien planteados y que poseen solución.

3.2.1. Problema de control óptimo minimax con incertezas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad completo. Consideramos en el intervalo $[0, T]$, con $T < \infty$, el siguiente sistema con incertezas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t, \omega) = g(t, y(t, \omega), u(t), \omega), & t \in [0, T] \\ y(0, \omega) = x + \phi(\omega), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\omega \in \Omega$, y $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones dadas. Notamos con $y_u(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ al estado asociado al control $u(t) \in \mathbb{R}^r$. Definimos el conjunto de controles admisibles como,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2[0, T] : u(t) \in U_{ad} \subset \mathbb{R}^r, \text{ p.c.t. } t \in [0, T]\}, \quad (3.2)$$

donde U_{ad} es un conjunto compacto y convexo. El objetivo es minimizar el funcional $J : L^2[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega) \right], \quad (3.3)$$

con $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Luego, el problema de control óptimo minimax con incertezas que consideramos es

$$\text{mín } J(u); \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (P)$$

Con el objetivo de obtener un problema bien planteado, realizamos las siguientes hipótesis a lo largo de este capítulo.

(H1) Hipótesis sobre la dinámica:

a) La función g es una función afín de y y u , i.e. tiene la forma

$$g(t, y, u, \omega) = A(t, \omega)y + B(t, \omega)u + C(t, \omega), \quad (3.4)$$

donde $A : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ y $C : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones Carathéodory y están acotadas en $[0, T] \times \Omega$. Para $\Psi = A, B, C$ denotamos con M_Ψ una cota de dichas funciones.

b) Existen funciones medibles $L_\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tales que para todo $t, s \in [0, T]$ y para cada $\omega \in \Omega$,

$$|\Psi(t, \omega) - \Psi(s, \omega)| \leq L_\Psi(\omega)|t - s|. \quad (3.5)$$

c) La función ϕ es medible y acotada en Ω y denotamos con M_ϕ a una cota.

(H2) Hipótesis sobre el costo:

a) La función f es Carathéodory y la aplicación $y \mapsto f(y, \omega)$ es convexa y continuamente diferenciable para cada $\omega \in \Omega$.

b) Existe una función $C_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que pertenece a $L^1(\Omega)$, tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, y $\omega \in \Omega$,

$$|\nabla_y f(y, \omega)| \leq C_f(\omega) [|y| + 1]. \quad (3.6)$$

c) Existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{x}, \cdot)$ pertenece a $L^1(\Omega)$.

Empezamos mostrando que el estado está acotado y luego analizamos la sensibilidad del estado con respecto al control.

Lema 3.2.1. *Bajo la hipótesis (H1), para cada $u \in L^2[0, T]$ y $\omega \in \Omega$ existe una única solución y_u del sistema (3.1), y la aplicación $(t, \omega) \mapsto y_u(t, \omega)$ es una función Carathéodory. Además, existe $C > 0$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,*

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_u(t, \omega)| \leq C[|x| + \|u\|_{L^2} + 1]. \quad (3.7)$$

Demostración. Para cada $\omega \in \Omega$, la ecuación de estado (3.1) es un sistema determinista lineal, por lo tanto es claro que existe una única solución $y_u(\cdot, \omega)$, la cual es continua con respecto a su primera variable. Además de la hipótesis (H1) se desprende que la función de estado y_u es Carathéodory. En efecto, del Teorema de Picard ([49]), sabemos que para cada $\omega \in \Omega$,

$$y_u(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t, \omega), \quad (3.8)$$

donde $y_0(t, \omega) = x + \phi(\omega)$ y para todo $n \geq 0$, $y_{n+1}(t, \omega) = y_0(t, \omega) + \int_0^t y_n(s, \omega) ds$. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, T]$, la función $y_n(t, \cdot)$ es medible en Ω . Podemos concluir entonces que la función límite también es medible, y con ello concluimos que la aplicación $(t, \omega) \mapsto y_u(t, \omega)$ es una función Carathéodory.

Ahora, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |y_u(t, \omega)| &\leq \int_0^t |A(s, \omega)| |y_u(s, \omega)| ds + \int_0^t |B(s, \omega)| |u(s)| ds \\ &\quad + \int_0^t |C(s, \omega)| ds + |x| + |\phi(\omega)| \\ &\leq \int_0^t |A(s, \omega)| |y_u(s, \omega)| ds + T^{\frac{1}{2}} M_B \|u\|_{L^2} + TM_C + |x| + |\phi(\omega)|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Luego, del Lema de Grönwall obtenemos

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_u(t, \omega)| \leq M(u, \omega), \quad (3.10)$$

donde $M(u, \omega) := [T^{\frac{1}{2}} M_B \|u\|_{L^2} + TM_C + |x| + |\phi(\omega)|] e^{TM_A}$. Como la función ϕ es acotada, deducimos (3.7). \square

Nota 3.2.2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, luego para todo $y, x \in K$, de la hipótesis **(H2)** tenemos

$$\begin{aligned} |f(x, \omega) - f(y, \omega)| &\leq \int_0^1 |\nabla_y f(y + \xi(x - y), \omega)| |x - y| d\xi \\ &\leq C_f(\omega) [|y| + |x - y| + 1] |x - y| \\ &\leq \tilde{C}_f(\omega) |x - y|, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\tilde{C}_f \in L^1(\Omega)$ ya que K es acotado. En particular, del lema previo, existe $L_f \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $u, v \in \mathcal{U}_{ad}$ y $\omega \in \Omega$ obtenemos

$$\sup_{t \in [0, T]} |f(y_u(t, \omega), \omega) - f(y_v(t, \omega), \omega)| \leq L_f(\omega) \sup_{t \in [0, T]} |y_u(t, \omega) - y_v(t, \omega)|. \quad (3.12)$$

Esta última desigualdad será de gran utilidad en lo que sigue.

Lema 3.2.3. Si vale **(H1)**, entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $u, v \in L^2[0, T]$ y $\omega \in \Omega$ se tiene

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_u(t, \omega) - y_v(t, \omega)| \leq C \|u - v\|_{L^2}. \quad (3.13)$$

Demostración. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos,

$$\begin{aligned} |y_u(t, \omega) - y_v(t, \omega)| &\leq \int_0^t |A(s, \omega)| |y_u(s, \omega) - y_v(s, \omega)| ds \\ &\quad + \int_0^t |B(s, \omega)| |u(s) - v(s)| ds \\ &\leq \int_0^t |A(s, \omega)| |y_u(s, \omega) - y_v(s, \omega)| ds \\ &\quad + T^{\frac{1}{2}} M_B \|u - v\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Luego, el resultado se obtiene al aplicar el Lema de Grönwall, definiendo $C := T^{\frac{1}{2}} M_B e^{TM_A}$. □

Para demostrar que el funcional J está bien definido, necesitamos el siguiente resultado. Para facilitar la notación definimos $F : L^2[0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$F(u, \omega) := \max_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega). \quad (3.15)$$

Proposición 3.2.4. *Supongamos que valen (H1) y (H2). Entonces, la función F está bien definida, es Carathéodory y existe una función integrable $L_F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $u, v \in \mathcal{U}_{ad}$,*

$$|F(u, \omega) - F(v, \omega)| \leq L_F(\omega) \|u - v\|_{L^2}. \quad (3.16)$$

Demostración. Primero, del Lema 3.2.1 sabemos que la aplicación $t \mapsto y_u(t, \omega)$ es continua, y de (H2) también lo es la función f con respecto a su primera variable. Luego, en realidad $\sup_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega)$ es un máximo, por lo tanto F está bien definida.

Ahora, de la Nota 3.2.2, para cada $\omega \in \Omega$ tenemos,

$$\begin{aligned} |F(u, \omega) - F(v, \omega)| &\leq \max_{t \in [0, T]} |f(y_u(t, \omega)) - f(y_v(t, \omega))| \\ &\leq L_f(\omega) \max_{t \in [0, T]} |y_u(t, \omega) - y_v(t, \omega)| \\ &\leq L_f(\omega) C \|u - v\|_{L^2[0, T]} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde C está dada por el Lema 3.2.3. Luego, la aplicación $u \mapsto F(u, \omega)$ es continua para todo $\omega \in \Omega$ y entonces (3.16) vale con $L_F(\omega) := L_f(\omega)C$. De (H2) deducimos que L_F pertenece a $L^1(\Omega)$.

Ahora nos falta demostrar que para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$ la aplicación $\omega \mapsto F(u, \omega)$ es medible. Para ello, fijamos $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Del Lema 3.2.1 sabemos que para todo $t \in [0, T]$ la aplicación $\omega \mapsto y_u(t, \omega)$ es medible. Como f es Caratheódory, y por lo tanto es conjuntamente medible, deducimos que $\omega \mapsto f(y_u(t, \omega), \omega)$ es medible. Luego la función $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\psi(\omega) = \sup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} f(y_u(t, \omega), \omega) \quad (3.18)$$

es medible. Como f es continua con respecto a su primera variable y la aplicación $t \mapsto y_u(t, \omega)$ es continua para cada $\omega \in \Omega$, de la densidad de los números racionales obtenemos

$$\psi(\omega) = F(u, \omega). \quad (3.19)$$

Concluimos que $F(u, \cdot)$ es medible. □

Nota 3.2.5. *Es claro entonces que bajo las hipótesis (H1) y (H2), se tiene*

$$J(u) = \mathbb{E}[F(u, \omega)]. \quad (3.20)$$

Corolario 3.2.6. *Si suponemos que (H1) y (H2) valen, entonces el funcional J está bien definido y el problema (P) tiene solución.*

Demostración. Como la función $F(u, \cdot)$ es medible, es claro que J está bien definido. Ahora para demostrar la existencia de minimizadores, empezamos probando que J es una función propia. Para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$, tenemos

$$F(u, \omega) = \max_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega) \geq f(x + \phi(\omega), \omega). \quad (3.21)$$

Además de (H2) se obtiene que $\omega \mapsto f(x + \phi(\omega), \omega)$ es integrable, en efecto, de la Nota 3.2.2,

$$|f(x + \phi(\omega), \omega)| \leq |f(\bar{x}, \omega)| + L_f(\omega)|x + \phi(\omega) - \bar{x}|, \quad (3.22)$$

y el lado derecho de la ecuación anterior pertenece a $L^1(\Omega)$, pues $f(\bar{x}, \cdot) \in L^1(\Omega)$, ϕ es acotada y $L_f \in L^1(\Omega)$. Podemos concluir que $J(u) > -\infty$ para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Ahora, para ver que J no es idénticamente $+\infty$, del Lema 3.2.1, para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$ y para todo $t \in [0, T]$ y $\omega \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(y_u(t, \omega), \omega)| &\leq |f(x + \phi(\omega), \omega)| + L_f(\omega)|y_u(t, \omega) - y_u(0, \omega)| \\ &\leq |f(x + \phi(\omega), \omega)| + L_f(\omega)2C[|x| + \|u\|_{L^2} + 1]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nuevamente, de (H2) el lado derecho resulta integrable, y por lo tanto $J(u)$ es finito.

De la proposición anterior, para $u, v \in \mathcal{U}_{ad}$ se obtiene

$$|J(u) - J(v)| \leq \mathbb{E}[L_F] \|u - v\|_{L^2[0, T]}. \quad (3.24)$$

Luego, J es una función Lipschitz continua en \mathcal{U}_{ad} . Como para cada $\omega \in \Omega$, la función $f(\cdot, \omega)$ es convexa, y la ecuación de estado es lineal, podemos concluir que la función $F(\cdot, \omega)$ es convexa en \mathcal{U}_{ad} . De la linealidad de la esperanza, resulta J convexa en \mathcal{U}_{ad} . Por lo tanto, J es débilmente semicontinua inferiormente en \mathcal{U}_{ad} , ya que es convexa y continua. Como el conjunto imagen de los controles \mathcal{U}_{ad} es compacto, el conjunto de controles \mathcal{U}_{ad} es cerrado y acotado en $L^2[0, T]$. Usando los mismo argumentos que en el Lema 2.2.3, podemos deducir que existe un minimizador de J en \mathcal{U}_{ad} . \square

3.2.2. Aproximaciones por promedios muestrales (SAA)

Con el objetivo de aproximar al problema presentado en la sección anterior definiremos un problema de control óptimo determinista, donde el costo es un promedio muestral con respecto a la función de costo del problema original. Bajo las mismas hipótesis, fijado $M \in \mathbb{N}$, sea $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ una muestra aleatoria, independientemente \mathbb{P} -distribuida. Consideramos en el intervalo $[0, T]$, el estado dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t, \omega_i) = g(t, y(t, \omega_i), u(t), \omega_i), & t \in [0, T] \\ y(0, \omega_i) = x + \phi(\omega_i), \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (3.25)$$

El funcional de costo $J_M : L^2[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, está definido como

$$J_M(u) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M F(u, \omega_i). \quad (3.26)$$

Luego, el problema de control óptimo que consideramos es

$$\text{mín } J_M(u); \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (P_M)$$

Como mencionamos anteriormente, el problema (P_M) es un problema de control óptimo determinista, y bajo las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, es claro que está bien definido. Veamos ahora que también tenemos la existencia de minimizadores para este problema.

Proposición 3.2.7. *Supongamos que **(H1)** y **(H2)** son ciertas, luego para todo $M \in \mathbb{N}$ y toda muestra aleatoria $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$, existe una solución de (P_M) .*

Demostración. Para cada ω_i , con $i = 1, \dots, M$, la función $u \mapsto F(u, \omega_i)$ es continua y convexa, por serlo la función f y por considerar una dinámica lineal. Por lo tanto también resulta continuo y convexo el funcional J_M , lo cual implica que es débilmente semicontinuo inferiormente en \mathcal{U}_{ad} . Como el conjunto \mathcal{U}_{ad} es cerrado y acotado en el espacio reflexivo $L^2[0, T]$, podemos concluir que existe un minimizador de J_M en dicho conjunto. \square

3.2.3. Aproximación discreta en tiempo

En la próxima sección detallaremos en qué sentido (P_M) aproxima a (P) . Sin embargo (P_M) si bien es un problema de control óptimo determinista, sigue estando planteado en

tiempo continuo sobre el intervalo $[0, T]$. Es por esto que con el objetivo de encontrar soluciones numéricas, definimos un problema aproximado en tiempo discreto, el cual será fácil de resolver con el algoritmo que presentaremos más adelante.

A lo largo de esta sección, fijamos $M \in \mathbb{N}$ y $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ una muestra aleatoria independientemente \mathbb{P} -distribuida. Dividimos al intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de longitud $h = T/N$ y restringimos el conjunto de controles al de los controles seccionalmente constantes, i.e.,

$$\mathcal{U}^h = \{u \in L^2[0, T] : u \text{ es constante en } [kh, (k+1)h), k = 0, \dots, N-1\}. \quad (3.27)$$

Luego el conjunto de controles admisibles será,

$$\mathcal{U}_{ad}^h = \{u \in \mathcal{U}^h : u(t) \in U_{ad} \subset \mathbb{R}^r \text{ p.c.t. } t \in [0, T]\}. \quad (3.28)$$

Un control discreto $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ se puede identificar con el vector $(u^n)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{r \times N}$, donde $u^n \in U_{ad}$ para todo $n = 0, \dots, N-1$, luego al conjunto \mathcal{U}_{ad}^h se lo identifica con $U_{ad}^N \subset \mathbb{R}^{r \times N}$.

Introducimos un sistema aproximado en tiempo discreto. Para cada $u \in \mathcal{U}^h$ definimos al estado y_u de manera recursiva como sigue,

$$\begin{cases} y_u^{n+1}(\omega_i) = y_u^n(\omega_i) + hg(t_n, y_u^n(\omega_i), u^n, \omega_i), & n = 0, \dots, N-1, \\ y_u^0(\omega_i) = x + \phi(\omega_i), \end{cases} \quad (3.29)$$

para $i = 1, \dots, M$. Definimos al funcional $J_M^h : \mathcal{U}^h \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$J_M^h(u) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} f(y_u^n(\omega_i), \omega_i).$$

Luego, el problema de control óptimo en tiempo discreto que consideramos es

$$\min J_M^h(u); \quad u \in \mathcal{U}_{ad}^h. \quad (P_M^h)$$

En este caso, es claro que existe solución del problema dado que estamos minimizando el funcional continuo J_M^h sobre el conjunto compacto \mathcal{U}_{ad}^h .

3.3. Convergencia

En esta sección analizamos la relación que existe entre los tres problemas descriptos anteriormente. Comenzamos demostrando que las funciones objetivo de (P_M) epi-convergen

a la función objetivo de (P) cuando M tiende a infinito. También mostramos que los puntos de acumulación de una sucesión de minimizadores de (P_M) son minimizadores de (P) y que los valores asociados a (P_M) convergen al valor del problema (P) . Luego, estudiamos la discretización en tiempo y probamos que la sucesión de valores de (P_M^h) converge al valor de (P_M) cuando h tiende a cero. Finalizaremos la sección mostrando que existe una sucesión de problemas discretos $(P_M^{h_M})$ para la cual todos los puntos de acumulación de la sucesión de minimizadores son soluciones óptimas para (P) .

Como primer resultado de convergencia, de la Ley de los Grandes Números, sabemos que cuando $M \rightarrow \infty$, $J_M(u) \rightarrow J(u)$ para casi todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Ahora presentamos un resultado de convergencia más fuerte.

Teorema 3.3.1. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), sea $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ una muestra aleatoria independientemente \mathbb{P} -distribuida, entonces $J_M \xrightarrow{epi} J$ cuando $M \rightarrow \infty$, casi seguramente.*

Demostración. Del Lema 3.2.4, la función F es Carathéodory, lo cual implica que F es $B \otimes \mathcal{A}$ -medible y continua con respecto a u para cada $\omega \in \Omega$. Por lo tanto, podemos concluir que F es una función aleatoria semicontinua inferiormente. Además tenemos que

$$F(u, \omega) = \max_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega) \geq f(y_u(0, \omega), \omega) = f(x + \phi(\omega), \omega). \quad (3.30)$$

Luego, como en la prueba del Corolario 3.2.6 podemos ver que la aplicación $\omega \mapsto f(x + \phi(\omega), \omega)$ pertenece a $L^1(\Omega)$. Por lo tanto, del Teorema 1.1.5 podemos concluir que $J_M \xrightarrow{epi} J$ casi seguramente. \square

Bajo las mismas hipótesis, tenemos el siguiente resultado sobre la convergencia de minimizadores y de los valores de (P_M) al de (P) .

Teorema 3.3.2. *Sea $\{u_M\}_{M \in \mathbb{N}}$ una sucesión de controles óptimos para (P_M) y sea \bar{u} un punto de acumulación de dicha sucesión, i.e. $\bar{u} = \lim_{M \in K} u_M$ donde K es un subconjunto infinito de \mathbb{N} . Entonces, \bar{u} es un minimizador de (P) y además se tiene $\lim_{M \in K} J_M(u_M) = J(\bar{u})$.*

Demostración. Como las funciones J_M y J son convexas, todos los minimizadores locales son globales. Podemos entonces aplicar el Teorema 1.1.6 pues J_M es continua para todo $M \in \mathbb{N}$ y del Teorema 3.3.1, $J_M \xrightarrow{epi} J$ casi seguramente en \mathcal{U}_{ad} . \square

Con el objetivo de estudiar la relación entre (P_M^h) y (P) , comenzamos comparando los estados continuo y discreto asociados a un control dado $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$. Notemos que $\mathcal{U}_{ad}^h \subset \mathcal{U}_{ad}$. En lo que sigue, asumimos que $M \in \mathbb{N}$ y la muestra aleatoria $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ están fijos.

Lema 3.3.3. *Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control dado. Sea y_u la única solución de (3.1) y (y_u^n) la única solución de (3.29), ambas asociadas a u . Entonces, para todo ω_i , $i = 1, \dots, M$ existe $C(\omega_i)$ tal que*

$$\max_{n=0, \dots, N} |y_u(t_n, \omega_i) - y_u^n(\omega_i)| \leq C(\omega_i)h. \quad (3.31)$$

Demostración. Primero, para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$ y para todo $t_n \leq t < t_{n+1}$ tenemos

$$|y_u(t, \omega) - y_u(t_n, \omega)| \leq \int_{t_n}^t |A(s, \omega)y_u(s, \omega)|ds + \int_{t_n}^t |B(s, \omega)u(s)|ds + \int_{t_n}^t |C(s, \omega)|ds. \quad (3.32)$$

Denotamos M_U a una cota del conjunto compacto U_{ad} . Luego si definimos $L_y := M_A M_y + M_B M_U + M_C$, donde M_y está dado por el Lema 3.2.1, obtenemos

$$\sup_{t_n \leq t < t_{n+1}} |y_u(t, \omega) - y_u(t_n, \omega)| \leq L_y h. \quad (3.33)$$

Ahora, en lo que sigue, para simplificar la notación omitimos el argumento ω_i . Para todo $n = 0, \dots, N - 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |y_u(t_{n+1}) - y_u^{n+1}| &\leq |y_u(t_n) - y_u^n| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |A(s)y_u(s) - A(t_n)y_u^n|ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |B(s)u^n - B(t_n)u^n|ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |C(s) - C(t_n)|ds \\ &\leq |y_u(t_n) - y_u^n| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |[A(s) - A(t_n)]y_u(s)|ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |A(t_n)[y_u(s) - y_u^n]|ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |[B(s) - B(t_n)]u^n|ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |C(s) - C(t_n)|ds \\ &\leq |y_u(t_n) - y_u^n| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_A h |y_u(s)| + M_A |y_u(s) - y_u^n|ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_B h |u^n|ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_C h ds \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por otro lado, para todo $t_n \leq t < t_{n+1}$

$$|y_u(t) - y_u^n| \leq |y_u(t) - y_u(t_n)| + |y_u(t_n) - y_u^n| \leq L_y h + |y_u(t_n) - y_u^n|. \quad (3.35)$$

Podemos deducir,

$$\begin{aligned}
|y_u(t_{n+1}) - y_u^{n+1}| &\leq |y_u(t_n) - y_u^n| + h^2 M_y L_A + h M_A [L_y h + |y_u(t_n) - y_u^n|] \\
&\quad + h^2 L_B M_U + h^2 L_C \\
&= (1 + h M_A) |y_u(t_n) - y_u^n| + h^2 C_2 \\
&\leq (1 + h M_A)^n |y_u(t_0) - y_u^0| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h M_A)^k h^2 C_2 \\
&\leq N e^{h M_A N} h^2 C_2 \\
&= h T e^{T M_A} C_2,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

donde $C_2(\omega_i) := M_y L_A(\omega_i) + M_A L_y + L_B(\omega_i) M_U + L_C(\omega_i)$. Por lo tanto, podemos concluir el resultado definiendo $C(\omega_i) := T e^{T M_A} C_2(\omega_i)$. \square

Ahora probaremos uno de los principales resultados de esta sección, mostraremos que el valor del problema discreto en tiempo (P_M^h) converge al valor del problema continuo en tiempo (P_M) .

Teorema 3.3.4. *Sea \bar{u}^h un control óptimo para (P_M^h) y \bar{u} una solución óptima para (P_M) , entonces*

$$\lim_{h \downarrow 0} J_M^h(\bar{u}^h) = J_M(\bar{u}). \tag{3.37}$$

Demostración. Sea $N_h \in \mathbb{N}$ tal que $h = \frac{T}{N_h}$. Como $\mathcal{U}_{ad}^h \subset \mathcal{U}_{ad}$, cualquier $u^h \in \mathcal{U}_{ad}^h$ es un control admisible para (P_M) , luego

$$\begin{aligned}
|J_M(u^h) - J_M^h(u^h)| &\leq \sum_{i=1}^M \left| \max_{t \in [0, T]} f(y_{u^h}(t, \omega_i), \omega_i) - \max_{n=0, \dots, N_h} f(y_{u^h}^n(\omega_i), \omega_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^M \left| \max_{t \in [0, T]} f(y_{u^h}(t, \omega_i), \omega_i) - \max_{n=0, \dots, N_h} f(y_{u^h}(t_n, \omega_i), \omega_i) \right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left| \max_{n=0, \dots, N_h} f(y_{u^h}(t_n, \omega_i), \omega_i) - \max_{n=0, \dots, N_h} f(y_{u^h}^n(\omega_i), \omega_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^M L_f(\omega_i) L_y h + \sum_{i=1}^M L_f(\omega_i) C(\omega_i) h.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Donde la última desigualdad vale gracias a (3.31), (3.33) y la Nota 3.2.2. Como los puntos $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ están fijos, podemos concluir que existe $\bar{C}_M > 0$, tal que

$$|J_M(u^h) - J_M^h(u^h)| \leq \bar{C}_M h. \tag{3.39}$$

Ahora, de la optimalidad de \bar{u} tenemos,

$$J_M(\bar{u}) \leq J_M(\bar{u}^h) \leq J_M(\bar{u}^h) - J_M^h(\bar{u}^h) + J_M^h(\bar{u}^h) \leq J_M^h(\bar{u}^h) + \bar{C}_M h. \quad (3.40)$$

Por otro lado, para todo $\varepsilon > 0$, de la densidad de las funciones uniformemente continuas en $L^2[0, T]$, las cuales pueden ser aproximadas por funciones seccionalmente continuas, deducimos que existe N_ε tal que para todo $N_h > N_\varepsilon$ existe $\hat{u}^h \in \mathcal{U}_{ad}^h$ tal que

$$\|\bar{u} - \hat{u}^h\|_{L^2} < \varepsilon. \quad (3.41)$$

Como $F(\cdot, \omega_i)$ es Lipschitz continua para todo $i = 1, \dots, M$, entonces J_M también resulta Lipschitz continua y denotamos con L_{J_M} a la constante de Lipschitz asociada. Como \bar{u}^h es óptimo para (P_M^h) , de (3.39) y (3.41) obtenemos

$$\begin{aligned} J_M^h(\bar{u}^h) &\leq J_M^h(\hat{u}^h) \\ &\leq J_M^h(\hat{u}^h) - J_M(\hat{u}^h) + J_M(\hat{u}^h) \\ &\leq \bar{C}_M h + J_M(\hat{u}^h) - J_M(\bar{u}) + J_M(\bar{u}) \\ &\leq \bar{C}_M h + L_{J_M} \varepsilon + J_M(\bar{u}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Luego, de (3.40) y (3.42), como ε es arbitrario podemos concluir que

$$\lim_{h \downarrow 0} J_M^h(\bar{u}^h) = J_M(\bar{u}). \quad (3.43)$$

□

Teorema 3.3.5. *Para cada $M \in \mathbb{N}$ existe $h_M > 0$ con $h_M \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$ tal que si $\bar{u}_M^{h_M} \in \mathcal{U}_{ad}^{h_M}$ es un control óptimo para $(P_M^{h_M})$, entonces todo punto de acumulación de la sucesión $\{\bar{u}_M^{h_M}\}$ es un control óptimo para (P) .*

Demostración. Del teorema anterior sabemos que para cada $M \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{h \downarrow 0} J_M^h(\bar{u}_M^h) = J_M(\bar{u}_M), \quad (3.44)$$

donde \bar{u}_M^h es una solución óptima de (P_M^h) y \bar{u}_M es un control óptimo para (P_M) . Luego, podemos elegir $h_M > 0$ tal que

$$J_M^{h_M}(\bar{u}_M^{h_M}) \leq J_M(\bar{u}_M) + \frac{1}{M}. \quad (3.45)$$

Es claro también que podemos elegir $h_M \rightarrow 0$ de manera que $\bar{C}_M h_M \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

Ahora, sea \bar{u} un punto de acumulación de $\{\bar{u}_M^{h_M}\}$, i.e. existe una subsucesión de $\{\bar{u}_M^{h_M}\}$, que seguiremos denotando $\{\bar{u}_M^{h_M}\}$ tal que $\bar{u}_M^{h_M} \rightarrow \bar{u}$. Entonces, de la epi-convergencia de J_M a J dada por el Teorema 3.3.1 y de (3.39) obtenemos,

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}) &\leq \liminf J_M(\bar{u}_M^{h_M}) \\
&\leq \liminf \{J_M(\bar{u}_M^{h_M}) - J_M^h(\bar{u}_M^{h_M}) + J_M^h(\bar{u}_M^{h_M})\} \\
&\leq \liminf \{\bar{C}_M h_M + J_M(\bar{u}_M) + \frac{1}{M}\} \\
&= \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

donde la última desigualdad vale gracias al Teorema 3.3.2. Podemos concluir que \bar{u} es un control óptimo para (P) . \square

3.4. Condiciones de Optimalidad

En esta sección, siguiendo las ideas del capítulo anterior, presentamos condiciones de optimalidad para los tres problemas que describimos anteriormente. En particular, una de ellas nos será de utilidad para diseñar el algoritmo que presentaremos en la próxima sección.

3.4.1. Problema de control óptimo minimax con incertezas

Comenzamos estudiando la diferenciabilidad direccional del funcional J . Recordamos que con $T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ denotamos al cono tangente a \mathcal{U}_{ad} en u .

Proposición 3.4.1. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), el funcional J es direccionalmente diferenciable para cualquier $u \in \mathcal{U}$ y la derivada direccional en una dirección $v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ está dada por*

$$J'(u; v) = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in C_{u,\omega}} \langle \nabla f(y_u(t, \omega), \omega), z_v(t, \omega) \rangle \right], \tag{3.47}$$

donde $C_{u,\omega}$ es el conjunto de tiempo críticos

$$C_{u,\omega} = \operatorname{argmax}_{t \in [0, T]} f(y_u(t, \omega), \omega), \tag{3.48}$$

y z_v es la única solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t, \omega) = A(t, \omega)z(t, \omega) + B(t, \omega)v(t), & t \in [0, T] \\ z(0, \omega) = 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

para todo $\omega \in \Omega$.

Demostración. Fijamos $\omega \in \Omega$, de la Proposición 2.2.4 del capítulo anterior, sabemos que $F(\cdot, \omega)$ es direccionalmente diferenciable en cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$ y la derivada direccional en una dirección $v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ está dada por

$$F'(u, \omega; v) = \sup_{t \in C_{u, \omega}} \langle \nabla f(y_u(t, \omega), \omega), z_v(t, \omega) \rangle, \quad (3.50)$$

donde $C_{u, \omega}$ está definido en (3.48) y $z_v(\cdot, \omega)$ resuelve (3.49).

Para todo $h > 0$, del Lema 3.2.4 tenemos

$$\left| \frac{F(u + hv, \omega) - F(u, \omega)}{h} \right| \leq \frac{L_F(\omega)h\|v\|_{L^2}}{h}. \quad (3.51)$$

Como $L_F \in L^1(\Omega)$ podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada y concluir que

$$J'(u; v) = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in C_{u, \omega}} \langle \nabla f(y_u(t, \omega), \omega), z_v(t, \omega) \rangle \right]. \quad (3.52)$$

□

Utilizando los mismos argumentos que presentamos en la Sección 2.2.3, podemos ver que para cada $\omega \in \Omega$ la solución de (3.49) está dada por

$$z_v(t, \omega) = \int_0^t S_{ts}(\omega)B(s, \omega)v(s)ds, \quad (3.53)$$

donde la matriz S_{ts} es la solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S_{ts}(\omega) = A(t, \omega)S_{ts}(\omega), & t \in [s, T], \\ S_{ss}(\omega) = I. \end{cases} \quad (3.54)$$

Luego, la derivada direccional se puede escribir como

$$J'(u; v) = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in C_{u, \omega}} \left\langle \nabla f(y_u(t, \omega)), \int_0^t S_{ts}(\omega)B(s, \omega)v(s)ds \right\rangle \right]. \quad (3.55)$$

Definiendo para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$, $t \in [0, T]$ y $\omega \in \Omega$, el elemento de $L^2[0, T]$,

$$q_{u,t}(s, \omega) := I_t(s)B^\top(s, \omega)S_{ts}(\omega)^\top \nabla f(y_u(t, \omega), \omega), \quad \forall s \in [0, T], \quad (3.56)$$

donde $I_t(s)$ es igual a 1 si $s \leq t$ y 0 en otro caso, podemos reescribir (3.55) como

$$J'(u; v) = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in C_{u, \omega}} \langle q_{u,t}(\omega), v \rangle \right]. \quad (3.57)$$

Por lo tanto, tenemos una condición de optimalidad de primer orden, basada en el hecho de que si u es un optimizador entonces toda derivada direccional es no negativa para toda dirección en $T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$, y como la función es convexa, entonces también es una condición de optimalidad suficiente (ver Teorema 1.1.1). El siguiente resultado es el análogo al Teorema 2.2.5.

Teorema 3.4.2. *Supongamos que valen (H1) y (H2). Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}$, entonces u es óptimo si y sólo si*

$$\min_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in C_{u, \omega}} \langle q_{u,t}(\omega), v \rangle \right] = 0. \quad (3.58)$$

De manera análoga a lo visto en el Teorema 2.2.6, para este caso también tenemos condiciones de optimalidad necesarias, que no involucran el cálculo del conjunto de tiempos críticos.

Teorema 3.4.3. *La condición (3.58) implica*

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}(\omega), v \rangle \right] = 0, \quad (3.59)$$

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t, \omega), \omega) - F(u, \omega) + \langle q_{u,t}(\omega), v \rangle\} \right] = 0, \quad (3.60)$$

y para todo $\rho > 0$,

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t, \omega), \omega) - F(u, \omega) + \langle q_{u,t}(\omega), v \rangle\} \right] + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 = 0. \quad (3.61)$$

Utilizando los mismos argumentos que los expuestos en la Sección 2.2.3, se puede ver que minimizar sobre las direcciones en $T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$ equivale a minimizar sobre el conjunto $\mathcal{U}_{ad} - u$. Este hecho será importante a la hora de diseñar el algoritmo para resolver el problema discreto.

3.4.2. Aproximaciones por promedios muestrales (SAA)

A lo largo de esta sección asumimos que están fijos $M \in \mathbb{N}$ y la muestra $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ independientemente \mathbb{P} -distribuida. Siguiendo las mismas líneas que en la sección anterior, presentamos una condición de optimalidad para el problema (P_M) .

De la linealidad de la derivada direccional, argumentando como en el Teorema 2.2.5, el siguiente resultado sigue de (3.50) en la prueba de la Proposición 3.4.1.

Teorema 3.4.4. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), $u \in \mathcal{U}_{ad}$ es un control óptimo para (P_M) si y sólo si*

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}}(u)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sup_{t \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle = 0. \quad (3.62)$$

Tenemos también condiciones de optimalidad necesarias, que no involucran al conjunto de tiempos críticos, análogas a las presentadas en el Teorema 3.4.3.

Teorema 3.4.5. *Si $u \in \mathcal{U}$ es un control óptimo para (P_M) entonces,*

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle = 0, \quad (3.63)$$

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t, \omega_i), \omega_i) - F(u, \omega_i) + \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle\} = 0, \quad (3.64)$$

y para todo $\rho > 0$,

$$\inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sup_{t \in [0, T]} \{f(y_u(t, \omega_i), \omega_i) - F(u, \omega_i) + \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 = 0. \quad (3.65)$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}$ un control óptimo, del teorema previo y como $v = 0$ es una dirección admisible, se tiene

$$0 = \inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sup_{t \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle \leq \inf_{v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(u)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sup_{t \in [0, T]} \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle \leq 0. \quad (3.66)$$

Luego, la condición (3.62) implica la condición (3.63). Ahora, de la definición de C_{u,ω_i} obtenemos para todo $i = 1, \dots, M$,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in C_{u,\omega_i}} \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle &\leq \sup_{t \in [0,T]} \{f(y_u(t, \omega_i), \omega_i) - F(u, \omega_i) + \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle\} \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} \langle q_{u,t}(\omega_i), v \rangle. \end{aligned} \quad (3.67)$$

De (3.62) y (3.63), obtenemos (3.64). Análogamente se obtiene (3.65). \square

3.4.3. Aproximación discreta en tiempo

Por una cuestión de completitud, adaptamos y presentamos algunas de las definiciones y resultados presentados en la Sección 2.3.2 del capítulo anterior.

Proposición 3.4.6. *Dado un control discreto $u = (u^n)_{n=0}^{N-1}$, el funcional J_M^h es direccionalmente diferenciable en u y para cada $v \in \mathcal{U}^h$ tenemos*

$$J_M^h{}'(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u,\omega_i}} \langle \nabla f(y_u^n(\omega_i), \omega_i), z_v^n(\omega_i) \rangle \quad (3.68)$$

donde $C_{u,\omega_i} = \operatorname{argmax} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) : 0 \leq n \leq N\}$ es el conjunto de tiempos críticos y z_v es solución del siguiente sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} z^{n+1}(\omega_i) = z^n(\omega_i) + h[A(t_n, \omega_i)z^n(\omega_i) + B(t_n, \omega_i)v^n] & n = 0, \dots, N-1, \\ z^0(\omega_i) = 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

para $i = 1, \dots, M$.

La solución de (3.69) puede ser escrita como,

$$z_v^n(\omega_i) = \sum_{j=0}^{n-1} S_{n-1,j}(\omega_i)v^j, \quad (3.70)$$

donde S satisface

$$\begin{cases} S_{n+1,j}(\omega_i) = [I + hA(t_{n+1}, \omega_i)]S_{n,j}, & 0 \leq j \leq n \\ S_{jj}(\omega_i) = hB(t_j, \omega_i), & \forall j \geq 0, \quad i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (3.71)$$

Análogamente al caso en tiempo continuo, si definimos para todo $i = 1, \dots, M$

$$q_{u,n}^j(\omega_i) := \begin{cases} 0 & \forall j \geq n, \\ S_{n-1,j}^\top(\omega_i) \nabla f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) & \forall j < n, \end{cases} \quad (3.72)$$

podemos concluir

$$J_M^h(u; v) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \sum_{j=0}^{n-1} \langle q_{u,n}^j(\omega_i), v^j \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle,$$

donde $q_{u,n}(\omega_i)$ es la matriz de columnas $q_{u,n}^j(\omega_i)$, v está identificada con la matriz de columnas v^j y el último producto escalar está definido como $\langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle := \text{tr}(q_{u,n}^\top(\omega_i)v)$.

De lo anterior, se deduce fácilmente la siguiente condición de optimalidad de primer orden para el problema discreto.

Teorema 3.4.7. *Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ y definamos $\mathcal{U}_u^h := \mathcal{U}_{ad}^h - u$. Entonces, u es un control óptimo para (P_M^h) si y sólo si*

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle = 0. \quad (3.73)$$

Notemos que tomar el mínimo en (3.73) sobre el conjunto \mathcal{U}_u^h es equivalente a tomar el mínimo sobre el conjunto $T_{\mathcal{U}_{ad}^h}(u)$. En efecto, el conjunto de controles \mathcal{U}_{ad}^h es convexo y como la muestra $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ está fija, el funcional $q_{u,n}(\omega_i)$ es acotado en $L^2[0, T]$.

Con el objetivo de desarrollar un método numérico que resuelva el problema discreto, proponemos una condición de optimalidad análoga a (3.65), la cual era necesaria en el caso en tiempo continuo. Sin embargo, en el caso discreto en tiempo, la condición (3.74) resulta necesaria y suficiente.

Teorema 3.4.8. *La condición (3.73) es equivalente a*

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 = 0, \quad (3.74)$$

para todo $\rho > 0$ donde $F^h : \mathcal{U}^h \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$F^h(u, \omega) := \max_{n=0, \dots, N} f(y_u^n(\omega), \omega). \quad (3.75)$$

Demostración. Al igual que en el Teorema 3.4.5 podemos ver que (3.73) implica (3.74). Ahora, asumimos que vale (3.74), y supongamos que (3.73) no vale. Entonces, existe $v \in \mathcal{U}_u^h$ tal que

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle < 0. \quad (3.76)$$

Sea $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ lo suficientemente chico de manera que

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u, n}(\omega_i), v \rangle + \frac{\rho}{2} \bar{\lambda} \|v\|^2 < 0. \quad (3.77)$$

Luego, para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ tenemos

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u, n}(\omega_i), \lambda v \rangle + \frac{\rho}{2} \|\lambda v\|^2 < 0. \quad (3.78)$$

Ahora, para todo $i = 1, \dots, M$ definimos las siguientes funciones $a_i, b_i : \mathcal{U}_u^h \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} a_i(v) &:= \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u, n}(\omega_i), v \rangle + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 \\ b_i(v) &:= \max_{n \notin C_{u, \omega_i}} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u, n}(\omega_i), v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

El hecho de que el conjunto de tiempos sea finito, junto con las hipótesis realizadas, implican que las funciones a_i y b_i son continuas para todo $i = 1, \dots, M$. En particular tenemos,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} a_i(\lambda v) = 0, \quad (3.80)$$

y de la definición del conjunto de tiempos críticos,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} b_i(\lambda v) = \max_{n \notin C_{u, \omega_i}} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i)\} = -\delta_i < 0. \quad (3.81)$$

Definimos $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_M\} > 0$. Entonces existe λ^b tal que para todo $0 < \lambda \leq \lambda^b$ se tiene

$$b_i(\lambda v) < -\frac{\delta}{2}, \quad (3.82)$$

para todo $i = 1, \dots, M$. De (3.80), existe λ^a tal que para todo $0 < \lambda \leq \lambda^a$ se tiene

$$-\frac{\delta}{2} < a_i(\lambda v) < \frac{\delta}{2}, \quad (3.83)$$

para todo $i = 1, \dots, M$. Por lo tanto, para $0 < \lambda < \min\{\lambda^a, \lambda^b, \bar{\lambda}\}$ se obtiene

$$b_i(\lambda v) < a_i(\lambda v), \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad (3.84)$$

y entonces

$$\max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u, n}(\omega_i), \lambda v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\lambda v\|^2 = a_i(\lambda v), \quad (3.85)$$

para todo $i = 1, \dots, M$. De la definición de a_i y de (3.78) podemos deducir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), \lambda v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\lambda v\|^2 \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i(\lambda v) < 0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

lo cual contradice (3.74). Concluimos entonces que (3.73) es cierta. \square

Nota 3.4.9. *Del teorema anterior es fácil ver que la condición (3.73) es también equivalente a*

$$\min_{v \in \mathcal{U}_u^h} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle\} = 0. \quad (3.87)$$

De hecho, para todo $v \in \mathcal{U}_u^h$ y ω_i , $i = 1, \dots, M$ tenemos

$$\begin{aligned} \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle\} \leq \\ \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\lambda v\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Luego, la condición (3.87) implica la condición (3.74) la cual es equivalente a (3.73).

Finalmente, como en el Teorema 3.4.5 se puede probar que (3.73) implica (3.87).

3.5. Algoritmo

En esta sección, basados en el algoritmo presentado en el Capítulo 2, presentamos un método numérico para resolver el problema en tiempo discreto (P_M^h). El algoritmo se desprende de la condición de optimalidad (3.74). Definimos $\theta : U_{ad}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $\eta : U_{ad}^N \rightarrow \mathbb{R}^{m \times N}$ (donde identificamos $\mathcal{U}_{ad}^h \equiv U_{ad}^N$ y $U_u^h \equiv U_{ad}^N - u$) como

$$\theta(u) := \min_{v \in U_{ad}^N} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2 \quad (3.89)$$

$$\eta(u) := \operatorname{argmin}_{v \in U_{ad}^N} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|v\|^2. \quad (3.90)$$

Un control admisible u que satisface (3.74) es óptimo. Si esto no ocurre, el minimizador en (3.74) da una dirección de descenso del funcional J_M^h , en efecto

$$\begin{aligned} J_M^h{}'(u; \eta(u)) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n \in C_{u, \omega_i}} \langle q_{u,n}(\omega_i), \eta(u) \rangle \\ &\leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max_{n=0, \dots, N} \{f(y_u^n(\omega_i)) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), \eta(u) \rangle\} + \frac{\rho}{2} \|\eta(u)\|^2 \\ &= \theta(u) < 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Al igual que el Algoritmo 2.1, presentado en el Capítulo 2, el Algoritmo 3.1 calcula en cada paso una dirección de descenso resolviendo (3.74) y realiza un paso de Armijo. A su vez, la condición (3.74) presenta las mismas ventajas que la condición utilizada en el Algoritmo 2.1. La primera es no involucrar al conjunto de tiempos críticos y la segunda es que gracias al término cuadrático en (3.74), el operador a ser minimizado resulta ser una función fuertemente convexa.

Algoritmo 3.1.

Paso 1: Elegir los parámetros $\alpha, \beta \in (0, 1)$ y $\rho > 0$. Definir $k := 1$ y elegir el control inicial $u_1 \in U_{ad}^N$.

Paso 2: Calcular:

$$y_{u_k}^n(\omega_i), f(y_{u_k}^n(\omega_i), \omega_i), \quad n = 0, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M$$

$$F^h(u_k, \omega_i) = \max_{n=0, \dots, N} f(y_{u_k}^n(\omega_i), \omega_i), \quad i = 1, \dots, M.$$

Paso 3: Calcular $\theta(u_k)$ y $\eta(u_k)$ dados por (3.89) y (3.90), respectivamente.

Step 4: Si $\theta(u_k) = 0$, **Parar** (u_k satisface la condición de optimalidad). Si no, encontrar el máximo $\lambda_k = \beta^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$J_M^h(u_k + \lambda_k \eta(u_k)) < J_M^h(u_k) + \alpha \lambda_k \theta(u_k).$$

Paso 5: Definir $u_{k+1} := u_k + \lambda_k \eta(u_k)$, $k := k + 1$ y volver al **Paso 2**.

En la práctica, los problemas (3.89) y (3.90) se resuelven introduciendo variables auxiliares $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, M$, y considerando el programa cuadrático equivalente,

$$\begin{aligned} & \min \frac{\rho}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & \xi_i \geq f(y_u^n(\omega_i), \omega_i) - F^h(u, \omega_i) + \langle q_{u,n}(\omega_i), v \rangle, \\ & v \in U_u^N, \xi_i \in \mathbb{R}, \quad n = 0, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M \end{aligned} \tag{3.92}$$

el cual se puede resolver de manera eficiente con algoritmos estándar.

Usando los mismos argumentos que en el Teorema 2.5.1 se puede probar el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 3.5.1. *Sea $\{u_k\}$ la sucesión generada por el Algoritmo 3.1. Entonces, o bien $\{u_k\}$ es finita y termina en un minimizador de (P_M^h) , o bien es infinita y todo punto de acumulación de $\{u_k\}$ es óptimo.*

Notemos que el Algoritmo 3.1 no es un algoritmo implementable ya que supone que todos los cálculos se realizan de manera exacta. De manera análoga a lo expuesto en la Sección 2.5, se puede plantear un algoritmo implementable y obtener resultados como los presentados en el Teorema 2.5.3.

3.6. Resultados numéricos

En esta sección mostramos algunas implementaciones del Algoritmo 3.1 en dos simples ejemplos. El primero es un ejemplo bastante artificial, en el sentido en que es sencillo calcular las soluciones óptimas de manera analítica, pero sirve para remarcar la importancia del tamaño de la muestra. El segundo ejemplo consiste en controlar la amplitud de un oscilador armónico en un intervalo de tiempo dado.

El Algoritmo 3.1 fue programado en Scilab 5.5.2 (ver www.scilab.org). El test de parada que utilizamos fue $|\theta(u_k)| < 10^{-6}$ y los programas cuadráticos (2.73) fueron resueltos con la herramienta `quapro` de Scilab. Los parámetros de Armijo que tomamos fueron $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,9$. Los ensayos fueron realizados en un procesador de 3.40 GHz, 8GB RAM, Intel Core i7. Aunque los resultados preliminares que expondremos son alentadores, no dejan de ser ejemplos académicos que no son de gran tamaño. Si bien nuestro enfoque sólo requiere una discretización en tiempo, para obtener aproximaciones aceptables necesitamos que el tamaño de la muestra sea grande y el paso de tiempo pequeño, por lo tanto también tendremos que lidiar con problemas de gran escala, más aún si las dimensiones de los problema son grandes. Este inconveniente ya fue mencionado en la literatura del tema (ver [79, 53, 74]) y es necesario un análisis más profundo para atacar este problema. Sin embargo, esto está fuera del alcance de este trabajo.

3.6.1. Un ejemplo simple con solución analítica

Consideramos el problema (P) , donde el parámetro estocástico está distribuido uniformemente en $\Omega = [0, 1]$. La trayectoria evoluciona en \mathbb{R} verificando

$$\begin{cases} \dot{y}(t, \omega) = B(\omega)u(t), & t \in (0, 1) \\ y(0, \omega) = 0, \end{cases}$$

donde $B(\omega) = 1$ si $\omega \in [0, a]$ y $B(\omega) = -1$ si $\omega \in (a, 1]$, para algún $a \in (0, 1)$ fijo. El conjunto imagen de los controles es $U_{ad} = [0, 1]$ y la función de costo que consideramos es $f(y, \omega) = y$.

Luego, como $u \geq 0$, tenemos

$$F(u, \omega) = \begin{cases} \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t u(s) ds = \int_0^1 u(s) ds, & \text{if } \omega \in [0, a], \\ - \min_{t \in [0, 1]} \int_0^t u(s) ds = 0, & \text{if } \omega \in (a, 1]. \end{cases}$$

Entonces, $J(u) = a \int_0^1 u(s) ds$ y alcanza su mínimo únicamente en $u \equiv 0$. Sea $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M\}$ una muestra tomada del intervalo $[0, 1]$. Si $\omega_i \in [0, a]$ para al menos algún $i \in \{1, \dots, M\}$, el problema (P_M) tiene un único minimizador $u \equiv 0$. Sino, si $\omega_i \in (a, 1]$ para todo i , entonces $J \equiv 0$ y cualquier control en U_{ad} es óptimo. Por lo tanto, si a es pequeño, se puede esperar que necesitemos tomar un tamaño de muestra M grande para obtener aproximaciones significativas, en el sentido de que el funcional J evaluado en un control óptimo de (P_M) esté cerca del valor óptimo de (P) . Más precisamente, la probabilidad de que $\omega_i \in [0, a]$ para al menos un $i \in \{1, \dots, M\}$ es $1 - (1 - a)^M$, luego para obtener una aproximación significativa (P_M) con probabilidad mayor que $p \in (0, 1)$, es necesario tomar M que verifique $\frac{\ln(1-p)}{\ln(1-a)} < M$. Este comportamiento queda ilustrado en el Cuadro 3.1, donde mostramos los resultados obtenidos cuando el valor de a decrece y el de M aumenta.

Para todos los ensayos, el tamaño del paso de tiempo fue de $h = 0,05$ y el control inicial fue $u_1 = (1, \dots, 1) \in U^{20}$ para el cual $|u_1| \approx 4,47$. Mostramos el número de elementos de la muestra ω_i pertenecientes a $[0, a]$, el valor de la función objetivo obtenido y la norma del control óptimo, así como también el número de iteraciones requeridas. Notemos que, cuando ningún elemento de la muestra pertenece a $[0, a]$, sólo se requiere una iteración porque cualquier control es óptimo (en particular el control inicial u_1). De lo contrario,

el algoritmo obtiene el control óptimo $u \equiv 0$ y tiende a ser más eficiente cuando más elementos de la muestra pertenecen a $[0, a]$. Para el problema más grande con sólo un elemento de la muestra en $[0, a]$, fueron necesarias 11 iteraciones para lograr la tolerancia, pero sin embargo tardó menos de 10 segundos.

Cuadro 3.1: *Resultados numéricos para diferentes valores de M . Si ningún ω_i pertenece a $[0, a]$, el control inicial es óptimo, en caso contrario, se obtiene el control óptimo $u \equiv 0$.*

M	$a=.1$				$a=.05$			
	$\omega_i \leq a$	J	$ u $	it.	$\omega_i \leq a$	J	$ u $	it.
10	0	0.00	4.47	1	0	0.00	4.47	1
15	3	0.00	0.00	2	0	0.00	4.47	1
20	1	0.00	0.00	5	3	0.00	0.00	4
30	4	0.00	0.00	3	5	0.00	0.00	3
35	3	0.00	0.00	4	1	0.00	0.00	8
40	8	0.00	0.00	2	2	0.00	0.00	5
45	6	0.00	0.00	3	4	0.00	0.00	4
50	3	0.00	0.00	5	4	0.00	0.00	4

M	$a=.025$				$a=.0125$			
	$\omega_i \leq a$	J	$ u $	it.	$\omega_i \leq a$	J	$ u $	it.
5	0	0.00	4.47	1	0	0.00	4.47	1
10	0	0.00	4.47	1	0	0.00	4.47	1
15	0	0.00	4.47	1	0	0.00	4.47	1
20	3	0.00	0.00	3	1	0.00	0.00	5
25	0	0.00	4.47	1	1	0.00	0.00	6
30	0	0.00	4.47	1	0	0.00	4.47	1
35	0	0.00	4.47	1	1	0.00	0.00	8
40	1	0.00	0.00	9	0	0.00	4.47	1
45	1	0.00	0.00	10	2	0.00	0.00	6
50	2	0.00	0.00	6	1	0.00	0.00	11

3.6.2. Oscilador armónico

Consideramos un oscilador armónico con frecuencia natural ω distribuida uniformemente en $[0, 1]$, empezando en un punto con velocidad no nula. El objetivo es diseñar un control que minimice la amplitud en el intervalo de tiempo $[0, 2]$. Este problema es una variación del problema estudiado en [74, Sección 7.1], en el cual el sistema empieza en punto extremo de velocidad nula y el objetivo es estabilizar el oscilador en el tiempo final.

En particular, el sistema dinámico que consideramos es

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A_\omega y(t) + u(t), & t \in (0, 2) \\ y(0) = (0, 1)^\top. \end{cases}$$

donde $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^\top : [0, 2] \rightarrow [-3, 3]^2$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, y

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso el funcional de costo que queremos minimizar está definido como

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\max_{t \in [0, 2]} y_1^2(t) \right].$$

Analizaremos el comportamiento del sistema en tres casos diferentes: el sistema no controlado (i.e. $u \equiv 0$), el sistema con un control diseñado para un parámetro específico $\bar{\omega}$ y el sistema con el control obtenido con el enfoque SAA, (i.e. con el Algoritmo 3.1). Más específicamente, tomando un tamaño de muestra M , tomamos una muestra $\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$ la cual define un problema (P_M) y calculamos para pasos de tiempo h , los valores de la función objetivo $J_M^h(u)$ para los controles $u \equiv 0$, $u = \bar{u}$ y $u = u^*$, donde \bar{u} es solución de (P_1) cuando tomamos como muestra el parámetro fijo $\bar{\omega}$ y u^* es solución de (P_M^h) .

Comenzamos estudiando el caso para un parámetro fijo, i.e. el problema (P_1) definido para un parámetro fijo $\hat{\omega} \in [0, 1]$. Es claro que el valor óptimo del problema es $J(\hat{u}) = 0$ el cual es alcanzado para el control óptimo $\hat{u} \equiv (\hat{\omega}, 0)$. Ahora, tomando este control en el problema (P) , obtenemos la siguiente trayectoria, para cada $\omega \neq 0$

$$\begin{cases} y_{\hat{\omega},1}(t, \omega) &= \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega} - 1\right) \sin(\omega t), \\ y_{\hat{\omega},2}(t, \omega) &= \left(1 - \frac{\hat{\omega}}{\omega}\right) \cos(\omega t) + \frac{\hat{\omega}}{\omega}. \end{cases}$$

Luego,

$$\sup_{t \in [0,2]} (y_{\hat{\omega},1}(t, \omega))^2 = \begin{cases} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega} - 1\right)^2 \sin^2(2\omega), & \omega \in (0, \pi/4), \\ \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega} - 1\right)^2, & \omega \in [\pi/4, 1], \end{cases}$$

y por lo tanto

$$J(\hat{\omega}) = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega} - 1\right)^2 \sin^2(2\omega) d\omega + \int_{\pi/4}^1 \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega} - 1\right)^2 d\omega,$$

el cual alcanza su mínimo en $\hat{\omega} = \bar{\omega}$, donde

$$\bar{\omega} = \frac{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(2\omega)}{\omega} d\omega - \ln(\pi/4)}{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(2\omega)}{\omega^2} d\omega - 1 + 4/\pi} \approx ,394139.$$

Concluimos que, $\bar{u} \equiv (\bar{\omega}, 0)$ es el “mejor” control que se puede obtener al considerar una muestra de un sólo elemento y éste será el control que utilizaremos en los ensayos numéricos.

En el Cuadro 3.2, mostramos los resultados obtenidos para muestras de tamaños $M \in \{10, 20, 40, 80\}$. En cada caso, fijando el problema (P_M) , consideramos las aproximaciones (P_M^h) para $h = 2/N$ y $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$. Para cada M , cuando $N = 10$ el algoritmo fue inicializado en el control $u = \bar{u}$ y para las aproximaciones sucesivas, el control inicial que consideramos es el que resulta de interpolar linealmente la solución del caso anterior.

Para cada problema (P_M^h), reportamos el número de iteraciones, el promedio de iteraciones requeridas para resolver los programas cuadráticos (2.73) en cada iteración del algoritmo, el tiempo computacional total y el valor óptimo obtenido $J_M^h(u^*)$, así como también los valores de J_M^h en $u \equiv 0$ y $u = \bar{u}$.

Cuadro 3.2: *Tabla de convergencia para P_M^h cuando h tiende a cero. Comparación entre los valores del funcional de costo J_M^h para los tres controles distintos $0, \bar{u}$ y u^* .*

$M = 10$

N	it.	QP it.	time (s)	$J_M^h(u^*)$	$\ \theta(u^*)\ $	$J_M^h(0)$	$J_M^h(\bar{u})$
10	244	16	14.44	0.007788	8.401005e-07	0.800874	0.215130
20	125	17	23.01	0.005969	6.543774e-07	0.725481	0.195252
40	99	15	161.55	0.005190	9.733017e-07	0.690280	0.186078
80	42	14	176.20	0.005024	7.751443e-07	0.673507	0.181744
160	13	14	206.21	0.005068	1.039236e-07	0.665313	0.179636

$M = 20$

10	468	15	53.00	0.006660	8.285572e-08	0.766726	0.215746
20	25	16	8.95	0.005152	2.079706e-07	0.696047	0.197660
40	30	15	66.89	0.004592	8.617495e-07	0.663169	0.189361
80	31	16	246.04	0.004378	9.072021e-07	0.647514	0.185447
160	22	15	729.86	0.004338	1.866180e-07	0.639851	0.183539

$M = 40$

10	400	17	90.54	0.014411	9.826213e-07	0.749512	0.216604
20	53	17	39.07	0.009176	8.677528e-07	0.681199	0.199407
40	25	20	88.54	0.007388	4.323203e-07	0.649630	0.191585
80	9	22	168.57	0.006662	9.191242e-07	0.634515	0.187871
160	14	20	1171.86	0.006308	3.047304e-07	0.627107	0.186059

$M = 80$

10	221	19	110.51	0.009605	7.934991e-07	0.740930	0.217189
20	57	18	97.71	0.006882	1.144276e-07	0.673885	0.200459
40	17	17	175.53	0.006152	6.315244e-07	0.642891	0.192849
80	22	19	984.30	0.005836	8.265107e-07	0.628013	0.189226
160	15	17	3284.38	0.005746	2.460912e-07	0.620732	0.187460

Como era de esperar, el valor óptimo decrece a medida que el paso de tiempo h tiende a cero. Sin embargo, observamos que los valores obtenidos para $M = 10$ y $M = 20$ son un poco más pequeños que para $M = 40$ y $M = 80$, con el mismo comportamiento cuando tomamos el control diseñado para un parámetro fijo. Esto no implica ninguna contradicción con lo probado en las secciones anteriores, ya que al no conocer el valor óptimo de este problema, no podemos determinar qué tan cerca o lejos estamos del mismo. También queda en evidencia que para diferentes valores de M , el número de iteraciones es grande para $N = 10$ y es menor a medida que N crece, esto se debe a la elección que hicimos sobre los controles iniciales. El haber elegido como control inicial a la interpolación lineal del control obtenido para el N anterior, reduce notablemente la cantidad de iteraciones. Esta reducción es de suma importancia ya que el tiempo computacional tiene crecimiento significativo cuando se incrementan M y N .

Vemos también que nuestro enfoque mejora notablemente los resultados obtenidos si comparamos con el caso sin controlar o con el mejor control obtenido a partir de un sólo parámetro. Este comportamiento se ilustra también en las gráficas que presentamos debajo para el caso de $M = 80$ y $N = 160$. La Figura 3.1 muestra las dos componentes (la primera en línea continua y la segunda en línea discontinua), a la izquierda del control \bar{u} obtenido para el parámetro $\bar{\omega}$ y a la derecha del control u^* obtenido con el Algoritmo 3.1.

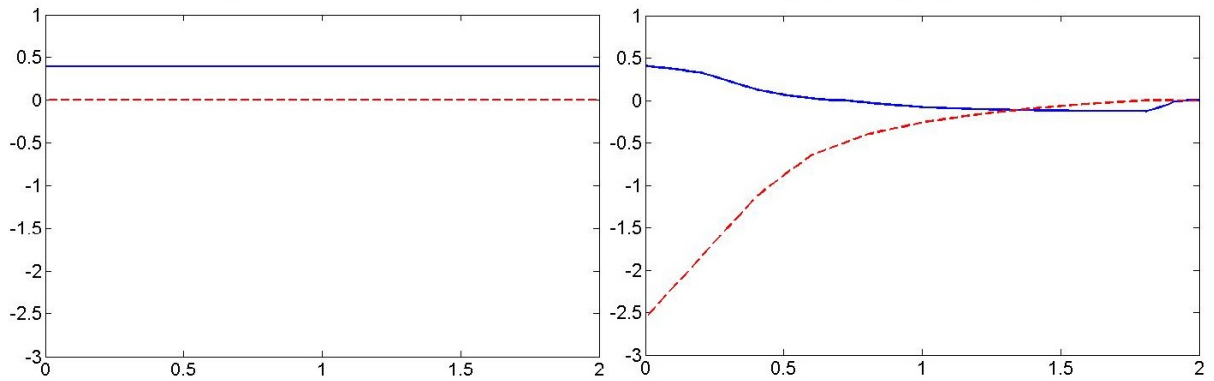


Figura 3.1: *Control obtenido para un sólo parámetro y control obtenido con el Algoritmo 3.1.*

En las Figura 3.2, Figura 3.3 y Figura 3.4, para los tres casos descritos anteriormente, mostramos a la izquierda la primera componente de las trayectorias, i.e. $y_1(\cdot, \omega_i)$ para todo $i = 1, \dots, M$, y a la derecha la segunda componente $y_2(\cdot, \omega_i)$. Podemos observar que nuestro enfoque, mediante SAA, mejora significativamente los resultados obtenidos, no sólo haciendo decrecer el rango de las amplitudes sino también el rango de las velocidades finales.

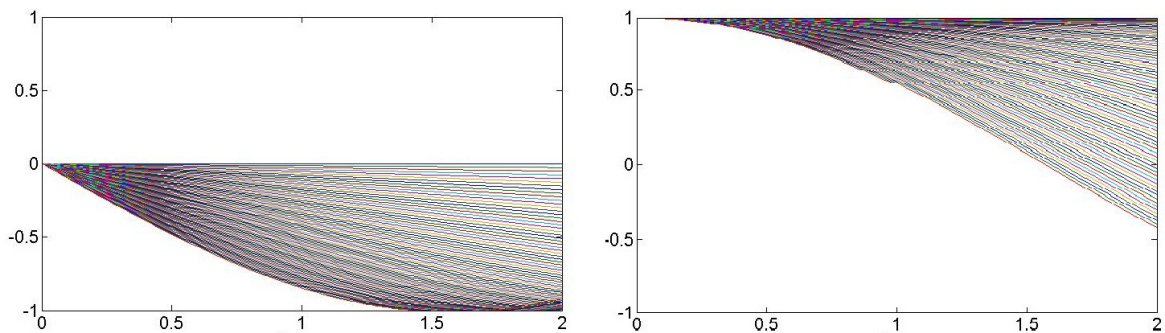


Figura 3.2: *Trayectorias obtenidas para el caso sin controlar.*

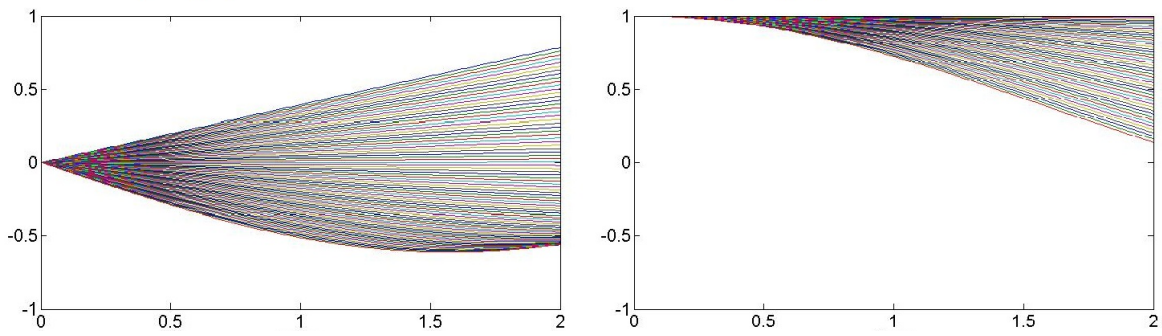


Figura 3.3: Trayectorias obtenidas para el caso de una muestra con un sólo parámetro $\bar{\omega}$.

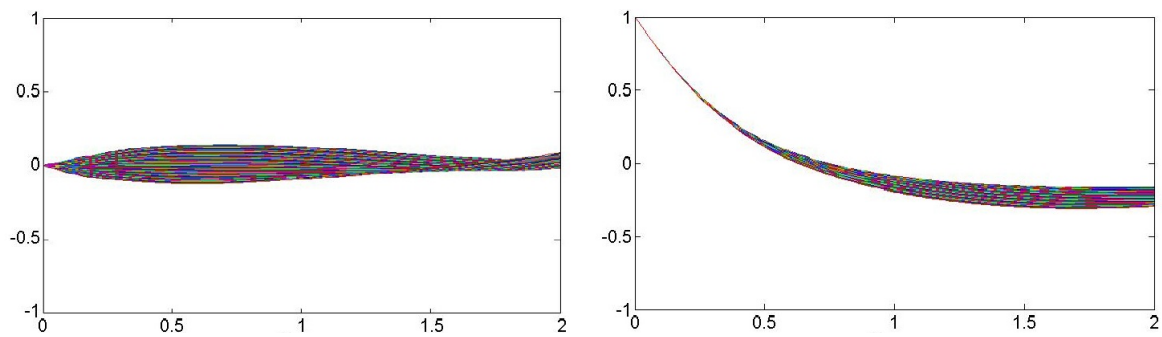


Figura 3.4: Trayectorias obtenidas para el caso de SAA.

Capítulo 4

El algoritmo de Sakawa-Shindo para el caso de control estocástico

El objetivo principal de esta sección es extender al caso estocástico el algoritmo de Sakawa-Shindo, presentado en [80] para el caso de control óptimo determinista, el cual está basado en el PMP. Este método fue estudiado en más detalle por Bonnans en [25] y una primera extensión del mismo al caso estocástico fue realizada por Mazliak en [66]. Bajo hipótesis más generales que las presentadas en este último trabajo, mostraremos que se trata de un método de descenso. Además bajo hipótesis de convexidad, veremos que la sucesión de controles obtenida por el algoritmo es una sucesión minimizante y que todos sus puntos de acumulación débiles son soluciones óptimas.

En un caso en particular, mostraremos que el método puede interpretarse como el algoritmo de gradiente más proyección, el cual converge linealmente a la solución.

4.1. Introducción

A diferencia de los capítulos anteriores, en este consideraremos un problema de control óptimo estocástico, donde el funcional de costo esta compuesto por un costo acumulativo más un costo final. En este capítulo el objetivo será presentar un método que resuelva este problema, el cual está basado en el algoritmo de Sakawa-Shindo.

Como mencionamos anteriormente, una primera extensión de este algoritmo al caso

estocástico fue presentada en [66], bajo hipótesis bastante restrictivas. En este capítulo, trabajaremos principalmente con dos hipótesis, la primera es que la dinámica es una función afín del estado y del control, y la segunda es que la *volatilidad* (o difusión) es una función afín del estado y del control y que los coeficientes del funcional de costo son Lipschitz continuos. Con estas hipótesis, este trabajo extiende a [66], en varios sentidos. Primero, el autor en dicho trabajo considera que la volatilidad es independiente del estado y del control y bajo hipótesis de convexidad demuestra que la sucesión de controles generada por el algoritmo es débilmente convergente a una solución del problema. Luego, considera que la difusión depende sólo del estado y modificando adecuadamente el algoritmo, prueba que la sucesión de controles converge débilmente a un control ε - óptimo. Aquí veremos que dicha modificación no es necesaria y probaremos que todos los puntos de acumulación de la sucesión obtenida con el algoritmo son soluciones óptimas.

Gracias a ciertas condiciones de optimalidad débiles que mostraremos, podremos ver que la sucesión de controles generada por el algoritmo es una sucesión minimizante. Este resultado no sólo que no figura en [66], sino que también estaba ausente para el caso determinista en [25]. Una vez probado esto, se desprende fácilmente que en particular para el caso fuertemente convexo tendremos convergencia fuerte al único control óptimo del problema.

Por otro lado, cabe destacar que a diferencia del los algoritmos presentados en los capítulos anteriores, este es sólo un algoritmo conceptual, es decir tal como está planteado no es implementable. En el capítulo que sigue estudiaremos un problema en tiempo discreto que aproxima al presentado en este capítulo y para el cual veremos que es posible extender este método. Sin embargo, éste es sólo el primer paso para obtener un método numérico que aproxime al problema, ya que además de una discretización en tiempo, necesitaríamos para aproximar al estado y al estado adjunto, o bien una discretización en el espacio de estados o bien utilizar otros métodos de aproximación, como por ejemplo los de tipo Monte Carlo. Dado que la ecuación del estado adjunto es una ecuación diferencial estocástica retrógrada, no es sencillo aproximarla con métodos clásicos y sigue siendo un tema de investigación actual la aproximación de este tipo de ecuaciones.

4.1.1. Descripción del problema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espacio filtrado de probabilidad, que satisface las condiciones usuales, en el cual está definido un movimiento browniano m -dimensional estándar W . Suponemos que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ ($T > 0$) es la filtración natural, aumentada por todos los conjuntos \mathbb{P} -nulos en \mathcal{F} , asociada a W . Consideramos la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dy(t) = f(t, y(t), u(t), \omega)dt + \sigma(t, y(t), u(t), \omega)dW(t) & t \in [0, T], \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ son funciones dadas. Denotamos con $y \in \mathbb{R}^n$ al estado y con $u \in \mathbb{R}^r$ al control. Definimos al funcional de costo, como

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \ell(t, y(t), u(t))dt + g(y(T)) \right]. \quad (4.2)$$

donde $\ell : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas. En la próxima sección daremos hipótesis más precisas sobre los espacios de estados y controles y sobre las funciones involucradas en la dinámica y el costo.

Sea $U_{ad} \subset \mathbb{R}^r$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo y sea

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in (\mathbb{H}^2)^r : u(t, \omega) \in U_{ad}, \text{ p.c.t. } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega\}, \quad (4.3)$$

el conjunto de controles admisibles. El problema de control óptimo que consideramos es

$$\text{mín } J(u); \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (P)$$

4.1.2. Descripción del algoritmo

Definimos al *Hamiltoniano* del problema como,

$$\begin{aligned} H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, y, u, p, q, \omega) &\mapsto \ell(t, y, u, \omega) + p \cdot f(t, y, u, \omega) \\ &\quad + q \cdot \sigma(t, y, u, \omega), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $p \cdot f(t, y, u, \omega)$ es el producto escalar en \mathbb{R}^n y $q \cdot \sigma(t, y, u, \omega) := \sum_{j=1}^m q_j \cdot \sigma_j(t, y, u, \omega)$, donde q_j y σ_j denotan las columnas de las matrices q y σ .

Ahora, dados (y, u) que satisfacen (4.1) definimos al estado adjunto $(p, q) \in (\mathbb{H}^2)^n \times (\mathbb{H}^2)^{n \times m}$ como la única solución de la siguiente EDER:

$$\begin{cases} dp(t) = -\nabla_y H(t, y(t), u(t), p(t), q(t), \omega) dt + q(t) dW(t) & t \in [0, T], \\ p(T) = \nabla_y g(y(T)). \end{cases} \quad (4.5)$$

Finalmente dado $\varepsilon > 0$, definimos al *Hamiltoniano aumentado* como

$$\begin{aligned} K_\varepsilon : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, y, u, v, p, q, \omega) &\mapsto H(t, y, u, p, q, \omega) + \frac{1}{2\varepsilon} |u - v|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ahora presentamos el algoritmo que consideraremos para resolver (P) .

Algoritmo 4.1.

Paso 1: Elegir $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible y $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos dados. Definir $k := 0$. Utilizando (4.1), calcular el estado y^0 asociado a u^0 .

Paso 2: Calcular el estado adjunto (p^k, q^k) , solución de (4.5), asociado a (y^k, u^k) .

Paso 3: Definir $k := k + 1$. Calcular u^k e y^k tal que y^k es el estado correspondiente a u^k
 y

$$u^k(t, \omega) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{U}_{ad}} K_{\varepsilon_k}(t, y^k(t, \omega), u, u^{k-1}(t, \omega), p^{k-1}(t, \omega), q^{k-1}(t, \omega), \omega), \quad (4.7)$$

para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Paso 4: Parar si algún test de convergencia es satisfecho. En otro caso, volver al **Paso 2**.

En la Sección 4.3 veremos que u^k está bien definido en el **Paso 3** si ε_k es lo suficientemente chico. La idea principal del algoritmo es calcular en cada paso un nuevo control que minimiza al Hamiltoniano aumentado K_ε que depende de H y de un término cuadrático que penaliza la distancia al control actual. Probaremos que se trata de un método de descenso y en el caso convexo veremos que es globalmente convergente en la topología débil de $(\mathbb{H}^2)^r$. En el **Paso 3** queda en evidencia la relación con el PMP para el caso estocástico.

4.2. Hipótesis generales

Comenzamos introduciendo algunas notaciones. El espacio \mathbb{H}^2 dotado con el producto escalar natural de $L^2([0, T] \times \Omega)$ es un espacio de Hilbert. Denotamos con $\|\cdot\|$ la norma de $L^2([0, T] \times \Omega)$ en $(\mathbb{H}^2)^l$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Como es usual, si el contexto es claro, omitimos la dependencia de ω de los procesos estocásticos. Notamos con \mathbb{S}^2 al subespacio de \mathbb{H}^2 de los procesos continuos x que satisfacen $\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2) < \infty$. Finalmente, al igual que en los capítulos anteriores, dado un espacio euclídeo \mathbb{R}^l , denotamos con $|\cdot|$ a la norma euclídea y con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ a la σ -álgebra de Borel.

Ahora presentaremos las hipótesis que consideraremos a lo largo de este capítulo.

(H1) Hipótesis sobre la dinámica:

- a) Las funciones $\varphi = f, \sigma$ son $\mathcal{B}([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) \otimes \mathcal{F}_T$ -medibles.
- b) Para todo $(y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ el proceso $[0, T] \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \varphi(y, u, t, \omega)$ es \mathbb{F} -adaptado.
- c) Para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ la aplicación $(y, u) \mapsto \varphi(y, u, t, \omega)$ es C^2 y existe una constante $L > 0$ y un proceso $\rho_\varphi \in \mathbb{H}^2$ tal que para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ y para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y $u, \bar{u} \in U_{ad}$ tenemos

$$\begin{cases} |\varphi(t, y, u, \omega)| \leq L[|y| + |u| + \rho_\varphi(t, \omega)], \\ |\varphi_y(t, y, u, \omega)| + |\varphi_u(t, y, u, \omega)| \leq L, \\ |\varphi_{yy}(t, y, u, \omega) - \varphi_{yy}(t, \bar{y}, \bar{u}, \omega)| \leq L(|y - \bar{y}| + |u - \bar{u}|), \\ |\varphi_{yy}(t, y, u, \omega)| + |\varphi_{yu}(t, y, u, \omega)| + |\varphi_{uu}(t, y, u, \omega)| \leq L. \end{cases} \quad (4.8)$$

(H2) Hipótesis sobre el costo:

- a) Las funciones ℓ y g son respectivamente $\mathcal{B}([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) \otimes \mathcal{F}_T$ y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{F}_T$ medibles.
- b) Para todo $(y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ el proceso $[0, T] \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \ell(t, y, u, \omega)$ es \mathbb{F} -adaptado.
- c) Para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ la aplicación $(y, u) \mapsto \ell(y, u, t, \omega)$ es C^2 , y existe $L > 0$ y un proceso $\rho_\ell(\cdot) \in \mathbb{H}^2$ tal que para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ y

para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U_{ad}$ tenemos

$$\begin{cases} |\ell(t, y, u, \omega)| \leq L [|y| + |u| + \rho_\ell(t, \omega)]^2, \\ |\ell_y(t, y, u, \omega)| + |\ell_u(t, y, u, \omega)| \leq L [|y| + |u| + \rho_\ell(t, \omega)], \\ |\ell_{yy}(t, y, u, \omega)| + |\ell_{yu}(t, y, u, \omega)| + |\ell_{uu}(t, y, u, \omega)| \leq L, \\ |\ell_{yy}(t, y, u, \omega) - \ell_{yy}(t, \bar{y}, u, \omega)| \leq L |y - \bar{y}|. \end{cases} \quad (4.9)$$

d) Para casi todo $\omega \in \Omega$ la aplicación $y \mapsto g(y, \omega)$ es C^2 y existe $L > 0$ tal que para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} |g(y, \omega)| \leq L [|y| + 1]^2, \\ |g_y(y, \omega)| \leq L [|y| + 1], \\ |g_{yy}(y, \omega)| \leq L, \\ |g_{yy}(y, \omega) - g_{yy}(\bar{y}, \omega)| \leq L |y - \bar{y}|. \end{cases} \quad (4.10)$$

(H3) Al menos una de las siguientes hipótesis es verdadera:

a) Para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ la aplicación $(y, u) \mapsto \sigma(t, y, u, \omega)$ es afín y además la siguiente condición de Lipschitz para el costo es satisfecha: existe $L > 0$ tal que para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, y para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y $u, \bar{u} \in U_{ad}$, tenemos

$$\begin{cases} |\ell(t, y, u, \omega) - \ell(t, \bar{y}, \bar{u}, \omega)| \leq L [|y - \bar{y}| + |u - \bar{u}|], \\ |g(y, \omega) - g(\bar{y}, \omega)| \leq L |y - \bar{y}|. \end{cases} \quad (4.11)$$

b) Para $\varphi = f, \sigma$ y para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ la aplicación $(y, u) \mapsto \varphi(t, y, u, \omega)$ es afín.

Nota 4.2.1. Bajo la hipótesis **(H1)**, para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ la ecuación de estado (4.1) admite una única solución fuerte en $(\mathbb{S}^2)^n$, gracias a la Proposición 1.1.7. Además, de las estimaciones de la Proposición 1.1.7 y las hipótesis sobre el costo **(H2)** podemos concluir que el funcional J está bien definido. Por último, la ecuación (4.5) puede ser escrita como

$$\begin{cases} dp(t) = - \left[\nabla_y \ell(t, y(t), u(t)) + f_y(t, y(t), u(t))^\top p(t) + \sum_{j=1}^m D_y \sigma_j(t, y(t), u(t))^\top q_j(t) \right] dt \\ \quad + q(t) dW(t), \\ p(T) = \nabla_y g(y(T)) \end{cases} \quad (4.12)$$

y bajo las hipótesis **(H1)**-**(H2)**, tiene una única solución $(p, q) \in (\mathbb{S}^2)^n \times (\mathbb{H}^2)^{n \times m}$ (ver [23], Proposición 1.1.8 y [89, Capítulo 7, Teorema 2.2]).

4.3. Buena definición del algoritmo

El objetivo de esta sección es probar que las iteraciones del Algoritmo 4.1 están bien definidas. Comenzamos con el siguiente lema que será de utilidad en todo lo que sigue.

Lema 4.3.1. *Bajo las hipótesis **(H1)**-**(H2)** y **(H3)**-(a), existe una constante $C > 0$ tal que la solución (p, q) de (4.12) satisface*

$$|p(t)| \leq C, \quad \forall t \in [0, T], \mathbb{P} - c.s. \quad (4.13)$$

Demostración. De la fórmula de Itô y la ecuación (4.12), tenemos que para todo $t \in [0, T]$, \mathbb{P} -c.s.,

$$\begin{aligned} |p(t)|^2 &= 2 \int_t^T p(s) \cdot [\nabla_y \ell(s, y(s), u(s)) + f_y(s, y(s), u(s))]^\top p(s) ds \\ &\quad + 2 \int_t^T p(s) \cdot \sum_{j=1}^m D_y \sigma_j(s, y(s), u(s))^\top q_j(s) ds - \int_t^T \sum_{j=1}^m |q_j(s)|^2 ds \\ &\quad - 2 \int_t^T p(s) \cdot q(s) dW(s) + |p(T)|^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta que $p(T) = \nabla_y g(y(T))$ y que las funciones de costo son Lipschitz por la hipótesis **(H3)**-(a), se obtiene

$$\begin{aligned} |p(t)|^2 &\leq 2 \int_t^T [L |p(s)| + L |p(s)|^2 + \sum_{j=1}^m L |p(s)| |q_j(s)|] ds \\ &\quad - \int_t^T \sum_{j=1}^m |q_j(s)|^2 ds - 2 \int_t^T p(s) \cdot q(s) dW(s) + L^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ahora, de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young concluimos que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} |p(t)|^2 &\leq L^2 T + \int_t^T (1 + 2L) |p(s)|^2 + \sum_{j=1}^m \left[\frac{L^2}{\varepsilon} |p(s)|^2 + \varepsilon |q_j(s)|^2 \right] ds \\ &\quad - \int_t^T \sum_{j=1}^m |q_j(s)|^2 ds - 2 \int_t^T p(s) \cdot q(s) dW(s) + L^2 \\ &= L^2 (T + 1) + \left(1 + 2L + \frac{mL^2}{\varepsilon} \right) \int_t^T |p(s)|^2 ds \\ &\quad + (\varepsilon - 1) \sum_{j=1}^m \int_t^T |q_j(s)|^2 ds - 2 \int_t^T p(s) \cdot q(s) dW(s). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Eligiendo $\varepsilon < 1$, obtenemos

$$|p(t)|^2 \leq C_1 + C_2 \int_t^T |p(s)|^2 ds - 2 \int_t^T p(s) \cdot q(s) dW(s). \quad (4.17)$$

para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$. Ahora fijamos $\bar{t} \in [0, T]$ y definimos $r(t) := \mathbb{E}(|p(t)|^2 | \mathcal{F}_{\bar{t}}) \geq 0$ para todo $t \geq \bar{t}$. De [10, Lema 3.1] se obtiene que

$$\mathbb{E} \left(\int_t^T p(s) \cdot q(s) dW(s) | \mathcal{F}_{\bar{t}} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Combinando este resultado con (4.17), se deduce

$$r(t) \leq C_1 + C_2 \int_t^T r(s) ds. \quad (4.19)$$

Luego, del Lema de Grönwall, existe $C > 0$ independiente de (t, ω) y \bar{t} tal que $r(t) \leq C$ para todo $\bar{t} \leq t \leq T$ y en particular $|p(\bar{t})|^2 = r(\bar{t}) \leq C$ para casi todo ω . Como \bar{t} es arbitrario y p admite una versión continua, se obtiene el resultado deseado. \square

Lema 4.3.2. *Bajo las hipótesis (H1)-(H3), consideramos la aplicación*

$$u_\varepsilon : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathbb{R}^{n \times m} \times U_{ad} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r \quad (4.20)$$

donde $P := B(0, C)$ (bola en \mathbb{R}^n) si vale (H3)-(a) y $P = \mathbb{R}^n$ si vale (H3)-(b), definido por

$$u_\varepsilon(t, y, p, q, v, \omega) := \operatorname{argmin}\{K_\varepsilon(t, y, u, v, p, q, \omega) ; u \in U_{ad}\}. \quad (4.21)$$

Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ y $\alpha > 0$ independientes de (t, ω) , tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$, u_ε está bien definido y para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ y todo $(y^i, p^i, q^i, v^i) \in \mathbb{R}^n \times P \times \mathbb{R}^{n \times m} \times U_{ad}$, $i = 1, 2$ se tiene:

$$|u_\varepsilon(t, y^2, p^2, q^2, v^2) - u_\varepsilon(t, y^1, p^1, q^1, v^1)| \leq 2|v^2 - v^1| + \alpha(|y^2 - y^1| + |p^2 - p^1| + |q^2 - q^1|). \quad (4.22)$$

Demostración. Siguiendo las ideas de [25, 66], definimos $z := (y, p, q, v)$, un elemento de $E := \mathbb{R}^n \times P \times \mathbb{R}^{n \times m} \times U_{ad}$. En lo que sigue de la prueba omitiremos la dependencia en (t, ω) . Podemos reescribir a K_ε como $K_\varepsilon(u, z)$. Ahora veamos que para ε suficiente chico, tenemos

$$D_{uu}^2 K_\varepsilon(u, z)(u', u') \geq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2C_0\right) |u'|^2 \geq \frac{1}{2\varepsilon} |u'|^2 \quad \forall z \in E \text{ y } u' \in \mathbb{R}^m. \quad (4.23)$$

En efecto,

$$D_{uu}^2 K_\varepsilon(u, z)(u', u') = \ell_{uu}(y, u)(u', u') + p^\top f_{uu}(y, u)(u', u') + q^\top \sigma_{uu}(y, u)(u', u') + \frac{1}{\varepsilon} |u'|^2. \quad (4.24)$$

Si se verifica **(H3)**-(a) entonces tenemos ℓ_{uu} y f_{uu} acotados por hipótesis, $p \in P$ donde P es acotado si se verifica **(H3)**-(a) y $\sigma_{uu} = 0$. Si en lugar se verifica **(H3)**-(b), como f y σ son afines, sus derivadas segundas se anulan y tenemos ℓ_{uu} acotado por **(H2)**. Por lo tanto se verifica (4.23).

Luego, K_ε resulta ser una función fuertemente convexa con respecto a u y de módulo $1/(2\varepsilon)$. Tenemos entonces que u_ε está bien definida. Además se verifica (ver [26]),

$$(D_u K_\varepsilon(u^2, z) - D_u K_\varepsilon(u^1, z)) (u^2 - u^1) \geq \frac{1}{2\varepsilon} |u^2 - u^1|^2, \quad \forall u^1, u^2 \in U_{ad}. \quad (4.25)$$

Por otro lado, si para $i = 1, 2$, tomamos $z^i = (y^i, p^i, q^i, v^i) \in E$ y notamos $u^i := u_\varepsilon(y^i, p^i, q^i, v^i)$, de la definición de u_ε y la condición de optimalidad clásica de primer orden, se obtiene

$$D_u K_\varepsilon(u^i, z^i) (u^{3-i} - u^i) \geq 0. \quad (4.26)$$

Sumando estas dos desigualdades para $i = 1, 2$ junto con (4.25) tomando $z = z^1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} |u^2 - u^1|^2 &\leq (D_u K_\varepsilon(u^2, z^1) - D_u K_\varepsilon(u^2, z^2)) (u^2 - u^1), \\ &\leq |D_u K_\varepsilon(u^2, z^1) - D_u K_\varepsilon(u^2, z^2)| |u^2 - u^1|. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como $D_u K_\varepsilon(u, z) = (1/\varepsilon)(u - v) + H_u(y, u, p, q)$, tenemos

$$|u^2 - u^1| \leq 2 |v^2 - v^1| + 2\varepsilon |\nabla_u H(y^1, u^2, p^1, q^1) - \nabla_u H(y^2, u^2, p^2, q^2)|. \quad (4.28)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |\nabla_u H(y^1, u^2, p^1, q^1) - \nabla_u H(y^2, u^2, p^2, q^2)| &\leq |\nabla_u \ell(y^1, u^2) - \nabla_u \ell(y^2, u^2)| \\ &\quad + |\nabla_u f(y^1, u^2)| |p^1 - p^2| \\ &\quad + |\nabla_u f(y^1, u^2) - \nabla_u f(y^2, u^2)| |p^2| \\ &\quad + |\nabla_u \sigma(y^1, u^2)| |q^1 - q^2| \\ &\quad + |\nabla_u \sigma(y^1, u^2) - \nabla_u \sigma(y^2, u^2)| |q^2|. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Entonces (4.22) sigue de nuestras hipótesis, ya que de **(H2)** las derivadas segundas de ℓ son acotadas y si vale **(H3)**-(a), entonces el gradiente de σ con respecto al control es constante y p^2 está acotado, si por el contrario vale **(H3)**(b), entonces f y σ son afines y por lo tanto sus derivadas primeras son constantes. \square

Teorema 4.3.3. *Bajo las hipótesis **(H1)**-**(H3)**, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\varepsilon_k < \varepsilon_0$ para todo k , entonces el algoritmo define de manera única una sucesión $\{u^k\}$ de controles admisibles.*

Demostración. Dado $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$, sean (p^0, q^0) el estado adjunto asociado a u^0 . Definimos $\bar{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\bar{\sigma} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ como

$$\begin{aligned}\bar{f}(y) &:= f(y, u_{\varepsilon_1}(y, p^0, q^0, u^0)), \\ \bar{\sigma}(y) &:= \sigma(y, u_{\varepsilon_1}(y, p^0, q^0, u^0)).\end{aligned}\tag{4.30}$$

La hipótesis **(H1)** y el Lema 4.3.2 implican que las funciones \bar{f} y $\bar{\sigma}$ son Lipschitz continuas con respecto a y , luego la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dy(t) = \bar{f}(y)dt + \bar{\sigma}(y)dW(t) & t \in [0, T], \\ y(0) = x, \end{cases}\tag{4.31}$$

tiene una única solución (ver [89, Capítulo 1, Teorema 6.16]). Por lo tanto, $u^1 := u_{\varepsilon_1}(y, p^0, q^0, u^0)$ queda determinado de manera única. Si procedemos por inducción, obtenemos que u^k está bien definido para todo $k \in \mathbb{N}$. \square

4.4. Convergencia

En esta sección mostraremos los resultados más importantes del capítulo. Veremos que si $\sup_k \varepsilon_k \leq \varepsilon_0$ para ε_0 suficientemente chico, entonces la función de costo no crece con las iteraciones (ver Teorema 4.4.2 y Teorema 4.4.3). Además, si el problema es convexo, entonces todo límite débil de la sucesión $\{u^k\}$ resuelve el problema (P) (ver Teorema 4.4.6). Comenzamos por el siguiente resultado sencillo, pero fundamental en todo lo que sigue.

Lema 4.4.1. *Bajo la hipótesis **(H1)**, existe $C > 0$ tal que para todos $u, u' \in (\mathbb{H}^2)^r$*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |y(t) - y'(t)|^2 \right] \leq C \|u - u'\|^2, \tag{4.32}$$

donde y e y' son respectivamente los estados asociados a u y u' .

Demostración. De la Proposición 1.1.7 existe $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |y(t) - y'(t)|^2 \right] \leq C \left[\mathbb{E} \left(\int_0^T |f(t, y'(t), u(t)) - f(t, y'(t), u'(t))| dt \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

$$+ \mathbb{E} \int_0^T |\sigma(t, y'(t), u(t)) - \sigma(t, y'(t), u'(t))|^2 dt \Big]. \quad (4.34)$$

De la hipótesis **(H1)**-(c) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene directamente (4.32). \square

Teorema 4.4.2. *Bajo las hipótesis **(H1)**-**(H3)**, existe $\alpha > 0$ tal que toda sucesión generada por el algoritmo satisface*

$$J(u^k) - J(u^{k-1}) \leq - \left(\frac{1}{\varepsilon_k} - \alpha \right) \|u^k - u^{k-1}\|^2. \quad (4.35)$$

Demostración. Omitiremos la variable t siempre que no haya ambigüedad. De la definición del Hamiltoniano surge que

$$\begin{aligned} J(u^k) - J(u^{k-1}) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T [H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \right. \\ &\quad - p^{k-1} \cdot (f(y^k, u^k) - f(y^{k-1}, u^{k-1})) \\ &\quad \left. - q^{k-1} \cdot (\sigma(y^k, u^k) - \sigma(y^{k-1}, u^{k-1}))] dt \right. \\ &\quad \left. + g(y^k(T)) - g(y^{k-1}(T)) \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Definimos $\Delta y^k := y^k - y^{k-1}$ y $\Delta u^k := u^k - u^{k-1}$. De la fórmula de Itô se tiene casi seguramente que

$$\begin{aligned} p^{k-1}(T) \cdot \Delta y^k(T) &= p^{k-1}(0) \cdot \Delta y^k(0) + \int_0^T [p^{k-1} \cdot (f(y^k, u^k) - f(y^{k-1}, u^{k-1})) \\ &\quad - H_y(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta y^k \\ &\quad + q^{k-1} \cdot (\sigma(y^k, u^k) - \sigma(y^{k-1}, u^{k-1}))] dt \\ &\quad + \int_0^T p^{k-1} \cdot (\sigma(y^k, u^k) - \sigma(y^{k-1}, u^{k-1})) dW(t) \\ &\quad + \int_0^T q^{k-1} \cdot \Delta y^k dW(t). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Luego, reemplazando en (4.36) y utilizando el hecho que $\Delta y^k(0) = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} J(u^k) - J(u^{k-1}) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T [H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \right. \\ &\quad \left. - H_y(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}, t) \Delta y^k(t)] dt \right. \\ &\quad \left. - p^{k-1}(T) \cdot \Delta y^k(T) + g(y^k(T)) - g(y^{k-1}(T)) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Además, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta &:= H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \\ &= H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^k, u^k - \Delta u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \\ &\quad + H(y^{k-1} + \Delta y^k, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \\ &= \Delta_y - \Delta_u + H_y(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta y^k + H_u(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_u &:= H(y^k, u^k - \Delta u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \\ &\quad + H_u(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k, \end{aligned} \quad (4.40)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_y &:= H(y^{k-1} + \Delta y^k, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) - H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \\ &\quad - H_y(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta y^k. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Reemplazando en (4.38) deducimos

$$\begin{aligned} J(u^k) - J(u^{k-1}) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T [H_u(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k - \Delta_u + \Delta_y] dt \right. \\ &\quad \left. - p^{k-1}(T) \cdot \Delta y^k(T) + g(y^k(T)) - g(y^{k-1}(T)) \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Como en ambos casos de **(H3)** se tiene $\sigma_{uu} \equiv 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \int_0^1 (1-s) H_{uu}(y^k, u^k + s \Delta u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) (\Delta u^k, \Delta u^k) ds \\ &= \int_0^1 (1-s) \ell_{uu}(y^k, u^k + s \Delta u^k) (\Delta u^k, \Delta u^k) ds \\ &\quad + \int_0^1 (1-s) p^{k-1} \cdot f_{uu}(y^k, u^k + s \Delta u^k) (\Delta u^k, \Delta u^k) ds. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Luego, si vale **(H3)**-(a) del Lema 4.3.1 y las hipótesis **(H1)**-**(H2)** se tiene

$$\Delta_u \geq -\frac{L}{2} |\Delta u^k|^2 - \frac{CL}{2} |\Delta u^k|^2. \quad (4.44)$$

Si por el contrario vale **(H3)**-(b), entonces $f_{uu} \equiv 0$ y de **(H2)** se obtiene

$$\Delta_u \geq -\frac{L}{2} |\Delta u^k|^2. \quad (4.45)$$

Ahora, de ambos casos en **(H3)** deducimos $\sigma_{yy} \equiv 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_y &= \int_0^1 (1-s) H_{yy}(y^{k-1} + s\Delta y^k, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1})(\Delta y^k, \Delta y^k) ds \\ &= \int_0^1 (1-s) [\ell_{yy}(y^{k-1} + s\Delta y^k, u^{k-1})(\Delta y^k, \Delta y^k) \\ &\quad + p^{k-1} \cdot f_{yy}(y^{k-1} + s\Delta y^k, u^{k-1})(\Delta y^k, \Delta y^k)] ds.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Si se satisface **(H3)**-(a), el Lema 4.3.1 y las hipótesis **(H1)**-(**H2**) implican

$$\Delta_y \leq \frac{L}{2} |\Delta y^k|^2 + \frac{CL}{2} |\Delta y^k|^2.\tag{4.47}$$

Si se satisface **(H3)**-(b), entonces $f_{yy} \equiv 0$ y de **(H2)** se tiene $\Delta_y \leq \frac{L}{2} |\Delta y^k|^2$. En conclusión, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\Delta_u \geq -C_0 |\Delta u^k|^2 \quad \text{y} \quad \Delta_y \leq C_0 |\Delta y^k|^2.\tag{4.48}$$

Luego, combinando (4.42), y (4.48), deducimos

$$\begin{aligned}J(u^k) - J(u^{k-1}) &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \left[H_u(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k + C_0 |\Delta u^k|^2 + C_0 |\Delta y^k|^2 \right] dt \right. \\ &\quad \left. - p^{k-1}(T) \cdot \Delta y^k(T) + g(y^k(T)) - g(y^{k-1}(T)) \right).\end{aligned}\tag{4.49}$$

Como u^k minimiza K_{ε_k} tenemos,

$$D_u K_{\varepsilon_k}(y^k, u^k, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k \leq 0, \quad \text{p.c.t. } t \in [0, T], \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}\tag{4.50}$$

luego,

$$\begin{aligned}H_u(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k &= D_u K_{\varepsilon_k}(y^k, u^k, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \Delta u^k - \frac{1}{\varepsilon_k} |\Delta u^k|^2 \\ &\leq -\frac{1}{\varepsilon_k} |\Delta u^k|^2, \quad \text{p.c.t. } t \in [0, T], \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}\end{aligned}\tag{4.51}$$

De la hipótesis **(H2)**-(d) y la definición de $p^{k-1}(T)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$-p^{k-1}(T) \cdot \Delta y^k(T) + g(y^k(T)) - g(y^{k-1}(T)) \leq C_1 |\Delta y^k(T)|^2.\tag{4.52}$$

Por lo tanto, de (4.51) y (4.52) concluimos

$$J(u^k) - J(u^{k-1}) \leq \mathbb{E} \left[\int_0^T \left[\left(C_0 - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) |\Delta u^k(t)|^2 + C_0 |\Delta y^k(t)|^2 \right] dt + C_1 |\Delta y^k(T)|^2 \right].\tag{4.53}$$

El resultado sigue del Lema 4.4.1. □

Ahora consideramos la función proyección $P_{\mathcal{U}_{ad}} : (\mathbb{H}^2)^r \rightarrow \mathcal{U}_{ad} \subset (\mathbb{H}^2)^r$, i.e. para cada $u \in (\mathbb{H}^2)^r$,

$$P_{\mathcal{U}_{ad}}(u) := \operatorname{argmin} \{ \|u - v\| \ ; \ v \in \mathcal{U}_{ad} \}. \quad (4.54)$$

De [31, Lema 6.2], sabemos que

$$P_{\mathcal{U}_{ad}}(u)(t, \omega) = P_{U_{ad}}(u(t, \omega)), \quad \text{p.c.t. } t \in [0, T], \ \mathbb{P} - \text{c.s.}, \quad (4.55)$$

donde $P_{U_{ad}} : \mathbb{R}^r \rightarrow U_{ad} \subset \mathbb{R}^r$ es la función proyección en \mathbb{R}^r . Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 4.4.3. *Suponemos que J es acotada inferiormente y que valen las hipótesis (H1)-(H3). Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\varepsilon_k < \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, cualquier sucesión generada por el Algoritmo 4.1 satisface:*

1. $\{J(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente monótona no creciente,
2. $\|u^k - u^{k-1}\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$,
3. $\|u^k - P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^k - \varepsilon_k \nabla J(u^k))\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. Del Teorema 4.4.2 surge que la sucesión $\{J(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es monótona no creciente y como está acotada inferiormente, podemos concluir que es convergente. Lo que prueba el primer ítem. El hecho de que sea una sucesión convergente junto con (4.35) demuestran el segundo ítem.

Ahora, como u^k minimiza a K_{ε_k} tenemos

$$D_u K_{\varepsilon_k}(y^k, u^k, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1})(v - u^k) \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}, \text{ p.c.t. } t \in [0, T], \ \mathbb{P} - \text{c.s.} \quad (4.56)$$

luego, para todo $v \in U_{ad}$, y p.c.t. $t \in [0, T]$, $\mathbb{P} - \text{c.s.}$

$$(u^k - u^{k-1} + \varepsilon_k \nabla_u H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}), v - u^k) \geq 0, \quad (4.57)$$

y por lo tanto de (4.55)

$$u^k = P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^{k-1} - \varepsilon_k \nabla_u H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1})). \quad (4.58)$$

En [31, Proposición 3.8] se prueba que, bajo nuestras hipótesis,

$$\nabla J(u^{k-1}) = \nabla_u H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1}) \quad \text{en } (\mathbb{H}^2)^r, \quad (4.59)$$

luego, de (4.58),

$$\begin{aligned} u^{k-1} - P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^{k-1} - \varepsilon_k \nabla J(u^{k-1})) &= u^{k-1} - u^k \\ &\quad + P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^{k-1} - \varepsilon_k \nabla_u H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1})) \\ &\quad - P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^{k-1} - \varepsilon_k \nabla_u H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1})). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Como $P_{\mathcal{U}_{ad}}$ es no expansiva en $(\mathbb{H}^2)^r$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u^{k-1} - P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^{k-1} - \varepsilon_k \nabla J(u^{k-1}))\| &\leq \|u^{k-1} - u^k\| \\ &\quad + \varepsilon_k \|\nabla_u H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - \nabla_u H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1})\|. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ahora estimaremos el último término de la desigualdad anterior. En ambos casos de **(H3)**, tenemos $\sigma_{uy} \equiv \sigma_{uu} \equiv 0$. Por lo tanto p.c.t. $t \in [0, T]$ existe $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$\begin{aligned} &|\nabla_u H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - \nabla_u H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1})| \\ &= |H_{uy}(\hat{y}, \hat{u}, p^{k-1}, q^{k-1})(y^k - y^{k-1}) + H_{uu}(\hat{y}, \hat{u}, p^{k-1}, q^{k-1})(u^k - u^{k-1})| \\ &= \left| \left(\ell_{uy}(\hat{y}, \hat{u}) + p^{k-1 \top} f_{uy}(\hat{y}, \hat{u}) \right) (y^k - y^{k-1}) \right. \\ &\quad \left. + \left(\ell_{uu}(\hat{y}, \hat{u}) + p^{k-1 \top} f_{uu}(\hat{y}, \hat{u}) \right) (u^k - u^{k-1}) \right| \\ &\leq C [|y^k - y^{k-1}| + |u^k - u^{k-1}|], \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde la última desigualdad sigue si vale **(H3)**-(a), del Lema 4.3.1 y las hipótesis **(H1)**-**(H2)**, y si vale **(H3)**-(b) del hecho que $f_{uy} \equiv f_{uu} \equiv 0$ y **(H2)**. Podemos concluir entonces

$$\begin{aligned} &\|\nabla_u H(y^k, u^k, p^{k-1}, q^{k-1}) - \nabla_u H(y^{k-1}, u^{k-1}, p^{k-1}, q^{k-1})\|^2 \\ &\leq 2C^2 \left[\|u^k - u^{k-1}\|^2 + \|y^k - y^{k-1}\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

De (4.61)-(4.63), el Lema 4.4.1 nos da la existencia de $C > 0$ tal que

$$\|u^{k-1} - P_{\mathcal{U}}(u^{k-1} - \varepsilon_k \nabla J(u^{k-1}))\| \leq C \|u^{k-1} - u^k\|, \quad (4.64)$$

lo que junto con el segundo ítem prueban el último ítem del teorema. \square

Corolario 4.4.4. *Si la sucesión generada por el algoritmo $\{u^k\}$ es acotada, $\varepsilon_k < \varepsilon_0$ y $\liminf \varepsilon_k = \varepsilon > 0$, entonces para toda sucesión acotada $\{v^k\} \subset \mathcal{U}_{ad}$ se tiene*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (\nabla J(u^k), v^k - u^k) \geq 0. \quad (4.65)$$

En particular

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (\nabla J(u^k), v - u^k) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.66)$$

y para el caso irrestricto $\mathcal{U}_{ad} = (\mathbb{H}^2)^r$, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla J(u^k)\| = 0. \quad (4.67)$$

Demostración. Definimos para cada k ,

$$w_k := P_{\mathcal{U}_{ad}}(u^k - \varepsilon_k \nabla J(u^k)), \quad (4.68)$$

luego tenemos

$$0 \leq (w^k - u^k + \varepsilon_k \nabla J(u^k), v^k - w^k), \quad \forall v^k \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.69)$$

Del Teorema 4.4.3 (3), sabemos que $\|u^k - w^k\| \rightarrow 0$. Además, de las hipótesis $\{u^k\}$ es una sucesión acotada, lo cual implica que la sucesión de los estados adjuntos asociados $\{(p^k, q^k)\}$ es acotada en $(\mathbb{S}^2)^n \times (\mathbb{H}^2)^{n \times m}$ (ver Proposición 1.1.8 o [89, Capítulo 7]). Como $\nabla J(u^k) = \nabla_u H(y^k, u^k, p^k, q^k)$ (ver [31, Proposición 3.8]), de **(H1)**-**(H2)** podemos deducir que $\{\nabla J(u^k)\}$ es una sucesión acotada en $(\mathbb{H}^2)^r$. Finalmente, como la sucesión $\{v^k\}$ es acotada por hipótesis, podemos concluir que

$$0 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (w^k - u^k + \varepsilon_k \nabla J(u^k), v^k - w^k) = \varepsilon \liminf_{k \rightarrow \infty} (\nabla J(u^k), v^k - u^k), \quad (4.70)$$

lo que prueba (4.65).

La desigualdad (4.66) sigue de (4.65) tomando $v^k \equiv v$, para cada $v \in \mathcal{U}_{ad}$, y la ecuación (4.67) se deduce tomando $v^k = u^k - \nabla J(u^k)$, que es acotada en $(\mathbb{H}^2)^r$. \square

Nota 4.4.5. *En el caso irrestricto, de (4.68) tenemos $w_k = u^k - \varepsilon_k \nabla J(u^k)$, y del Teorema 4.4.3 (3) sabemos que $\|u^k - w^k\| \rightarrow 0$. Sigue entonces que (4.67) vale incluso si $\{u^k\}$ es no acotada.*

Bajo hipótesis de convexidad, obtenemos el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 4.4.6. *Supongamos que J es convexa y acotada inferiormente. Además supongamos que $\varepsilon_k < \varepsilon_0$, donde ε_0 viene dado por el Teorema 4.4.3, y $\liminf \varepsilon_k > 0$. Entonces todo límite débil \bar{u} de $\{u^k\}$ es un control óptimo para (P) y $J(u^k) \rightarrow J(\bar{u})$.*

Demostración. Consideremos una subsucesión $\{u^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge débilmente a \bar{u} , luego $\{u^{k_i}\}$ es acotada. Gracias a la convexidad de J y (4.66), para todo $v \in \mathcal{U}_{ad}$ tenemos

$$J(v) \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \{J(u^{k_i}) + (\nabla J(u^{k_i}), v - u^{k_i})\} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} J(u^{k_i}). \quad (4.71)$$

Del Teorema 4.4.3 (1), la sucesión $\{J(u^k)\}$ es convergente, y entonces

$$J(v) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} J(u^k) \geq J(\bar{u}), \quad (4.72)$$

donde la última desigualdad vale gracias a la semicontinuidad inferior débil de J , la cual se deduce de la continuidad y convexidad de J . Como (4.72) vale para todo $v \in \mathcal{U}_{ad}$, podemos concluir que \bar{u} es un control óptimo y que $J(u^k) \rightarrow J(\bar{u})$. \square

Nota 4.4.7. *Notamos que el resultado anterior es una de las principales diferencias con respecto a [66], donde sólo se prueba que los puntos límites débiles son soluciones óptimas ε -aproximadas.*

Si J es fuertemente convexa en $(\mathbb{H}^2)^r$ obtenemos convergencia fuerte de las iteraciones que se obtienen del algoritmo.

Corolario 4.4.8. *Si a las hipótesis anteriores le sumamos el hecho de que J sea fuertemente convexa, entonces toda la sucesión $\{u^k\}$ converge fuertemente al único control óptimo de (P).*

Demostración. Como J es fuertemente convexa, existe un único control $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que $J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u)$ (ver [26, Teorema 1.31]). Más aún, como el primer ítem del Teorema 4.4.3 implica que $J(u^k) \leq J(u^0)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, la convexidad fuerte de J implica que toda la sucesión $\{u^k\}$ es acotada. Del teorema anterior se deduce $J(u^k) \rightarrow J(u^*)$. De la convexidad fuerte de J y la optimalidad de u^* , existe $\beta > 0$ tal que

$$J(u^k) \geq J(u^*) + \frac{\beta}{2} \|u^k - u^*\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.73)$$

Como $J(u^k) \rightarrow J(u^*)$ esto implica que $\|u^k - u^*\| \rightarrow 0$. \square

4.5. Velocidad de convergencia

En esta sección, tal como aparece en [25], presentamos un caso particular donde, dotando de una nueva métrica al espacio de controles, el Algoritmo 4.1 es equivalente al método de gradiente más proyección [48] y esto significa que las iteraciones del método, para la minimización de J sobre el conjunto \mathcal{U}_{ad} , se pueden escribir como

$$\hat{u}^{k+1} := P_{\mathcal{U}_{ad}}(\hat{u}^k - \varepsilon_k \nabla J(\hat{u}^k)). \quad (4.74)$$

Lo que haremos es considerar el interesante caso de una función de costo cuadrático con respecto al control, más precisamente, agregamos la siguiente hipótesis:

(H4) La función ℓ tiene la forma

$$\ell(t, y, u, \omega) := \ell^1(t, y, \omega) + \frac{1}{2} u^\top N(t, \omega) u, \quad (4.75)$$

donde ℓ^1 y el proceso con valores matriciales N son tales que **(H2)** se verifica. En particular, N es esencialmente acotada. Además, asumimos que $N(t, \omega)$ es simétrica p.c.t. (t, ω) .

En lo que sigue, asumimos que **(H1)** y **(H2)** se satisfacen, y como el costo es cuadrático en u , suponemos que se verifica **(H3)**-(b). De todos modos queremos notar que en lugar de **(H3)**-(b), podríamos asumir que ℓ y g satisfacen **(H3)**-(a) si hacemos la hipótesis adicional de que U_{ad} es acotado, pero por simplicidad, asumimos directamente que vale **(H3)**-(b), i.e. la ecuación de estado puede escribirse como

$$\begin{cases} dy(t) = [A(t)y(t) + B(t)u(t) + C(t)]dt \\ \quad + \sum_{j=1}^m [A_j(t)y(t) + B_j(t)u(t) + C_j(t)]dW^j(t), \quad t \in [0, T], \\ y(0) = x \end{cases} \quad (4.76)$$

donde A, B, C, A_j, B_j y C_j , para $j = 1, \dots, m$ son procesos con valores matriciales tales que **(H1)** se satisface.

También asumimos que la sucesión $\{\varepsilon_k\}$ es constante e igual a cierto $\varepsilon > 0$. Para este valor ε definimos

$$M_\varepsilon(t, \omega) := I + \varepsilon N(t, \omega). \quad (4.77)$$

Notemos que si ε es lo suficientemente chico, entonces como N es esencialmente acotada, existen $\delta, \delta' > 0$ tales que $\delta'|v|^2 \geq v^\top M_\varepsilon(t, \omega)v \geq \delta|v|^2$ p.c.t. (t, ω) y todo $v \in \mathbb{R}^r$. Entonces, definiendo

$$(u, v)_\varepsilon := \mathbb{E} \left[\int_0^T u(t)^\top M_\varepsilon(t) v(t) dt \right], \quad \|u\|_\varepsilon := \sqrt{(u, u)_\varepsilon}, \quad \forall u, v \in (\mathbb{H}^2)^r, \quad (4.78)$$

la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ es equivalente a la norma de L^2 en $(\mathbb{H}^2)^r$ y por lo tanto $((\mathbb{H}^2)^r, \|\cdot\|_\varepsilon)$ es un espacio de Hilbert.

Nota 4.5.1. Si denotamos por $\nabla^\varepsilon J$ al gradiente del funcional J en $((\mathbb{H}^2)^r, \|\cdot\|_\varepsilon)$, obtenemos la siguiente relación

$$\nabla^\varepsilon J(u) = M_\varepsilon^{-1} \nabla J(u) \quad (4.79)$$

donde ∇J es el gradiente de J en $(\mathbb{H}^2)^r$ dotado de la norma de L^2 .

Teorema 4.5.2. El Algoritmo 4.1 coincide con el método de gradiente más proyección para resolver el problema (P) en $((\mathbb{H}^2)^r, \|\cdot\|_\varepsilon)$.

Demostración. Sea $\{u^k\}$ la sucesión generada por el algoritmo. De (4.57) y las hipótesis, omitiendo los argumentos, obtenemos

$$\left(u^k - u^{k-1} + \varepsilon \left(Nu^k + B^\top p^{k-1} + \sum_{j=1}^m B_j^\top q_j^{k-1} \right), v - u^k \right) \geq 0, \quad (4.80)$$

para todo $v \in U_{ad}$, p.c.t. $t \in [0, T]$, \mathbb{P} - c.s. Por lo tanto,

$$\left((I + \varepsilon N)(u^k - u^{k-1}) + \varepsilon(Nu^{k-1} + B^\top p^{k-1} + \sum_{j=1}^m B_j^\top q_j^{k-1}), v - u^k \right) \geq 0, \quad (4.81)$$

y esto es equivalente a

$$(M_\varepsilon (u^k - u^{k-1} + \varepsilon M_\varepsilon^{-1} \nabla J(u^{k-1})), v - u^k) \geq 0. \quad (4.82)$$

De la nota previa y (4.78), la desigualdad (4.82) implica que u^k es el punto que se obtiene del método de gradiente más proyección cuando consideramos $(\mathbb{H}^2)^r$ dotado de la métrica definida por (4.78). \square

Bajo hipótesis adicionales, el método de gradiente más proyección tiene una velocidad de convergencia lineal. En este contexto, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 4.5.3. *Bajo las hipótesis (H1), (H2), (H3)-(b) y (H4), la aplicación $u \in (\mathbb{H}^2)^r \mapsto \nabla J(u) \in (\mathbb{H}^2)^r$ es Lipschitz, cuando $(\mathbb{H}^2)^r$ está dotado con la norma de L^2 .*

Demostración. De [31, Proposición 3.8], (H4) y (4.76) tenemos

$$\nabla J(u) = H_u(y, u, p, q) = Nu + B^\top p + \sum_{j=1}^m B_j^\top q_j, \quad (4.83)$$

en $(\mathbb{H}^2)^r$, donde $u \in \mathcal{U}_{ad}$ e y es el estado asociado a u , dado por (4.1), y (p, q) es el estado adjunto asociado a (y, u) , dado por (4.5). Ahora sean u y u' en \mathcal{U}_{ad} , $y, (p, q)$ e $y', (p', q')$ los estados y estados adjuntos asociados, respectivamente. Definimos $\bar{p} := p - p'$ y $\bar{q} := q - q'$, entonces (\bar{p}, \bar{q}) es solución de la siguiente EDER,

$$\begin{cases} d\bar{p}(t) = - \left[\nabla_y \ell^1(t, y) - \nabla_y \ell^1(t, y') + A(t)^\top \bar{p}(t) + \sum_{j=1}^m A_j(t)^\top \bar{q}_j(t) \right] dt \\ \quad + \bar{q}(t) dW(t), \quad t \in [0, T], \\ \bar{p}(T) = \nabla_y g(y(T)) - \nabla_y g(y'(T)). \end{cases} \quad (4.84)$$

De [89, Capítulo 7, Teorema 2.2], existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\bar{p}(t)|^2 + \int_0^T |\bar{q}(t)|^2 dt \right] &\leq C \mathbb{E} \left[|g_y(y(T)) - g_y(y'(T))|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T |\ell_y^1(t, y) - \ell_y^1(t, y')|^2 dt \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

De (H2)(c)-(d) y el Lema 4.32 podemos concluir que existe una constante positiva, la cual seguimos denotando con C , tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\bar{p}(t)|^2 + \int_0^T |\bar{q}(t)|^2 dt \right] \leq C \|u - u'\|^2. \quad (4.86)$$

Ahora, de las hipótesis (H1)-(c) y (H2)-(c), las funciones N, B y B_j son acotadas p.c.t. (t, ω) . Luego, el resultado se obtiene se combinar (4.86) con (4.83). \square

Podemos entonces demostrar el resultado más importante de esta sección:

Teorema 4.5.4 (Convergencia lineal). *Supongamos que existe $\gamma > 0$ tal que p.c.t. (t, ω) tenemos $v^\top N(t, \omega)v \geq \gamma |v|^2$ para todo $v \in \mathbb{R}^r$. Además, supongamos que valen las hipótesis del Lema 4.5.3 y que $\ell^1(t, \cdot, \omega)$ y $g(\cdot, \omega)$ son convexas p.c.t. (t, ω) . Entonces, J es fuertemente convexa (con respecto a ambas normas), (P) tiene una única solución u^* y para ε*

suficientemente chico, existe $\alpha \in (0, 1)$ y $C > 0$ tales que

$$\|u^k - u^*\| \leq C\alpha^k \|u^0 - u^*\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (4.87)$$

donde $\{u^k\}$ es la sucesión generada por el algoritmo.

Demostración. De nuestras hipótesis se deduce que J es fuertemente convexa en $((\mathbb{H}^2)^r, \|\cdot\|)$, y fácilmente se verifica que J es también fuertemente convexa en $((\mathbb{H}^2)^r, \|\cdot\|_\varepsilon)$ con constante de convexidad $\beta = \gamma/\delta' > 0$, independiente de ε . Por lo tanto, existe una única solución u^* del problema (P).

Como las normas $\|\cdot\|_\varepsilon$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes, de (4.79) y el Lema 4.5.3 podemos deducir que $\nabla^\varepsilon J$ es Lipschitz en $(\mathbb{H}^2)^r$ dotado de la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ y que la constante de Lipschitz L es independiente de ε . Es conocido el hecho de que la velocidad de convergencia para el método de gradiente más proyección es lineal cuando el gradiente es una función Lipschitz, pero por una cuestión de completitud esbozamos la prueba en las siguientes líneas. Del Teorema 4.5.2 sabemos que

$$u^{k+1} = P_{\mathcal{U}_{ad}}^\varepsilon(u^k - \varepsilon \nabla^\varepsilon J(u^k)) \quad (4.88)$$

donde $P_{\mathcal{U}_{ad}}^\varepsilon$ es la función proyección en $((\mathbb{H}^2)^r, \|\cdot\|_\varepsilon)$. De la optimalidad de u^* tenemos $u^* = P_{\mathcal{U}_{ad}}^\varepsilon(u^* - \varepsilon \nabla^\varepsilon J(u^*))$, luego para todo k obtenemos

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - u^*\|_\varepsilon^2 &= \|P_{\mathcal{U}_{ad}}^\varepsilon(u^k - \varepsilon \nabla^\varepsilon J(u^k)) - P_{\mathcal{U}_{ad}}^\varepsilon(u^* - \varepsilon \nabla^\varepsilon J(u^*))\|_\varepsilon^2 \\ &\leq \|u^k - u^* - \varepsilon [\nabla^\varepsilon J(u^k) - \nabla^\varepsilon J(u^*)]\|_\varepsilon^2 \\ &= \|u^k - u^*\|_\varepsilon^2 - 2\varepsilon (u^k - u^*, \nabla^\varepsilon J(u^k) - \nabla^\varepsilon J(u^*))_\varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^2 \|\nabla^\varepsilon J(u^k) - \nabla^\varepsilon J(u^*)\|_\varepsilon^2 \\ &\leq (1 - 2\varepsilon\beta + \varepsilon^2 L^2) \|u^k - u^*\|_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Si $\varepsilon < 2\beta/L^2$ tenemos $1 - 2\varepsilon\beta + \varepsilon^2 L^2 < 1$. Nuevamente, de la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_\varepsilon$ y $\|\cdot\|$ se deduce (4.87). \square

Capítulo 5

Discretización en tiempo de un problema de control óptimo estocástico

En este capítulo estudiaremos la discretización en tiempo de un problema de control óptimo estocástico el cual es similar, o un caso particular, del que presentamos en el Capítulo 4. El objetivo será demostrar, bajo hipótesis generales, la convergencia de las funciones valor, asociadas a los problemas en tiempo discreto, a la función valor del problema original. Además, demostraremos que cualquier sucesión de soluciones óptimas de los problemas discretos es una sucesión minimizante del problema continuo. Probaremos que el PPD es válido en este contexto y como consecuencia, la sucesión minimizante puede ser tomada como una sucesión de controles en retroalimentación (o *feedback*) en tiempo discreto. Además, bajo hipótesis de convexidad veremos que los puntos de acumulación de dicha sucesión son controles óptimos para el problema continuo.

5.1. Introducción

Tal como mencionamos en el Capítulo 1, el estudio del caso discreto en tiempo proviene de diferentes objetivos. Alguno de ellos son, por ejemplo, demostrar la existencia de controles óptimos para el caso continuo, como límite de controles óptimos discretos (ver [39] y

[57]) o la obtención del PPD para el problema continuo como consecuencia de esta propiedad para el caso discreto (ver [56] y [69]). Notamos que, a diferencia de nuestro enfoque, en [56, 54] y [69], dado un control discreto en tiempo (extendiéndolo a todo el intervalo como una función seccionalmente constante) el estado asociado se lo obtiene como solución de la EDE en tiempo continuo, es decir, no se considera al estado discretizado. Finalmente, los problemas discretos en tiempo aparecen naturalmente como un primer paso para obtener aproximaciones numéricas de los problemas de control óptimo continuos, el segundo paso sería considerar una discretización en el espacio de estados (ver [57]) o utilizar métodos de resolución de tipo Monte Carlo.

Esta última motivación es la que inspiró este capítulo. Como dijimos en el capítulo anterior, el algoritmo presentado no resulta implementable, es por eso que como una primera instancia, estudiaremos problemas discretos en tiempo que aproximen de cierto modo al problema continuo y veremos que podemos extender dicho algoritmo para estos problemas discretos. En particular en este capítulo nos focalizamos en estudiar la relación entre los problemas continuo y discreto.

En este capítulo mostraremos que vale el PPD para el caso discreto. Gracias a las hipótesis que realizamos sobre los coeficientes involucrados y el espacio de controles admisibles, podremos proceder como en [32], evitando cuestiones delicadas de medibilidad como las que aparecen en [21]. Aunque consideraremos controles adaptados a la filtración generada por el movimiento browniano, como consecuencia del PPD veremos que existen controles óptimos feedback. Esta importante propiedad para el caso discreto, está en contraste con lo que ocurre en el caso continuo, donde sólo en casos especiales se puede asegurar la existencia de controles óptimos feedback (ver [89, Capítulo 5, Sección 6] y Nota 5.4.9)).

Estudiamos además varias propiedades de las funciones valor discretas V^h , que son análogas a las del caso continuo, como por ejemplo continuidad Lipschitz y semiconcavidad con respecto a la variable de estado en conjuntos acotados. Si a las funciones V^h las extendemos por interpolación lineal a todo el intervalo $[0, T]$, resultan Hölder continuas en tiempo, en conjuntos acotados de la variable de estado. Utilizando un resultado de aproximación de Krylov (ver [56]), probaremos de manera directa la convergencia local

uniforme de V^h a V , la función valor del problema continuo. Como nuestras hipótesis son bastante generales, este resultado de convergencia es más general que lo probado en [45, Capítulo 9] o [39].

Probablemente, la convergencia de las funciones valor se pueda probar por métodos analíticos basados en la teoría de soluciones de viscosidad (ver [12] y [45, Capítulo 9]), sin embargo nuestro enfoque directo nos permite probar que los controles óptimos (o ε - óptimos) discretos forman una sucesión minimizante para el problema continuo. En particular, siempre existe una sucesión minimizante de controles óptimos discretos feedback. Además bajo hipótesis de convexidad (fuerte) demostramos la convergencia débil (fuerte) de las soluciones óptimas discretas a soluciones óptimas del problema continuo. Finalmente, en este marco general no estudiamos errores de estimación para la función valor y referimos a los trabajos [54] y [55] en donde, bajo hipótesis adicionales, se trata este problema.

5.2. Preliminares

Comenzamos presentando el problema en tiempo continuo que nos interesa aproximar.

5.2.1. Problema en tiempo continuo

Similar a lo expuesto en el capítulo anterior, consideramos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado donde un movimiento browniano estándar m -dimensional $W(\cdot)$ está definido. Suponemos que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ ($T > 0$) es la filtración natural, aumentada por todos los conjuntos \mathbb{P} -nulos en \mathcal{F} , asociada a $W(\cdot)$.

Consideramos la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dy(t) = f(t, y(t), u(t))dt + \sigma(t, y(t), u(t))dW(t) & t \in [0, T], \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ son funciones dadas. En la notación anterior, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la función de estado y $u(t) \in \mathbb{R}^r$ el control. Definimos el funcional de costo

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \ell(t, y(t), u(t))dt + g(y(T)) \right], \quad (5.2)$$

donde $\ell : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas. Definiciones más precisas sobre las mismas y los espacios de estados y controles se darán en las próximas secciones.

Sea U_{ad} un subconjunto de \mathbb{R}^r , no vacío y cerrado. El conjunto de controles admisibles será

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in (\mathbb{H}^2)^r; u(t, \omega) \in U_{ad}, \text{ p.c.t. } (t, \omega) \in (0, T) \times \Omega\}. \quad (5.3)$$

El problema de control óptimo que consideraremos es

$$\text{Min } J(u) \text{ sujeto a } u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (P)$$

Notemos que, la diferencia con respecto al problema abordado en el capítulo anterior es que las funciones involucradas en el costo y la dinámica son deterministas y el conjunto U_{ad} no es necesariamente convexo.

5.2.2. Problema en tiempo discreto

Introducimos ahora una discretización en tiempo de (P). Dado $N \in \mathbb{N}$ definimos $h := T/N$. Tomamos $t_k = kh$ ($k = 0, \dots, N$) y consideramos la sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en \mathbb{R}^m , definidas como $\Delta W_{j+1} = W(t_{j+1}) - W(t_j)$, para $j = 0, \dots, N-1$ y $\Delta W_0 = 0$ c.s. Entonces resulta $\mathbb{E}(\Delta W_k) = 0$ y $\mathbb{E}(\Delta W_k^i \Delta W_k^j) = h\delta_{ij}$ (donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ en otro caso). Consideramos la filtración en tiempo discreto $\mathbb{F}^h = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ definida por

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_k = \sigma(\Delta W_{k'}; 0 \leq k' \leq k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Por simplicidad, notamos $\mathbb{E}_k(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_k)$. Escribimos $L_{\mathcal{F}_k}^2 := L^2(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$ y definimos $\mathcal{U}^h := \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^2$, al cual dotamos de la norma $\|u\|_{\mathcal{U}^h}^2 := h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}|u_k|^2$.

Consideramos la siguiente discretización de la ecuación de estado, dada por un esquema explícito de Euler:

$$\begin{cases} y_k &= y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}) + \sigma(t_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1})\Delta W_k, & k = 1, \dots, N, \\ y_0 &= x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5.5)$$

La función de costo discreta $J^h : \mathcal{U}^h \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$J^h(u) := \mathbb{E} \left[h \sum_{k=0}^{N-1} \ell(t_k, y_k, u_k) + g(y_N) \right], \quad (5.6)$$

donde $y = (y_0, \dots, y_N)$ es la solución de (5.5). Finalmente, consideramos el conjunto de controles admisibles como

$$\mathcal{U}_{ad}^h := \{u \in \mathcal{U}^h; u_k \in U_{ad} \text{ } \mathbb{P}\text{-c.s., } \forall k = 0, \dots, N-1\}. \quad (5.7)$$

Entonces, el problema de control óptimo en tiempo discreto que consideramos es

$$\text{Min } J^h(u) \text{ sujeto a } u \in \mathcal{U}_{ad}^h. \quad (P^h)$$

5.2.3. Hipótesis generales

Presentamos las hipótesis que consideraremos a lo largo del capítulo.

(H1) Hipótesis sobre la dinámica:

- a) Las funciones $\varphi = f, \sigma$ son $\mathcal{B}([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ -medibles.
- b) Para casi todo $t \in [0, T]$ la aplicación $(y, u) \mapsto \varphi(t, y, u)$ es C^1 y existe una constante $L > 0$ tal que para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U_{ad}$ se tiene

$$\begin{cases} |\varphi(t, y, u)| \leq L[|y| + |u| + 1], \\ |\varphi_y(t, y, u)| + |\varphi_u(t, y, u)| \leq L, \end{cases} \quad (5.8)$$

donde $\varphi_y(t, y, u) := D_y \varphi(t, y, u)$ y $\varphi_u(t, y, u) := D_u \varphi(t, y, u)$.

- c) Existe un módulo de continuidad creciente $\bar{\omega} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tal que para $\varphi = f, \sigma$, y para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in U_{ad}$, $s, t \in [0, T]$ se tiene

$$|\varphi(s, y, u) - \varphi(t, y, u)| \leq \bar{\omega}(|s - t|). \quad (5.9)$$

(H2) Hipótesis sobre el costo:

- a) Las funciones ℓ y g son respectivamente $\mathcal{B}([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ medibles.
- b) Para casi todo $t \in [0, T]$ la aplicación $(y, u) \mapsto \ell(t, y, u)$ es C^1 , y existe $L > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U_{ad}$,

$$\begin{cases} |\ell(t, y, u)| \leq L[|y| + |u| + 1]^2, \\ |\ell_y(t, y, u)| + |\ell_u(t, y, u)| \leq L[|y| + |u| + 1], \end{cases} \quad (5.10)$$

donde $\ell_y(t, y, u) := D_y \ell(t, y, u)$ y $\ell_u(t, y, u) := D_u \ell(t, y, u)$.

- c) Existe un módulo de continuidad creciente $\bar{\omega} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in U_{ad}$, $s, t \in [0, T]$ se tiene

$$|\ell(s, y, u) - \ell(t, y, u)| \leq \bar{\omega}(|s - t|). \quad (5.11)$$

- d) La aplicación $y \mapsto g(y)$ es C^1 y existe $L > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} |g(y)| \leq L[|y| + 1]^2, \\ |\nabla g(y)| \leq L[|y| + 1]. \end{cases} \quad (5.12)$$

Nota 5.2.1. De **(H1)** y de la Proposición 1.1.7 se deduce que para cada $u \in \mathcal{U}_{ad}$ la ecuación de estado (5.1) admite una única solución fuerte.

Observemos que a diferencia del capítulo anterior, en esta formulación los coeficientes involucrados en la ecuación de estado no son aleatorios. Es necesario considerar coeficientes deterministas para que el estado discreto sea adaptado a la filtración discreta \mathbb{F}^h .

5.3. Estimaciones del estado para el caso continuo y discreto

Como hicimos en los capítulos anteriores, fijado $h = T/N$ con $N \in \mathbb{N}$, a todo control discreto $u^h = (u_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ lo podemos pensar como un control admisible para el caso continuo, si lo definimos seccionalmente constante sobre cada intervalo $[t_k, t_{k+1})$. Teniendo en cuenta la definición de la filtración discreta, es claro que si u^h es adaptado a la filtración \mathbb{F}^h también será adaptado a la filtración \mathbb{F} . En esta sección estudiaremos la relación que existe entre el estado discreto y el estado continuo asociados a un mismo control u^h . Comenzaremos presentando algunas estimaciones sobre los estados discretos. Definimos $y^h = (y_k)_{k=0}^N$, como el estado discreto asociado a u^h , mediante (5.5).

Lema 5.3.1. Supongamos que vale **(H1)**. Entonces, existe $C > 0$ tal que para todo $u^h \in \mathcal{U}^h$, siendo $y^h = (y_k)_{k=0}^N$ el estado discreto asociado, se tiene

$$\mathbb{E} \left[\max_{k=0, \dots, N} |y_k|^2 \right] \leq C [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1]. \quad (5.13)$$

Demostración. Para todo $k = 1, \dots, N$ tenemos

$$y_k = x + h \sum_{j=0}^{k-1} f(t_j, y_j, u_j) + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, y_j, u_j) \Delta W_{j+1}. \quad (5.14)$$

Luego, de **(H1)**-(b) deducimos que existe $C_0 > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} |y_k|^2 &\leq 3 \left[|x|^2 + Nh^2 \sum_{j=0}^{k-1} |f(t_j, y_j, u_j)|^2 + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, y_j, u_j) \Delta W_{j+1} \right)^2 \right] \\ &\leq C_0 \left[|x|^2 + h \sum_{j=0}^{k-1} [|y_j|^2 + |u_j|^2 + 1] + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, y_j, u_j) \Delta W_{j+1} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

De la linealidad de la esperanza y la desigualdad del máximo de Doob (ver [51, Capítulo 2, Teorema 6.10]), se tiene que

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq i \leq k} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \sigma(t_j, y_j, u_j) \Delta W_{j+1} \right)^2 \right] \leq 4 \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} [|\sigma(t_j, y_j, u_j) \Delta W_{j+1}|^2], \quad (5.16)$$

y de la isometría de Itô se deduce

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} [|\sigma(t_j, y_j, u_j) \Delta W_{j+1}|^2] = h \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} [|\sigma(t_j, y_j, u_j)|^2]. \quad (5.17)$$

Finalmente de **(H1)**-(b) existe $C_1 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq i \leq k} |y_i|^2 \right] \leq C_1 \left[|x|^2 + h \sum_{j=0}^{k-1} \left[\mathbb{E} [\max_{0 \leq i \leq j} |y_i|^2] + \mathbb{E} [|u_j|^2] + 1 \right] \right]. \quad (5.18)$$

El resultado entonces se deduce de aplicar el Lema de Grönwall's discreto [40]. \square

Dado $u^h \in \mathcal{U}^h$, sea $u_c^h \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)^r$ definido como $u_c^h(t) := u_k$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ y sea y el estado continuo asociado, i.e., la única solución de la siguiente EDE

$$\begin{cases} dy(t) = f(t, y(t), u_c^h(t))dt + \sigma(t, y(t), u_c^h(t))dW(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (5.19)$$

Ahora analizamos la relación que existe entre los estados continuo y discreto $y(\cdot)$ e $y^h = (y_k)_{k=0}^N$ asociados a u_c^h y u^h , respectivamente. Antes de enunciar el próximo resultado notemos que

$$\begin{aligned} \|u_c^h\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}^2 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T |u_c^h(t)|^2 dt \right] \\ &= h \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E} [|u_j|^2] \\ &= \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Lema 5.3.2. *Supongamos que vale (H1). Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\max_{k=0,\dots,N} \mathbb{E} [|y(t_k) - y_k|^2] \leq Ch [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + C\bar{\omega}^2(h), \quad (5.21)$$

para todo $k = 0, \dots, N$.

Demostración. Para todo $k = 0, \dots, N - 1$ definimos $\Delta y_k := y(t_k) - y_k$,

$$\Delta f_k(t) := f(t, y(t), u_k) - f(t_k, y_k, u_k) \quad \text{y} \quad \Delta \sigma_k(t) := \sigma(t, y(t), u_k) - \sigma(t_k, y_k, u_k). \quad (5.22)$$

Tenemos,

$$\Delta y_{k+1} = \Delta y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \sigma_k(t) dW(t). \quad (5.23)$$

Por lo tanto, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la isometría de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta y_{k+1}|^2] &\leq \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \sigma_k(t) dW(t) \right|^2 \right] \\ &\quad + 2 \left(\mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \left(\mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \sigma_k(t) dW(t) \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Aplicando la desigualdad de Young en los últimos dos términos, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta y_{k+1}|^2] &\leq [1 + h] \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + [1 + \frac{2}{h}] \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt \right|^2 \right] \\ &\quad + [1 + h] \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \sigma_k(t) dW(t) \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ahora estudiamos por separado los términos cuadráticos de (5.25). De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la hipótesis (H1), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt \right|^2 \right] &\leq h \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\Delta f_k(t)|^2 dt \right] \\ &\leq 2h \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t, y(t), u_k) - f(t, y_k, u_k)|^2 dt \\ &\quad + 2h \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t, y_k, u_k) - f(t_k, y_k, u_k)|^2 dt \\ &\leq 2h \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} L^2 \mathbb{E} |y(t) - y_k|^2 dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{\omega}^2(|t - t_k|) dt \right] \\ &\leq 2hL^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E} |y(t) - y_k|^2 dt + 2h^2 \bar{\omega}^2(h). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para poder estimar el último término en (5.26), notemos que para todo $t_k \leq t < t_{k+1}$ obtenemos

$$y(t) - y_k = \Delta y_k + \int_{t_k}^t f(s, y(s), u(s)) ds + \int_{t_k}^t \sigma(s, y(s), u(s)) dW(s). \quad (5.27)$$

Luego, de **(H1)**, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la isometría de Itô podemos deducir que existe $C_0 > 0$ tal que para todo $t_k \leq t < t_{k+1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|y(t) - y_k|^2] &\leq C_0 \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + C_0 h \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} L^2 [|y(t)|^2 + |u_k|^2 + 1] dt \right] \\ &\quad + C_0 \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} L^2 [|y(t)|^2 + |u_k|^2 + 1] dt \right] \\ &\leq C_0 \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + C_0 h [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + \mathbb{E}|u_k|^2 + 1], \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde la última desigualdad sigue de la Proposición 1.1.7. Por lo tanto, de (5.26) y (5.28), existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que,

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta f_k(t) dt \right|^2 \right] \leq C_1 h^2 \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + C_2 h^3 [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + \mathbb{E}|u_k|^2 + 1] + 2h^2 \bar{\omega}^2(h). \quad (5.29)$$

De la isometría de Itô y (5.28) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \sigma_k(t) dW(t) \right]^2 &= \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\Delta \sigma_k(t)|^2 dt \\ &\leq 2 \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L^2 |y(t) - y_k|^2 + \bar{\omega}^2(|t - t_k|) dt \\ &\leq C_3 h \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + C_4 h^2 [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + \mathbb{E}|u_k|^2 + 1] + 2h \bar{\omega}^2(h), \end{aligned} \quad (5.30)$$

para ciertas constantes positivas C_3 y C_4 .

Combinando (5.25), (5.29) y (5.30) podemos concluir que existen $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ y $C_7 > 0$ tales que

$$\mathbb{E} [|\Delta y_{k+1}|^2] \leq [1 + C_5 h] \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2] + C_6 h^2 [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + \mathbb{E}|u_k|^2 + 1] + C_7 h \bar{\omega}^2(h). \quad (5.31)$$

Finalmente, deducimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta y_{k+1}|^2] &\leq [1 + C_5 h]^k \mathbb{E} [|\Delta y_0|^2] + \sum_{j=0}^{k-1} [1 + C_5 h]^j C_6 h^2 [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + \mathbb{E}|u_k|^2 + 1] \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} [1 + C_5 h]^j C_7 h \bar{\omega}^2(h) \\ &\leq e^{C_5 T} C_6 h [T|x|^2 + 2\|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + T] + e^{C_5 T} C_7 T \bar{\omega}^2(h) \\ &\leq Ch [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + C \bar{\omega}^2(h), \end{aligned} \quad (5.32)$$

para una adecuada constante $C > 0$. □

Corolario 5.3.3. *Supongamos que se verifica (H1) y al menos una de las siguientes hipótesis se satisface: (a) para todo $(y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ y casi todo $t \in [0, T]$ tenemos $\sigma_u(t, y, u) \equiv 0$; (b) el conjunto U_{ad} es compacto. Entonces, existe $C > 0$ tal que para todo $k = 0, \dots, N-1$,*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |y(t) - y_k|^2 \right] \leq Ch [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + C\bar{\omega}^2(h). \quad (5.33)$$

Demostración. Para todo $t_k \leq t < t_{k+1}$, tenemos

$$y(t) - y_k = [y(t_k) - y_k] + \int_{t_k}^t f(s, y(s), u_k) ds + \int_{t_k}^t \sigma(s, y(s), u_k) dW(s). \quad (5.34)$$

Luego, de la desigualdad del máximo de Doob y la isometría de Itô, existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |y(t) - y_k|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E} [|y(t_k) - y_k|^2] + 4h\mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(s, y(s), u_k)|^2 ds \right] \\ &\quad + 4K\mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sigma(s, y(s), u_k)|^2 ds \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

De (H1) y la Proposición 1.1.7, deducimos que existe $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(s, y(s), u_k)|^2 ds &\leq 3L^2 h \mathbb{E} \left[\sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} |y(s)|^2 + |u_k|^2 + 1 \right] \\ &\leq C_0 [h [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + h]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Por un lado, si vale (a), existe $C_1 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sigma(s, y(s), u_k)|^2 ds \leq C_1 h [[|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + 1], \quad (5.37)$$

luego del lema anterior, tenemos

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |y(t) - y_k|^2 \right] \leq Ch [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + C\bar{\omega}^2(h), \quad (5.38)$$

para cierta constante $C > 0$. Por otro lado, si se satisface (b), entonces existe $M_U > 0$ tal que $|u| \leq M_U$ para todo $u \in U_{ad}$. Luego, existe $C_2 > 0$ tal que,

$$\mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sigma(s, y(s), u_k)|^2 ds \leq C_2 h [[|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + M_U^2 + 1]. \quad (5.39)$$

Entonces, del lema previo obtenemos la existencia de $C > 0$ de modo que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |y(t) - y_k|^2 \right] \leq Ch [|x|^2 + \|u^h\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] + C\bar{\omega}^2(h). \quad (5.40)$$

□

5.4. Principio de la Programación Dinámica para el problema en tiempo discreto

El objetivo de esta sección es demostrar el PPD para el problema (P^h) parametrizado por el tiempo discreto inicial y el estado inicial. Más allá de la importancia intrínseca del mismo, el PPD nos permite demostrar la existencia de controles óptimos feedback y además nos ayudará a demostrar la convergencia de las funciones valor discretas a la continua, como veremos en la Sección 5.6.

A lo largo de esta sección consideramos $h = T/N$ fijo y asumimos que el conjunto U_{ad} es compacto. Como el problema (P^h) estará parametrizado por el tiempo inicial y el estado inicial, será necesario definir nuevas filtraciones y espacios de controles admisibles. Para cada $k = 0, \dots, N$ consideramos la filtración compuesta por las siguientes σ -álgebras.

$$\mathcal{F}_k^k = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_j^k = \sigma(\Delta W_{k'}; k+1 \leq k' \leq j), \quad \forall j \in \{k+1, \dots, N\}. \quad (5.41)$$

Para $k = 0, \dots, N-1$, el conjunto de controles admisibles es

$$\mathcal{U}_k^h := \{u = (u_k, \dots, u_{N-1}) \in \Pi_{j=k}^{N-1} L_{\mathcal{F}_j^k}^2 : u_j(\omega) \in U_{ad} \quad \mathbb{P} - \text{c.s.}, j = k, \dots, N-1\}. \quad (5.42)$$

Dado $u \in \mathcal{U}_k^h$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $k = 0, \dots, N-1$, definimos de manera recursiva el estado $y_j^{k,x,u}$, $j = k, \dots, N$, asociado a u , x y k como

$$\begin{cases} y_{j+1}^{k,x,u} &= y_j^{k,x,u} + hf(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + \sigma(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) \Delta W_{j+1}, \quad j = k, \dots, N-1, \\ y_k^{k,x,u} &= x. \end{cases} \quad (5.43)$$

En particular, tenemos que $y_j^{k,x,u} \in L_{\mathcal{F}_j^k}^2$, para todo $j = k, \dots, N$. Se puede probar fácilmente que las estimaciones que presentamos para el estado en la sección anterior, siguen siendo válidas si consideramos el estado comenzando en el tiempo t_k .

Finalmente, a cada $u \in \mathcal{U}_k^h$ asociamos el funcional de costo que se define como,

$$J_k^h(x, u) := \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right]. \quad (5.44)$$

La *función valor* está definida sobre \mathbb{R}^n como

$$V^N(x) := g(x), \quad \text{y} \quad V^k(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}_k^h} J_k^h(x, u) \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1. \quad (5.45)$$

Nuestro objetivo es demostrar el PPD para V^k , i.e.,

$$V^k(x) = \inf_{u \in U_{ad}} \left\{ h\ell(t_k, x, u) + \mathbb{E} \left[V^{k+1}(x + hf(t_k, x, u) + \sigma(t_k, x, u)\Delta W_{k+1}) \right] \right\}, \quad (5.46)$$

para todo $k = 0, \dots, N - 1$.

5.4.1. Estimaciones preliminares

Para alcanzar nuestro objetivo, serán necesarios algunos resultados preliminares sobre el estado y el funcional de costo.

Lema 5.4.1. *Asumimos que vale (H1). Entonces, para todo $p \geq 2$, existe $C_p > 0$, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N - 1$ y $u \in \mathcal{U}_k^h$, se tiene*

$$\mathbb{E} \left[\max_{j=k, \dots, N} \left| y_j^{k,x,u} - y_j^{k,y,u} \right|^p \right] \leq C_p |x - y|^p. \quad (5.47)$$

Demostración. Para que la notación resulte más clara, omitiremos los supraíndices k y u en los estados. Denotamos $\Delta y_j = y_j^x - y_j^y$, y $\Delta \varphi_j = \varphi(t_j, y_j^x, u_j) - \varphi(t_j, y_j^y, u_j)$ para $\varphi = f, \sigma$. Luego, obtenemos para $i = k, \dots, N - 1$,

$$\Delta y_{i+1} = x - y + \sum_{j=k}^i h \Delta f_j + \sum_{j=k}^i \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1}. \quad (5.48)$$

De la convexidad de la aplicación $s \mapsto s^p$ para $p \geq 1$, tenemos

$$|\Delta y_{i+1}|^p \leq 3^{p-1} \left[|x - y|^p + \left| \sum_{j=k}^i h \Delta f_j \right|^p + \left| \sum_{j=k}^i \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1} \right|^p \right]. \quad (5.49)$$

De (H1) deducimos

$$\left| \sum_{j=k}^i h \Delta f_j \right|^p \leq N^{p-1} h^p \sum_{j=k}^i |\Delta f_j|^p \leq T^{p-1} h L^p \sum_{j=k}^i |\Delta y_j|^p. \quad (5.50)$$

Ahora, de (H1) y la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy [36], existe K_p tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{k \leq m \leq i} \left| \sum_{j=k}^m \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1} \right|^p \right] &\leq K_p \mathbb{E} \left[\left[h \sum_{j=k}^i |\Delta \sigma_j|^2 \right]^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq K_p N^{\frac{p}{2}-1} h^{\frac{p}{2}} \sum_{j=k}^i \mathbb{E} [|\Delta \sigma_j|^p] \\ &\leq K_p T^{\frac{p}{2}-1} h L^p \sum_{j=k}^i \mathbb{E} [|\Delta y_j|^p]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Combinando (5.49), (5.50) y (5.51), existe c_p tal que

$$\mathbb{E} \left[\max_{k \leq m \leq i+1} |\Delta y_m|^p \right] \leq c_p |x - y|^p + c_p h \sum_{j=k}^i \mathbb{E} \left[\max_{k \leq m \leq j} |\Delta y_m|^p \right]. \quad (5.52)$$

Luego, el resultado sigue de aplicar el Lema de Grönwall's discreto. \square

Ahora probaremos que la función valor discreta es Lipschitz continua con respecto a la variable de estado, sobre conjuntos acotados.

Lema 5.4.2. *Supongamos que (H1) y (H2) son ciertas. Entonces, existe una constante $C > 0$ (independiente de h), tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, y para todo $u \in \mathcal{U}_k^h$, se tiene*

$$|J_k^h(x, u) - J_k^h(y, u)| \leq C [|x| + |y| + 1] |x - y|, \quad \forall k = 0, \dots, N-1. \quad (5.53)$$

Como consecuencia,

$$|V^k(x) - V^k(y)| \leq C [|x| + |y| + 1] |x - y| \quad \forall k = 0, \dots, N. \quad (5.54)$$

Demostración. Utilizando la misma notación que en el lema previo, para k fijo y $u \in \mathcal{U}_k^h$ tenemos

$$|J_k^h(x, u) - J_k^h(y, u)| \leq \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} |\ell(t_j, y_j^x, u_j) - \ell(t_j, y_j^y, u_j)| + |g(y_N^x) - g(y_N^y)| \right]. \quad (5.55)$$

De (H2), para todo $k \leq j \leq N-1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\ell(t_j, y_j^x, u_j) - \ell(t_j, y_j^y, u_j)|] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\ell_y(t_j, y_j^x + s(y_j^y - y_j^x), u_j)(y_j^y - y_j^x)| ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 [L(1 + |y_j^x| + s|y_j^y - y_j^x| + |u_j|)|y_j^y - y_j^x|] ds \right] \\ &\leq L \mathbb{E} [|y_j^y - y_j^x| + |y_j^x| |y_j^y - y_j^x| + |y_j^y - y_j^x|^2 \\ &\quad + |u_j| |y_j^y - y_j^x|]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Como el conjunto U_{ad} es compacto, el mismo está acotado por cierta constante positiva M_U , luego, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Lema 5.3.1 y el Lema 5.4.1 existe

$C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|y_j^y - y_j^x|] &\leq (\mathbb{E}[|y_j^y - y_j^x|^2])^{\frac{1}{2}} \leq C_0 |x - y| \\
\mathbb{E} [|y_j^x| |y_j^y - y_j^x|] &\leq (\mathbb{E}[|y_j^x|^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[|y_j^y - y_j^x|^2])^{\frac{1}{2}} \leq C_0 [|x|^2 + TM_U^2 + 1]^{\frac{1}{2}} |x - y| \\
\mathbb{E} [|u_j| |y_j^y - y_j^x|] &\leq (\mathbb{E}[|u_j|^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[|y_j^y - y_j^x|^2])^{\frac{1}{2}} \leq C_0 M_U |x - y| \\
\mathbb{E} [|y_j^y - y_j^x|^2] &\leq C_0 |x - y|^2 \leq C_0 [|x| + |y|] |x - y|.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Podemos concluir que existe $C_1 > 0$ tal que,

$$\mathbb{E} [|\ell(t_j, y_j^x, u_j) - \ell(t_j, y_j^y, u_j)|] \leq C_1 [|x| + |y| + 1] |x - y|. \tag{5.58}$$

Análogamente deducimos que

$$\mathbb{E} [|g(y_N^x) - g(y_N^y)|] \leq C_1 [|x| + |y| + 1] |x - y|. \tag{5.59}$$

Como C_1 en (5.58) no depende de j , concluimos que

$$|J_k^h(x, u) - J_k^h(y, u)| \leq (T + 1)C_1 [|x| + |y| + 1] |x - y|, \tag{5.60}$$

y por lo tanto se verifica (5.53).

Como el conjunto \mathcal{U}_k^h es acotado, y la constante obtenida C_1 es independiente de $u \in \mathcal{U}_k^h$, la relación (5.54) se deduce fácilmente de la desigualdad

$$|V^k(x) - V^k(y)| \leq \sup_{u \in \mathcal{U}_k^h} |J_k^h(x, u) - J_k^h(y, u)|. \tag{5.61}$$

□

5.4.2. Principio de la Programación Dinámica

Presentamos finalmente la demostración del PPD para este caso discreto. Para ello, comenzamos introduciendo la siguiente función auxiliar. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\begin{aligned}
S^k(x) &:= \inf_{u \in U_{ad}} \left\{ h\ell(t_k, x, u) + \mathbb{E} \left[V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,u}) \right] \right\}, \quad \forall k = 0, \dots, N-1, \\
S^N(x) &:= g(x),
\end{aligned} \tag{5.62}$$

donde,

$$y_{k+1}^{k,x,u} = x + hf(t_k, x, u) + \sigma(t_k, x, u)\Delta W_{k+1}, \tag{5.63}$$

para $k = 0, \dots, N-1$.

Lema 5.4.3. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), existe $C > 0$ (independiente de h), tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $k = 0, \dots, N - 1$, se tiene*

$$|S^k(x) - S^k(y)| \leq C [|x| + |y| + 1] |x - y|. \quad (5.64)$$

Demostración. De la definición de S^k y el lema previo, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |S^k(x) - S^k(y)| &\leq \sup_{u \in U_{ad}} \left\{ h |\ell(t_k, x, u) - \ell(t_k, y, u)| + \mathbb{E} \left[|V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,u}) - V^{k+1}(y_{k+1}^{k,y,u})| \right] \right\} \\ &\leq hC_0 [|x| + |y| + 1] |x - y| + \mathbb{E} \left[C_0 [|y_{k+1}^{k,x,u}| + |y_{k+1}^{k,y,u}| + 1] |y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,y,u}| \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[[|y_{k+1}^{k,x,u}| + |y_{k+1}^{k,y,u}| + 1] |y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,y,u}| \right] \\ \leq \left(\mathbb{E} [|y_{k+1}^{k,x,u}| + |y_{k+1}^{k,y,u}| + 1]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} |y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,y,u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Del Lema 5.3.1 y el Lema 5.4.1 concluimos que existe $C_1 > 0$ independiente de $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$, ya que U_{ad} es acotado, tal que

$$\left(\mathbb{E} [|y_{k+1}^{k,x,u}| + |y_{k+1}^{k,y,u}| + 1]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} |y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,y,u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 [|x| + |y| + 1] |x - y|. \quad (5.67)$$

Combinando (5.65) y (5.67), deducimos que vale (5.64). \square

Lema 5.4.4. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $k = 0, \dots, N$, la aplicación $u \in \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{E}[V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,u})]$ es Lipschitz continua. Como consecuencia, $S^k(x) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $u, v \in \mathbb{R}^r$, de (H1) y la isometría de Itô, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,x,v}|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[|h(f(t_k, x, u) - f(t_k, x, v)) + (\sigma(t_k, x, u) - \sigma(t_k, x, v)) \Delta W_{k+1}|^2 \right] \\ &\leq 2h^2 \mathbb{E} [|f(t_k, x, u) - f(t_k, x, v)|^2] + 2h \mathbb{E} [|\sigma(t_k, x, u) - \sigma(t_k, x, v)|^2] \\ &\leq 2h^2 L^2 |u - v|^2 + 2hL^2 |u - v|^2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Luego, utilizando los mismos argumentos de la prueba del lema anterior, del Lema 5.3.1, Lema 5.4.2 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, existe $C_0 > 0$ y $C > 0$ tales que,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,u}) - V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,v})] \right| &\leq \mathbb{E} \left[|C_0[|y_{k+1}^{k,x,u}| + |y_{k+1}^{k,x,v}|] + 1| |y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,x,v}| \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}[|C_0[|y_{k+1}^{k,x,u}| + |y_{k+1}^{k,x,v}|] + 1|^2] \mathbb{E}[|y_{k+1}^{k,x,u} - y_{k+1}^{k,x,v}|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C[|x| + 1] |u - v|. \end{aligned} \tag{5.69}$$

De (5.69) y **(H2)**, concluimos que la aplicación $u \mapsto \mathbb{E}[V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,u})]$ es Lipschitz continua, y por lo tanto $S^k(x)$ es finito. \square

Ahora probaremos el PPD. Como la función V^k es continua, podemos probar el resultado de manera directa, siguiendo las ideas de [32], sin necesidad de enmarcar nuestro problema en el caso general de [21].

Teorema 5.4.5 (PPD). *Bajo las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos*

$$V^k(x) = S^k(x) \quad \forall k = 0, \dots, N. \tag{5.70}$$

Demostración. Empezamos probando que $V^k(x) \geq S^k(x)$. Sea $u = (u_k, \dots, u_{N-1})$ un elemento de \mathcal{U}_k^h . De la definición del conjunto \mathcal{U}_k^h , podemos escribir a u_j para $j \in \{k+1, \dots, N-1\}$, como una función medible de los incrementos del movimiento browniano, i.e. $u_j(\Delta W_{k+1}, \dots, \Delta W_j)$. Para $\Delta\omega_{k+1} \in \mathbb{R}^m$ fijo y $j = k+1, \dots, N-1$, definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \hat{u}_j(\Delta\omega_{k+1}) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^r \\ \omega &\mapsto u_j(\Delta\omega_{k+1}, \Delta W_{k+2}(\omega), \dots, \Delta W_j(\omega)). \end{aligned} \tag{5.71}$$

Definiendo $\hat{u}(\Delta\omega_{k+1}) = (\hat{u}_{k+1}(\Delta\omega_{k+1}), \dots, \hat{u}_{N-1}(\Delta\omega_{k+1}))$, obtenemos $\hat{u}(\Delta\omega_{k+1}) \in \mathcal{U}_{k+1}^h$.

Luego, podemos definir

$$\hat{y}_{k+1}(\Delta\omega_{k+1}) := x + hf(t_k, x, u_k) + \sigma(t_k, x, u_k)\Delta\omega_{k+1}, \tag{5.72}$$

de manera determinista y para $j = k+2, \dots, N$, definimos

$$\begin{aligned} \hat{y}_j(\Delta\omega_{k+1}) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\mapsto y_j^{k+1, \hat{y}_{k+1}(\Delta\omega_{k+1}), \hat{u}(\Delta\omega_{k+1})(\omega)}(\omega). \end{aligned} \tag{5.73}$$

De la independencia de los incrementos del movimiento browniano, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right] = \\ \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-1} \ell(t_j, \hat{y}_j(\Delta\omega_{k+1}), \hat{u}_j(\Delta\omega_{k+1})) + g(\hat{y}_N(\Delta\omega_{k+1})) \right] d\mathbb{P}_{\Delta W_{k+1}}(\Delta\omega_{k+1}), \end{aligned} \quad (5.74)$$

donde $\mathbb{P}_{\Delta W_{k+1}}$ es la medida inducida por \mathbb{P} y ΔW_{k+1} en \mathbb{R}^m (ver [1, Sección 4.13]). Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right] \\ = \int_{\mathbb{R}^m} (h\ell(t_{k+1}, \hat{y}_{k+1}(\Delta\omega_{k+1}), \hat{u}_{k+1}(\Delta\omega_{k+1})) \\ + \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+2}^{N-1} \ell(t_j, \hat{y}_j(\Delta\omega_{k+1}), \hat{u}_j(\Delta\omega_{k+1})) + g(\hat{y}_N(\Delta\omega_{k+1})) \right]) d\mathbb{P}_{\Delta W_{k+1}}(\Delta\omega_{k+1}) \\ \geq \int_{\mathbb{R}^m} V^{k+1}(\hat{y}_{k+1}(\Delta\omega_{k+1})) d\mathbb{P}_{\Delta W_{k+1}}(\Delta\omega_{k+1}) \\ = \mathbb{E} [V^{k+1}(x + hf(t_k, x, u_k) + \sigma(t_k, x, u_k)\Delta W_{k+1})]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Luego para todo $u = (u_k, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{U}_k^h$, como $u_k \in L_{\mathcal{F}_k^k}^2$ y $\mathcal{F}_k^k = \{\emptyset, \Omega\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \ell(t_k, x, u_k) + \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right] \\ \geq \ell(t_k, x, u_k) + \mathbb{E} [V^{k+1}(x + hf(t_k, x, u_k) + \sigma(t_k, x, u_k)\Delta W_{k+1})] \\ \geq S^k(x). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Minimizando con respecto a $u \in \mathcal{U}_k^h$ en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, deducimos

$$V^k(x) \geq S^k(x). \quad (5.77)$$

Ahora probamos la otra desigualdad utilizando un argumento inductivo. Es claro de las definiciones que

$$V^N(x) = S^N(x) \quad \text{y} \quad V^{N-1}(x) = S^{N-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.78)$$

Ahora, sea ε un número positivo. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ sea $\delta_x > 0$ tal que

$$C[|x| + |y| + 1]|x - y| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y : |x - y| < \delta_x, \quad (5.79)$$

donde C es el máximo de las constantes dadas en el Lema 5.4.2 y Lema 5.4.3. Luego, para todo $k = 0, \dots, N$ y $u \in \mathcal{U}_k^h$,

$$\text{máx} \{ |J_k^h(x, u) - J_k^h(y, u)|, |V^k(x) - V^k(y)|, |S^k(x) - S^k(y)| \} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y : |x - y| < \delta_x. \quad (5.80)$$

Como \mathbb{R}^n es un espacio de Lindelöf, i.e. todo cubrimiento por abiertos del mismo tiene un subcubrimiento numerable, existe una sucesión $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(\xi_i, \delta_{\xi_i})$. Con el objetivo de obtener una unión disjunta, consideramos los siguientes conjuntos

$$\hat{B}_1 := B(\xi_1, \delta_{\xi_1}), \quad \text{y} \quad \hat{B}_k := B(\xi_k, \delta_{\xi_k}) \setminus (\cup_{j=1}^{k-1} \hat{B}_j), \quad \forall k > 1. \quad (5.81)$$

Ahora, sea $k < N - 1$ y supongamos que $V^n \equiv S^n$, para todo $n = k + 1, \dots, N$. Sea $u_j^i \in U_{ad}$ una solución $\frac{\varepsilon}{3}$ -óptima de $S^j(\xi_i)$ para $j = k, \dots, N - 1$, i.e.

$$h\ell(t_j, \xi_i, u_j^i) + \mathbb{E} [V^{j+1}(\xi_i + hf(t_j, \xi_i, u_j^i) + \sigma(t_j, \xi_i, u_j^i)\Delta W_{j+1})] \leq S^j(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.82)$$

Definimos la función medible u_j como $u_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_j^i \chi_{\hat{B}_i}(x)$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \hat{B}_i$ (ver (5.81)). Entonces, de (5.80) y (5.82) tenemos

$$\begin{aligned} & h\ell(t_j, x, u_j(x)) + \mathbb{E} [V^{j+1}(x + hf(t_j, x, u_j(x)) + \sigma(t_j, x, u_j(x))\Delta W_{j+1})] \\ &= h\ell(t_j, x, u_j^i) + \mathbb{E} [V^{j+1}(x + hf(t_j, x, u_j^i) + \sigma(t_j, x, u_j^i)\Delta W_{j+1})] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + h\ell(t_j, \xi_i, u_j^i) + \mathbb{E} [V^{j+1}(\xi_i + hf(t_j, \xi_i, u_j^i) + \sigma(t_j, \xi_i, u_j^i)\Delta W_{j+1})] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + S^j(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq S^j(x) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Ahora, fijamos $x \in \mathbb{R}^n$ y tomamos $\bar{u}_k = u_k(x) \in U_{ad}$. Definimos recursivamente $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, para todo $k < j \leq N - 1$, como

$$\bar{u}_{j+1}(\omega) := u_{j+1} \left(y_{j+1}^{k,x,(\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_j)}(\omega) \right), \quad (5.84)$$

donde $\left(y_r^{k,x,(\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_j)} \right)_{r=k}^{j+1}$ satisface la primera ecuación en (5.5) para $\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_j$, y $y_k^{k,x,(\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_j)} = x$. Como la función u_{j+1} es medible y acotada, y la función $y_{j+1}^{k,x,(\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_j)}$ es medible con respecto a \mathcal{F}_{j+1}^k , obtenemos que $\bar{u} = (\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_{N-1}) \in \mathcal{U}_k^h$. Utilizando las mismas ideas que en

(5.74)-(5.75), y la hipótesis de inducción $V^j \equiv S^j$, para todo $k < j \leq N - 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
J_k^h(x, \bar{u}) &= h\ell(t_k, x, \bar{u}_k) + \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,\bar{u}}, u_j(y_j^{k,x,\bar{u}})) + g(y_N^{k,x,\bar{u}}) \right] \\
&= h\ell(t_k, x, \bar{u}_k) + \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,\bar{u}}, u_j(y_j^{k,x,\bar{u}})) + V^N(y_N^{k,x,\bar{u}}) \right] \\
&\leq h\ell(t_k, x, \bar{u}_k) + \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-2} \ell(t_j, y_j^{k,x,\bar{u}}, u_j(y_j^{k,x,\bar{u}})) + S^{N-1}(y_{N-1}^{k,x,\bar{u}}) + \varepsilon \right] \\
&= h\ell(t_k, x, \bar{u}_k) + \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k+1}^{N-2} \ell(t_j, y_j^{k,x,\bar{u}}, u_j(y_j^{k,x,\bar{u}})) + V^{N-1}(y_{N-1}^{k,x,\bar{u}}) + \varepsilon \right] \\
&\leq h\ell(t_k, x, \bar{u}_k) + \mathbb{E} \left[V^{k+1}(y_{k+1}^{k,x,\bar{u}}) \right] + (N-1)\varepsilon \\
&\leq S^k(x) + N\varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Donde la desigualdad en la tercera línea se obtiene de (5.83). Concluimos que,

$$V^k(x) \leq J_k^h(x, \bar{u}) \leq S^k(x) + N\varepsilon. \tag{5.86}$$

De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ obtenemos

$$V^k(x) \leq S^k(x). \tag{5.87}$$

□

Nota 5.4.6. Observemos que si en la definición (5.45) de V^k , en lugar de minimizar sobre el conjunto \mathcal{U}_k^h , minimizamos sobre el conjunto $\bar{\mathcal{U}}_k^h := \{u \in \Pi_{j=k}^{N-1} L_{\mathcal{F}_j}^2 : u_j \in U_{ad} \text{ c.s. } \forall j = k, \dots, N-1\}$, obtenemos la misma función. En efecto, si definimos

$$\bar{V}^k(x) := \inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_k^h} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right]. \tag{5.88}$$

Es claro que $\bar{V}^k(x) \leq V^k(x)$, para todo x y k . Para probar la otra desigualdad, sea $u = (u_k, \dots, u_{N-1})$ un control cualquiera de $\bar{\mathcal{U}}_k^h$, entonces cada u_j puede escribirse como una función medible de $(\Delta W_r)_{r=0}^j$. Luego, para $(\Delta \omega_r)_{r=0}^k \in \mathbb{R}^{m \times (k+1)}$ fijo, podemos definir las funciones

$$\hat{u}_j((\Delta \omega_r)_{r=0}^k) : \omega \in \Omega \mapsto u_j((\Delta \omega_r)_{r=0}^k, (\Delta W_r(\omega))_{r=k+1}^j), \tag{5.89}$$

para $k \leq j \leq N-1$ y entonces definiendo

$$\hat{u}((\Delta \omega_r)_{r=0}^k) := (\hat{u}_k((\Delta \omega_r)_{r=0}^k), \dots, \hat{u}_{N-1}((\Delta \omega_r)_{r=0}^k)) \tag{5.90}$$

se tiene $\hat{u} \in \mathcal{U}_k^h$. De la definición de $y_j^{k,x,u}$ se deduce que para $(\Delta\omega_r)_{r=0}^k$ fijo, se tiene que $y_j^{k,x,\hat{u}((\Delta\omega_r)_{r=0}^k)}$ es \mathcal{F}_j^k -medible, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} \ell(t_k, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right] &= \int_{\mathbb{R}^m \times (k+1)} \mathbb{E} [\sum_{j=k}^{N-1} \ell(t_k, y_j^{k,x,\hat{u}((\Delta\omega_r)_{r=0}^k)}, \hat{u}_j((\Delta\omega_r)_{r=0}^k)) \\ &\quad + g(y_N^{k,x,\hat{u}((\Delta\omega_r)_{r=0}^k)}(\omega))] d\mathbb{P}_{(\Delta W_r)_{r=0}^k}((\Delta\omega_r)_{r=0}^k) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^m \times (k+1)} V^k(x) d\mathbb{P}_{(\Delta W_r)_{r=0}^k}((\Delta\omega_r)_{r=0}^k) = V^k(x). \end{aligned} \quad (5.91)$$

Ahora, minimizando en el lado izquierdo de la desigualdad anterior se obtiene,

$$\bar{V}^k(x) \geq V^k(x). \quad (5.92)$$

Nota 5.4.7. Ahora analizamos el caso en el que en lugar de considerar las filtraciones compuestas por \mathcal{F}_j y \mathcal{F}_j^k , para $j = k, \dots, N$, consideramos \mathcal{F}_{t_j} o $\mathcal{F}_{t_j}^{t_k}$, las cuales resultan de completar las σ -álgebras $\sigma(W(t) : 0 \leq t \leq t_j)$ y $\sigma(W(t) - W(t_k) : t_k \leq t \leq t_j)$, respectivamente. Argumentando del mismo modo que en la nota previa, definiendo

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}_k^1 &:= \{u \in \Pi_{j=k}^{N-1} L_{\mathcal{F}_{t_j}}^2 : u_j \in U_{ad}, \mathbb{P} - c.s. \forall j = k, \dots, N-1\}, \\ \bar{\mathcal{U}}_k^2 &:= \{u \in \Pi_{j=k}^{N-1} L_{\mathcal{F}_{t_j}^{t_k}}^2 : u_j \in U_{ad}, \mathbb{P} - c.s. \forall j = k, \dots, N-1\}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

obtenemos

$$\inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_k^1} J_k^h(x, u) = \inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_k^2} J_k^h(x, u). \quad (5.94)$$

Además, todos los resultados presentados hasta ahora en esta sección, inclusive el PPD, son válidos si consideramos $\bar{\mathcal{U}}_k^2$ en lugar de \mathcal{U}_k^h . En efecto, las pruebas están basadas en el hecho de que los procesos son adaptados a la filtración definida por los incrementos del movimiento browniano y que dichos incrementos son independientes. Lo cual sigue siendo cierto si consideramos $\bar{\mathcal{U}}_k^2$. Denotamos

$$\tilde{V}^k(x) = \inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_k^2} J_k^h(x, u). \quad (5.95)$$

Como $\tilde{V}^N(x) = V^N(x) = g(x)$, y (\tilde{V}^k) y (V^k) satisfacen (5.70) del Teorema 5.4.5, podemos concluir que

$$\tilde{V}^k(x) = V^k(x), \quad \forall k = 0, \dots, N. \quad (5.96)$$

5.4.3. Control óptimo feedback

El objetivo de esta sección es probar que existen controles óptimos feedback para el problema (P^h) . Para simplificar la notación en lo que sigue, definimos para todo $0 \leq k \leq N - 1$, la función $F^k : \mathbb{R}^n \times U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F^k(x, u) := h\ell(t_k, x, u) + \mathbb{E} [V^{k+1}(x + hf(t_k, x, u) + \sigma(t_k, x, u)\Delta W_{k+1})]. \quad (5.97)$$

Luego, del PPD, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $k = 0, \dots, N - 1$, tenemos

$$V^k(x) = \inf_{u \in U_{ad}} F^k(x, u) \quad \text{y} \quad V^N(x) = g(x). \quad (5.98)$$

Ahora, gracias a un resultado de selección medible de Schäl [81, Teorema 5.3.1], podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 5.4.8. *Bajo las hipótesis anteriores, para todo $k = 0, \dots, N - 1$ existe una función medible $\bar{u}^k : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{ad}$ tal que*

$$F^k(x, \bar{u}^k(x)) = V^k(x), \quad (5.99)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Siguiendo las ideas de la demostración del Lema 5.4.3, es fácil ver que $(x, u) \mapsto F^k(x, u)$ es una función continua. Como el conjunto U_{ad} es compacto, podemos aplicar [81, Teorema 5.3.1], de donde se deduce el resultado. \square

Nota 5.4.9. *Podemos observar que el resultado previo junto con el PPD, en el marco discreto, aseguran la existencia de un control óptimo feedback (a veces llamado markoviano). En efecto, la sucesión de funciones medibles $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{N-1}$ dadas en la proposición anterior, definen el control óptimo $\bar{u} = (\bar{u}^0(y_0), \bar{u}^1(y_1), \dots, \bar{u}^{N-1}(y_{N-1}))$, donde (y_0, \dots, y_N) se define de manera recursiva como*

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k, \bar{u}^k(y_k)) + \sigma(t_k, y_k, \bar{u}^k(y_k))\Delta W_{k+1} & \forall k = 0, \dots, N - 1, \\ y_0 = x. \end{cases} \quad (5.100)$$

Este hecho demuestra la importancia del PPD. Cabe destacar que en el caso continuo, es sabido (ver por ejemplo [43, Capítulo VI] y [44, Capítulos 3 y 4]) que si la ecuación

de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada al problema de control óptimo estocástico, la cual es una consecuencia del PPD en el caso continuo, admite una solución v suficientemente regular, entonces se puede construir un control óptimo feedback. Este resultado es conocido como resultado de verificación y usualmente es cierto bajo hipótesis clásicas, generalmente cuando σ no depende de u y si $a = \sigma\sigma^\top$, se tiene que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m,$$

para algún $c > 0$. En particular, si fijamos $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, se tiene que existe una política óptima feedback para el problema asociado a $V(t, x)$ (definida más adelante en (5.101)). La característica principal de este análisis es que la existencia de un óptimo se obtiene sin hipótesis habituales de convexidad requeridas en la formulación fuerte (ver [89, Capítulo 2, Sección 5.2]). Por otro lado, como acabamos de ver, en el caso del problema discreto en tiempo, siempre podemos obtener la existencia de un control óptimo feedback, sin ninguna de estas hipótesis adicionales. Aunque hayamos discretizado en tiempo, éste sigue siendo un problema infinito dimensional para el cual la existencia de estos controles, no se deduce a partir de métodos clásicos, pero es una consecuencia del PPD.

5.5. Propiedades de regularidad de la función valor

En esta sección analizaremos algunas propiedades de la función valor de los problemas continuo y discreto. La función valor del problema continuo $V : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$V(s, x) := \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^s} J^{s,x}(u) := \mathbb{E} \left[\int_s^T \ell(t, y_u^{s,x}(t), u(t)) dt + g(y_u^{s,x}(T)) \right], \quad (5.101)$$

donde $y_u^{s,x}$ es la solución de

$$\begin{cases} dy_u^{s,x}(t) = f(t, y_u^{s,x}(t), u(t)) dt + \sigma(t, y_u^{s,x}(t), u(t)) dW(t), & t \in [s, T], \\ y_u^{s,x}(s) = x, \end{cases} \quad (5.102)$$

y el conjunto de controles admisibles es

$$\mathcal{U}_{ad}^s := \{u \in L^2([s, T] \times \Omega) : u(t) \text{ es } \mathbb{F}^s\text{-adaptado y } u(t, \omega) \in U_{ad}, \text{ p.c.t. } (t, \omega) \in [s, T] \times \Omega\}, \quad (5.103)$$

donde $\mathbb{F}^s = \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \in [s, T]}$ y \mathcal{F}_t^s es la completación de $\sigma(W(r) - W(s) : s \leq r \leq t)$ para $t \in [s, T]$.

En el siguiente teorema mostraremos que la función valor del problema continuo V , así como la del problema discreto $\{V^k ; k = 0, \dots, N\}$ definida en (5.45) son Hölder localmente continuas con respecto al tiempo. Este resultado para V es clásico, ver por ejemplo [82, Sección 3.4] y [89, Capítulo 4, Proposición 3.1]). Sin embargo, por una cuestión de completitud, probaremos este resultado adaptado a nuestras hipótesis, las cuales son bastante generales.

De las definiciones de $J_k^h(x, \cdot)$ en (5.44) y $J^{s,x}(\cdot)$ en (5.101), es claro que dichos funcionales pueden extenderse a los conjuntos \mathcal{U}_{ad}^h y \mathcal{U}_{ad} , respectivamente. En lo que sigue estaremos considerando dichas extensiones, sin alterar la notación introducida.

Teorema 5.5.1. *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), existe $C > 0$ (independiente de h), tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}_{ad}$ y $s, t \in [0, T]$, se tiene*

$$|J^{s,x}(u) - J^{t,x}(u)| \leq C[1 + |x|^2]|s - t|^{\frac{1}{2}}, \quad (5.104)$$

y para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ y $r, k = 0, \dots, N$,

$$|J_r^h(x, u) - J_k^h(x, u)| \leq C[1 + |x|^2]|k - r|^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}. \quad (5.105)$$

Como consecuencia,

$$|V(s, x) - V(t, x)| \leq C[1 + |x|^2]|s - t|^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad s, t \in [0, T], \quad (5.106)$$

y

$$|V^r(x) - V^k(x)| \leq C[1 + |x|^2]|k - r|^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad r, k = 0, \dots, N. \quad (5.107)$$

Demostración. Comencemos notando que para todo $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$V(s, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J^{s,x}(u). \quad (5.108)$$

En efecto, es claro que

$$V(s, x) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J^{s,x}(u). \quad (5.109)$$

Recíprocamente, si $u \in \mathcal{U}_{ad}$, entonces para todo $s \leq t \leq T$ la función $u(t)$ es \mathcal{F}_t -medible, y entonces existe una aplicación medible $u_t((\omega_r)_{0 \leq r \leq s}, (\omega_r - \omega_s)_{s \leq r \leq t})$ tal que $u(t, \omega) = u_t((W_r(\omega))_{0 \leq r \leq s}, (W_r(\omega) - W_s(\omega))_{s \leq r \leq t})$, \mathbb{P} -c.s. ([1]). Luego, si fijamos $(\omega_r)_{0 \leq r \leq s}$ podemos definir la función

$$\hat{u}_t((\omega_r)_{0 \leq r \leq s}) : \omega \in \Omega \mapsto u_t((\omega_r)_{0 \leq r \leq s}, (W_r(\omega) - W_s(\omega))_{s \leq r \leq t}), \quad (5.110)$$

la cual pertenece a \mathcal{F}_t^s . De nuevo, gracias a la independencia de los incrementos del movimiento browniano y utilizando los mismos argumentos expuestos en la Nota 5.4.6 y la Nota 5.4.7 obtenemos la desigualdad inversa en (5.109) (ver [32, Remark 5.2]).

Ahora, sin pérdida de generalidad, asumimos que $0 \leq s \leq t \leq T$. Consideramos un estado inicial fijo x y un control $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Para simplificar la notación, denotamos $y^s := y_u^{s,x}$, $y^t := y_u^{t,x}$ y para $t \leq r \leq T$ y $\varphi = f, \sigma$,

$$\Delta y(r) := y^s(r) - y^t(r) \quad \text{y} \quad \Delta \varphi(r) = \varphi(r, y^s(r), u(r)) - \varphi(r, y^t(r), u(r)). \quad (5.111)$$

Luego, obtenemos para $t \leq r \leq T$

$$\begin{aligned} \Delta y(r) &= \int_s^t f(\tau, y^s(\tau), u(\tau)) d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, y^s(\tau), u(\tau)) dW(\tau) \\ &\quad + \int_t^r \Delta f(\tau) d\tau + \int_t^r \Delta \sigma(\tau) dW(\tau). \end{aligned} \quad (5.112)$$

De la hipótesis **(H1)**, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la isometría de Itô tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\Delta y(r)|^2] &\leq 4\mathbb{E} \left[|s-t| \int_s^t |f(\tau, y^s(\tau), u(\tau))|^2 d\tau + \int_s^t |\sigma(\tau, y^s(\tau), u(\tau))|^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. + |s-t| \int_t^r |\Delta f(\tau)|^2 d\tau + \int_t^r |\Delta \sigma(\tau)|^2 d\tau \right] \\ &\leq 4[|s-t| + 1] \int_s^t 3L^2(1 + \mathbb{E}[|y^s(\tau)|^2] + \mathbb{E}[|u(\tau)|^2]) d\tau \\ &\quad + 4[|s-t| + 1] \int_t^r L^2 \mathbb{E}[|\Delta y(\tau)|^2] d\tau. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Como el conjunto U_{ad} es compacto, del Lema de Grönwall [40] y la Proposición 1.1.7 existe $C_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t \leq r \leq T} \mathbb{E}[|\Delta y(r)|^2] \leq C_0 [1 + |x|^2] |s-t|. \quad (5.114)$$

Ahora, comparamos $J^{s,x}(u)$ y $J^{t,x}(u)$. Denotamos $\Delta \ell(r) := \ell(r, y^s(r), u(r)) - \ell(r, y^t(r), u(r))$ y $\Delta g = g(y^s(T)) - g(y^t(T))$. Tenemos entonces

$$|J^{s,x}(u) - J^{t,x}(u)| \leq \mathbb{E} \int_s^t |\ell(r, y^s(r), u(r))| dr + \mathbb{E} \int_t^T |\Delta \ell(r)| dr + \mathbb{E} |\Delta g|. \quad (5.115)$$

De la hipótesis **(H2)** se obtiene,

$$\mathbb{E} \int_s^t |\ell(r, y^s(r), u(r))| dr \leq 3L \int_s^t [\mathbb{E}[|y^s(r)|^2] + \mathbb{E}[|u(r)|^2] + 1] dr, \quad (5.116)$$

y como U_{ad} es acotado, nuevamente de la Proposición 1.1.7 existe $C_1 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \int_s^t |\ell(r, y^s(r), u(r))| dr \leq C_1 [1 + |x|^2] |s - t|. \quad (5.117)$$

Por otro lado, para los últimos dos términos obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta \ell(r)|] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\ell_y(r, y^t(r) + \xi \Delta y(r), u(r)) \Delta y(r)| d\xi \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 [L(1 + |y^t(r)| + \xi |\Delta y(r)| + |u(r)|) |\Delta y(r)|] d\xi \right] \\ &\leq L \mathbb{E} [1 + |y^s(r)| + |\Delta y(r)| + |u(r)|] |\Delta y(r)|. \end{aligned} \quad (5.118)$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la Proposición 1.1.7, la compacidad de U_{ad} y (5.114), deducimos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} [|\Delta \ell(r)|] \leq C_2 [1 + |x|^2] |s - t|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.119)$$

Estimaciones análogas valen para Δg y por lo tanto tenemos (5.104).

Ahora para la función valor asociada al problema discreto, de la Nota 5.4.6 tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \{0, \dots, N\}$,

$$V^k(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^h} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} \ell(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) + g(y_N^{k,x,u}) \right]. \quad (5.120)$$

Sea $u = (u_j)_{j=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control dado y $r, k \in \{0, \dots, N-1\}$ tales que $r < k$. Denotamos

$$\Delta y_j = y_j^{r,x,u} - y_j^{k,x,u}, \quad \Delta \varphi_j = \varphi(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j) - \varphi(t_j, y_j^{k,x,u}, u_j) \text{ y } \Delta g = g(y_N^{r,x,u}) - g(y_N^{k,x,u}), \quad (5.121)$$

para $\varphi = f, \sigma, \ell$ y $j = k, \dots, N-1$. Luego

$$\Delta y_{j+1} = \Delta y_j + h \Delta f_j + \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1}. \quad (5.122)$$

Utilizando las mismas ideas que en la Sección 5.3, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} [|\Delta y_{j+1}|^2] \leq [1 + C_3 h] \mathbb{E} [|\Delta y_j|^2] \leq e^{C_3 T} \mathbb{E} [|\Delta y_k|^2]. \quad (5.123)$$

De la definición sabemos que $y_k^{k,x,u} = x$, luego

$$\Delta y_k = y_k^{r,x,u} - x = h \sum_{j=r}^{k-1} f(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j) + \sum_{j=r}^{k-1} [\sigma(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j) \Delta W_{j+1}]. \quad (5.124)$$

Como U_{ad} es compacto, de la hipótesis **(H1)** y la independencia de los incrementos del movimiento browniano, existe $C_4 > 0$ y $C_5 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\Delta y_k|^2] &\leq C_4 \left[h^2(k-r) \sum_{j=r}^{k-1} \mathbb{E}[|f(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j)|^2] + h \sum_{j=r}^{k-1} \mathbb{E}[|\sigma(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j)|^2] \right] \\ &\leq C_5 h |k-r| [1 + \max_{j=r, \dots, k-1} \mathbb{E}[|y_j^{r,x,u}|^2]] \\ &\leq C_6 h |k-r| [1 + |x|^2], \end{aligned} \quad (5.125)$$

donde la última desigualdad vale gracias al Lema 5.3.1. Tenemos entonces

$$|J_r^h(x, u) - J_k^h(x, u)| = \left| h \sum_{j=r}^{k-1} \mathbb{E}[\ell(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j)] + h \sum_{j=k}^{N-1} \mathbb{E}[\Delta \ell_j] + \mathbb{E}[\Delta g] \right|, \quad (5.126)$$

y también,

$$|V^r(x) - V^k(x)| \leq \sup_{u \in \mathcal{U}_{ad}^h} |J_r^h(x, u) - J_k^h(x, u)|. \quad (5.127)$$

De **(H2)**, el Lema 5.3.1 y la compacidad de U_{ad} , existe $C_7 > 0$ tal que

$$h \left| \sum_{j=r}^{k-1} \mathbb{E}[\ell(t_j, y_j^{r,x,u}, u_j)] \right| \leq h \sum_{j=r}^{k-1} L \mathbb{E}[1 + |y_j^{r,x,u}| + |u_j|]^2 \leq h |k-r| C_7 [1 + |x|^2]. \quad (5.128)$$

Por otro lado, como en (5.118), del Lema 5.3.1 y (5.125), obtenemos la existencia de $C_8 > 0$ tal que

$$\mathbb{E}[\Delta \ell_j] \leq C_8 [1 + |x|^2] h^{\frac{1}{2}} |k-r|^{\frac{1}{2}}, \quad (5.129)$$

y una estimación similar se tiene para $\mathbb{E}[\Delta g]$. Por lo tanto, combinando (5.126)-(5.129) obtenemos el resultado deseado. \square

Nuestro objetivo ahora es estudiar la semiconcavidad de V y de su versión discreta $\{V^k; k = 0, \dots, N\}$. Recordemos que $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es semicóncava con constante $K > 0$ si para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y) - \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq K \lambda (1-\lambda) |x-y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (5.130)$$

Necesitaremos para lo que sigue considerar las siguientes hipótesis adicionales:

(H3) Existe $K > 0$ tal que g es semicóncava con constante K y ℓ es también semicóncava con constante K , uniformemente en $[0, T] \times U_{ad}$, i.e. para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} \lambda \ell(t, y, u) + (1 - \lambda) \ell(t, \bar{y}, u) - \ell(t, \lambda y + (1 - \lambda) \bar{y}, u) \leq K \lambda (1 - \lambda) |y - \bar{y}|^2, \\ \lambda g(y) + (1 - \lambda) g(\bar{y}) - g(\lambda y + (1 - \lambda) \bar{y}) \leq K \lambda (1 - \lambda) |y - \bar{y}|^2. \end{cases} \quad (5.131)$$

(H4) Para $\varphi = f, \sigma$, y para casi todo $t \in [0, T]$, la aplicación $(y, u) \mapsto \varphi(t, y, u)$ es C^2 y existe una constante L tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U_{ad}$,

$$|\varphi_{yy}(t, y, u)| + |\varphi_{yu}(t, y, u)| + |\varphi_{uu}(t, y, u)| \leq L. \quad (5.132)$$

Bajo estas hipótesis adicionales probaremos una versión local de (5.130) para V y $\{V^k ; k = 0, \dots, N\}$. La siguiente prueba está basada en [89, Capítulo 4, Proposición 4.5], pero dado que nuestras hipótesis son más generales, presentamos una versión adaptada a las mismas.

Teorema 5.5.2. *Bajo las hipótesis (H1)-(H4), las funciones V y V^k son localmente semicóncavas, i.e. para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, existe una constante $K_{\bar{x}, \delta} > 0$ tal que, para todo $s \in [0, T]$, $k = 0, \dots, N$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, se tiene*

$$\lambda V(s, x) + (1 - \lambda) V(s, \bar{x}) - V(s, \lambda x + (1 - \lambda) \bar{x}) \leq K_{\bar{x}, \delta} \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2, \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \quad (5.133)$$

y

$$\lambda V^k(x) + (1 - \lambda) V^k(\bar{x}) - V^k(\lambda x + (1 - \lambda) \bar{x}) \leq K_{\bar{x}, \delta} \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2, \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \quad (5.134)$$

donde $B_\delta(\bar{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| < \delta\}$.

Demostración. Sea $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$, definimos $x^\lambda := \lambda x + (1 - \lambda) \bar{x}$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^s$ tal que

$$J^{s, x^\lambda}(u_\varepsilon) - \varepsilon < V(s, x^\lambda). \quad (5.135)$$

Para simplificar la notación, denotamos $y^\xi(t) = y_{u_\varepsilon}^{s,\xi}(t)$, $\ell(y^\xi(t)) = \ell(t, y_{u_\varepsilon}^{s,\xi}(t), u_\varepsilon(t))$ y $g(y^\xi) = g(y_{u_\varepsilon}^{s,\xi}(T))$ for $\xi = x, \bar{x}, x^\lambda$. Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda V(s, x) + (1 - \lambda)V(s, \bar{x}) - V(s, x^\lambda) &\leq \lambda J^{s,x}(u_\varepsilon) + (1 - \lambda)J^{s,\bar{x}}(u_\varepsilon) - J^{s,x^\lambda}(u_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_s^T [\lambda \ell(y^x) + (1 - \lambda)\ell(y^{\bar{x}}) - \ell(y^{x^\lambda})] dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\lambda g(y^x) + (1 - \lambda)g(y^{\bar{x}}) - g(y^{x^\lambda}) \right] + \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.136)$$

De la hipótesis de semiconcavidad **(H3)** tenemos,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\int_s^T [\lambda \ell(y^x) + (1 - \lambda)\ell(y^{\bar{x}}) - \ell(y^{x^\lambda})] dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_s^T [\lambda \ell(y^x) + (1 - \lambda)\ell(y^{\bar{x}}) - \ell(\lambda y^x + (1 - \lambda)y^{\bar{x}})] dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_s^T [\ell(\lambda y^x + (1 - \lambda)y^{\bar{x}}) - \ell(y^{x^\lambda})] dt \right] \quad (5.137) \\ &\leq K\lambda(1 - \lambda)T\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [s, T]} |y^x(t) - y^{\bar{x}}(t)|^2 \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_s^T [\ell(\lambda y^x + (1 - \lambda)y^{\bar{x}}) - \ell(y^{x^\lambda})] dt \right]. \end{aligned}$$

De la Proposición 1.1.7, existe C_0 tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [s, T]} |y^x(t) - y^{\bar{x}}(t)|^2 \right] \leq C_0 |x - \bar{x}|^2. \quad (5.138)$$

Ahora definimos $\Delta y(t) := \lambda y^x(t) + (1 - \lambda)y^{\bar{x}}(t) - y^{x^\lambda}(t)$ para todo $t \in [s, T]$. De **(H2)** y la compacidad de U_{ad} , existe $C_1 > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} |\ell(\lambda y^x(t) + (1 - \lambda)y^{\bar{x}}(t)) - \ell(y^{x^\lambda}(t))| &\leq \int_0^1 |\ell_y(y^{x^\lambda}(t) + \xi \Delta y(t))| |\Delta y(t)| d\xi \\ &\leq C_1 [1 + |y^{x^\lambda}(t)| + |\Delta y(t)|] |\Delta y(t)|. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Podemos obtener estimaciones similares para g . De **(H4)**, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [s, T]} |\Delta y(t)|^2 \right] \leq C_2 \lambda^2 (1 - \lambda)^2 |x - \bar{x}|^4. \quad (5.140)$$

Ahora, volviendo a (5.139), de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la Proposición 1.1.7 y la ecuación previa, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|y^{x^\lambda}(t)| |\Delta y(t)| \right] &\leq (\mathbb{E} |y^{x^\lambda}(t)|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} |\Delta y(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_3 [1 + |x^\lambda|] \lambda(1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2 \quad (5.141) \\ &\leq C_3 [1 + |\bar{x}| + |x - \bar{x}|] \lambda(1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

Como $|x - \bar{x}|^4 \leq \delta^2|x - \bar{x}|^2$, para todo $x \in B_\delta(\bar{x})$, combinando (5.137)-(5.141), se concluye la prueba para (5.133).

Ahora para la función valor discreta, utilizamos argumentos similares. Sabemos que existe $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_k^h$ tal que

$$J_k^h(x^\lambda, u_\varepsilon) - \varepsilon \leq V^k(x^\lambda). \quad (5.142)$$

Denotando $y_j^\xi = y_j^{k,\xi,u_\varepsilon}$ y $\ell(y_j^\xi) = \ell(t_j, y_j^\xi, u_{\varepsilon,j})$ para $\xi = x, \bar{x}, x^\lambda$ y $j = k, \dots, N$, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda V^k(x) + (1 - \lambda)V^k(\bar{x}) - V^k(x^\lambda) &\leq \lambda J_k^h(x, u_\varepsilon) + (1 - \lambda)J_k^h(\bar{x}, u_\varepsilon) - J_k^h(x^\lambda, u_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} [\lambda \ell(y_j^x) + (1 - \lambda)\ell(y_j^{\bar{x}}) - \ell(y_j^{x^\lambda})] \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\lambda g(y_N^x) + (1 - \lambda)g(y_N^{\bar{x}}) - g(y_N^{x^\lambda}) \right] + \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Como en (5.137), de la hipótesis de semiconcavidad **(H3)** obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} [\lambda \ell(y_j^x) + (1 - \lambda)\ell(y_j^{\bar{x}}) - \ell(y_j^{x^\lambda})] \right] &\leq \\ K\lambda(1 - \lambda)T \max_{j=k, \dots, N} \mathbb{E} [|y_j^x - y_j^{\bar{x}}|^2] &+ \mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} [\ell(\lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}}) - \ell(y_j^{x^\lambda})] \right]. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Del Lema 5.4.1, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\max_{j=k, \dots, N} \mathbb{E} [|y_j^x - y_j^{\bar{x}}|^2] \leq C_0|x - \bar{x}|^2. \quad (5.145)$$

Para estimar el último término en (5.144) definimos $\Delta y_j := \lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}} - y_j^{x^\lambda}$. De **(H2)** y la compacidad de U_{ad} , existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ell(\lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}}) - \ell(y_j^{x^\lambda}) \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\ell_y(y_j^{x^\lambda} + \xi \Delta y_j)| |\Delta y_j| d\xi \right] \\ &\leq C_1 \mathbb{E} \left[[1 + |y_j^{x^\lambda}| + |\Delta y_j|] |\Delta y_j| \right]. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \Delta y_{j+1} &= \Delta y_j + h \left[f(\lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}}) - f(y_j^{x^\lambda}) \right] \\ &\quad + \left[\sigma(\lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}}) - \sigma(y_j^{x^\lambda}) \right] \Delta W_{j+1}. \\ &\quad + h \left[\lambda f(y_j^x) + (1 - \lambda)f(y_j^{\bar{x}}) - f(\lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}}) \right] \\ &\quad + \left[\lambda \sigma(y_j^x) + (1 - \lambda)\sigma(y_j^{\bar{x}}) - \sigma(\lambda y_j^x + (1 - \lambda)y_j^{\bar{x}}) \right] \Delta W_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.147)$$

De la desigualdad de Young y la isometría de Itô, existe $C_2 > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta y_{j+1}|^2] &\leq [1 + C_2 h] \mathbb{E} [|\Delta y_j|^2] + C_2 h \mathbb{E} \left[|f(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}}) - f(y_j^{x^\lambda})|^2 \right] \\ &\quad + C_2 h \mathbb{E} \left[|\sigma(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}}) - \sigma(y_j^{x^\lambda})|^2 \right] \\ &\quad + C_2 h \mathbb{E} \left[|\lambda f(y_j^x) + (1 - \lambda) f(y_j^{\bar{x}}) - f(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}})|^2 \right] \\ &\quad + C_2 h \mathbb{E} \left[|\lambda \sigma(y_j^x) + (1 - \lambda) \sigma(y_j^{\bar{x}}) - \sigma(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}})|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.148)$$

De **(H1)**, obtenemos

$$\mathbb{E} \left[|f(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}}) - f(y_j^{x^\lambda})|^2 \right] + \mathbb{E} \left[|\sigma(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}}) - \sigma(y_j^{x^\lambda})|^2 \right] \leq 2L^2 \mathbb{E} [|\Delta y_j|^2]. \quad (5.149)$$

Ahora, para los últimos dos términos en (5.148) tenemos,

$$\begin{aligned} &|\lambda f(y_j^x) + (1 - \lambda) f(y_j^{\bar{x}}) - f(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}})| \\ &= \left| \lambda \int_0^1 f_y(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}} + \xi(1 - \lambda)(y_j^x - y_j^{\bar{x}}))(1 - \lambda)(y_j^x - y_j^{\bar{x}}) d\xi \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda) \int_0^1 f_y(\lambda y_j^x + (1 - \lambda) y_j^{\bar{x}} + \xi \lambda(y_j^{\bar{x}} - y_j^x)) \lambda(y_j^{\bar{x}} - y_j^x) d\xi \right| \\ &\leq L\lambda(1 - \lambda) |y_j^x - y_j^{\bar{x}}|^2, \end{aligned} \quad (5.150)$$

donde la última desigualdad se deduce de **(H4)**. Estimaciones análogas se satisfacen para σ . Del Lema 5.4.1, podemos concluir que existen $C_3 > 0$ y $C_4 > 0$ tales que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta y_{j+1}|^2] &\leq [1 + C_3 h] \mathbb{E} [|\Delta y_j|^2] + C_4 h \lambda^2 (1 - \lambda)^2 |x - \bar{x}|^4. \\ &\leq e^{C_3 T} C_4 \lambda^2 (1 - \lambda)^2 |x - \bar{x}|^4. \end{aligned} \quad (5.151)$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inecuación anterior, existe $C_5 > 0$ tal que

$$\sup_{j=k, \dots, N} \mathbb{E} [|\Delta y_j|] \leq C_5 \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2. \quad (5.152)$$

Ahora para estimar (5.146), de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Lema 5.3.1 y las acotaciones previas, existe $C_6 > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|y_j^{x^\lambda}| |\Delta y_j| \right] &\leq (\mathbb{E} [|y_j^{x^\lambda}|^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} [|\Delta y_j|^2])^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_6 [1 + |x^\lambda|] \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2 \\ &\leq C_6 [1 + |\bar{x}| + |x - \bar{x}|] \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Como $|x - \bar{x}|^4 \leq \delta^2 |x - \bar{x}|^2$, para todo $x \in B_\delta(\bar{x})$, combinando (5.146), (5.152) y (5.153), deducimos que existe $C_{\bar{x}, \delta} > 0$, que depende de \bar{x} y δ , tal que

$$\mathbb{E} \left[h \sum_{j=k}^{N-1} [\lambda \ell(y_j^x) + (1 - \lambda) \ell(y_j^{\bar{x}}) - \ell(y_j^{x^\lambda})] \right] \leq C_{\bar{x}, \delta} \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2. \quad (5.154)$$

Estimaciones similares valen para los términos que involucran a la función g en (5.143), y entonces de (5.144), (5.145) y (5.154) podemos concluir que vale (5.134). \square

Nota 5.5.3. Si además de las hipótesis que agregamos, suponemos que las funciones de costo ℓ y g son Lipschitz continuas o que f y σ son afines, entonces argumentos similares a los expuestos en la prueba anterior (ver [89, Capítulo 4, Proposición 4.5]) muestran que V y V^k satisfacen (5.130) para alguna constante K independiente de \bar{x} (la cual es independiente de h en el caso de la función valor discreta).

Ahora, podemos definir para cada $h = T/N$, la función valor discreta, $V^h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como una interpolación lineal en tiempo de las funciones V^k , i.e.

$$V^h(t, x) := \alpha V^k(x) + (1 - \alpha) V^{k+1}(x), \quad (5.155)$$

para $t = \alpha t_k + (1 - \alpha) t_{k+1}$, $\alpha \in [0, 1)$. Combinando el Teorema 5.5.1 y el Teorema 5.5.2, fácilmente se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5.5.4. Bajo las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, para cada $h = T/N$ la función valor discreta V^h es $\frac{1}{2}$ -Hölder continua con respecto al tiempo. Si además asumimos que valen **(H3)** y **(H4)**, entonces V^h es localmente semicóncava con respecto a la variable espacial.

Demostración. Sean $s, t \in [0, T]$ con $s < t$. Existen $k_s, k_t \in \{0, \dots, N - 1\}$ tales que $s \in [t_{k_s}, t_{k_s+1})$ y $t \in [t_{k_t}, t_{k_t+1})$. Luego, existen $\alpha_i \in [0, 1)$, tales que $i = \alpha_i t_{k_i} + (1 - \alpha_i) t_{k_i+1}$, para $i = s, t$.

Si $k_s = k_t$, de la definición de V^h obtenemos para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |V^h(s, x) - V^h(t, x)| &\leq |\alpha_s V^{k_s}(x) + (1 - \alpha_s) V^{k_s+1}(x) - \alpha_t V^{k_s}(x) - (1 - \alpha_t) V^{k_s+1}(x)| \\ &\leq |\alpha_s - \alpha_t| |V^{k_s}(x) - V^{k_s+1}(x)| \\ &\leq C[1 + |x|^2] |\alpha_s - \alpha_t| h^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.156)$$

donde la última desigualdad se desprende del Teorema 5.5.1. Como $|s - t| = |\alpha_s - \alpha_t|h$ y $|\alpha_s - \alpha_t| < 1$, deducimos que

$$|V^h(s, x) - V^h(t, x)| \leq C[1 + |x|^2]|s - t|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.157)$$

Ahora, asumimos que $k_s < k_t$. Entonces,

$$|s - t| = [\alpha_s + (k_t - k_s - 1) + (1 - \alpha_t)]h. \quad (5.158)$$

Y nuevamente del Teorema 5.5.1 obtenemos,

$$\begin{aligned} |V^h(s, x) - V^h(t, x)|^2 &\leq 3 [|\alpha_s V^{k_s}(x) + (1 - \alpha_s)V^{k_s+1}(x) - V^{k_s+1}(x)|^2 + |V^{k_s+1}(x) - V^{k_t}(s)|^2 \\ &\quad + |V^{k_t}(x) - \alpha_t V^{k_t}(x) + (1 - \alpha_t)V^{k_t+1}(x)|^2] \\ &\leq 3 [|\alpha_s|^2 |V^{k_s}(x) - V^{k_s+1}(x)|^2 + |V^{k_s+1}(x) - V^{k_t}(s)|^2 \\ &\quad + |1 - \alpha_t|^2 |V^{k_t}(x) - V^{k_t+1}(s)|^2] \\ &\leq 3C^2 [1 + |x|^2]^2 [|\alpha_s|^2 h + (k_t - k_s - 1)h + |1 - \alpha_t|^2 h] \\ &\leq 3C^2 [1 + |x|^2]^2 [\alpha_s + (k_t - k_s - 1) + (1 - \alpha_t)] h, \end{aligned} \quad (5.159)$$

donde la última desigualdad vale ya que $\alpha_s, (1 - \alpha_t) \in [0, 1]$. Finalmente, de (5.157) y (5.159), para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $s, t \in [0, T]$ tenemos

$$|V^h(s, x) - V^h(t, x)| \leq \sqrt{3}C[1 + |x|^2]|s - t|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.160)$$

Como la constante $K_{\bar{x}, \delta}$ en el Teorema 5.5.2 es independiente de $k = 0, \dots, N$, para $t = \alpha t_k + (1 - \alpha)t_{k+1}$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned} &\lambda V^h(t, x) + (1 - \lambda)V^h(t, \bar{x}) - V^h(t, \lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \\ &= \alpha [\lambda V^k(x) + (1 - \lambda)V^k(\bar{x}) - V^k(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x})] \\ &\quad + (1 - \alpha) [\lambda V^{k+1}(x) + (1 - \lambda)V^{k+1}(\bar{x}) - V^{k+1}(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x})] \\ &\leq K_{\bar{x}, \delta} \lambda (1 - \lambda) |x - \bar{x}|^2, \end{aligned} \quad (5.161)$$

para todo $x \in B_\delta(\bar{x})$. Queda entonces terminada la prueba. \square

5.6. Convergencia

En esta sección analizamos la relación que existe entre las funciones valor de los problemas continuo y discretos. Mostraremos que cuando el paso de tiempo h tiende a cero, V^h converge a V y también que toda sucesión de soluciones de los problemas discretos, extendiéndolas a funciones seccionalmente constantes en $[0, T]$, forman una sucesión minimizante para el problema continuo. En particular, podemos tomar la sucesión de controles óptimos discretos feedback, construidos en la Proposición 5.4.8 y la Nota 5.4.9. Finalmente, bajo hipótesis de convexidad, podemos probar la convergencia débil de controles óptimos discretos a una solución del problema continuo.

A lo largo de esta sección asumimos que valen **(H1)**-**(H2)**, y como en la sección anterior, suponemos que el conjunto U_{ad} es compacto. Comenzamos probando una estimación para la diferencia entre los funcionales de costo del problema discreto y del continuo. En lo que sigue, para cada $k = 0, \dots, N - 1$ y $x \in \mathbb{R}^n$, extendemos $J_k^h(x, \cdot)$ a $\Pi_{i=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_{t_i}}^2$ utilizando como definición el mismo lado derecho que en (5.44).

Lema 5.6.1. *Sea $u^h \in \Pi_{i=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_{t_i}}^2$ y definamos el control en U_{ad} , al cual seguimos denotando con u^h , como $u^h(t) := u_k^h$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$. Luego, para todo $k = 0, \dots, N - 1$ existe $C > 0$ independiente de u^h y k tal que*

$$|J_k^h(x, u^h) - J^{t_k, x}(u^h)| \leq C [|x|^2 + 1] h^{\frac{1}{2}} + C [|x|^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \bar{\omega}(h). \quad (5.162)$$

Demostración. Por conveniencia en la notación, asumimos que $k = 0$ y, como x es fijo, denotamos $J^h(u^h) = J_0^h(x, u^h)$ y $J(u^h) = J^{0, x}(u^h)$. Sea \tilde{y}^h la solución continua a la ecuación de estado con respecto al control u^h , y sea $y^h = (y_k^h)_{k=0}^N$ el estado discreto asociado a u^h . Tenemos,

$$\begin{aligned} |J(u^h) - J^h(u^h)| &\leq \left| \mathbb{E} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\ell(t, \tilde{y}^h(t), u_k^h) - \ell(t_k, y_k^h, u_k^h)] dt \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} [g(\tilde{y}^h(t_N)) - g(y_N^h)] \right|, \end{aligned} \quad (5.163)$$

y

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\ell(t, \tilde{y}^h(t), u_k^h) - \ell(t_k, y_k^h, u_k^h)] dt \right| &\leq \mathbb{E} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\ell(t, \tilde{y}^h(t), u_k^h) - \ell(t, y_k^h, u_k^h)] dt \right| \\ &\quad + \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\ell(t, y_k^h, u_k^h) - \ell(t_k, y_k^h, u_k^h)| dt. \end{aligned} \quad (5.164)$$

De **(H1)**, para el último término se obtiene,

$$\mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\ell(t, y_k^h, u_k^h) - \ell(t_k, y_k^h, u_k^h)| dt \leq h\bar{\omega}(h), \quad (5.165)$$

y para el primero, de **(H2)** tenemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\ell(t, \tilde{y}^h(t), u_k^h) - \ell(t, y_k^h, u_k^h)] dt \right| \\ & \leq \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^1 |\ell_y(t, \tilde{y}^h(t) + s(y_k^h - \tilde{y}^h(t)), u_k^h)| |\tilde{y}^h(t) - y_k^h| ds dt \\ & \leq \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L \left[(|\tilde{y}^h(t)| + |u_k^h| + 1) |\tilde{y}^h(t) - y_k^h| + |\tilde{y}^h(t) - y_k^h|^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (5.166)$$

Como U_{ad} es compacto, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la Proposición 1.1.7 y el Corolario 5.3.3, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[|\tilde{y}^h(t)| |\tilde{y}^h(t) - y_k^h|] dt & \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathbb{E}[|\tilde{y}^h(t)|^2]]^{\frac{1}{2}} [\mathbb{E}[|\tilde{y}^h(t) - y_k^h|^2]]^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq C_0[|x|^2 + 1]h^{\frac{3}{2}} + C_0[|x|^2 + 1]^{\frac{1}{2}} h\bar{\omega}(h), \end{aligned} \quad (5.167)$$

y también

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[|u_k^h| |\tilde{y}^h(t) - y_k^h|] dt & \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathbb{E}[|u_k^h|^2]]^{\frac{1}{2}} [\mathbb{E}[|\tilde{y}^h(t) - y_k^h|^2]]^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq C_0[|x|^2 + 1]^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} + C_0 h\bar{\omega}(h). \end{aligned} \quad (5.168)$$

De (5.166)-(5.168) y el Corolario 5.3.3, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left| \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\ell(t, \tilde{y}^h(t), u_k^h) - \ell(t, y_k^h, u_k^h)] dt \right| \leq C_1[|x|^2 + 1]h^{\frac{3}{2}} + C_1[|x|^2 + 1]^{\frac{1}{2}} h\bar{\omega}(h). \quad (5.169)$$

Argumentando del mismo modo se puede probar que

$$\mathbb{E} [|g(\tilde{y}^h(t_N)) - g(y_N^h)|] \leq C_1[|x|^2 + 1]h^{\frac{1}{2}} + C_1[|x|^2 + 1]^{\frac{1}{2}}\bar{\omega}(h). \quad (5.170)$$

Luego, concluimos que existe $C > 0$ tal que

$$|J(u^h) - J^h(u^h)| \leq C[|x|^2 + 1]h^{\frac{1}{2}} + C[|x|^2 + 1]^{\frac{1}{2}}\bar{\omega}(h). \quad (5.171)$$

□

Ahora consideramos una sucesión $(N_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $N_j \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$ y definimos $h_j = T/N_j$ y $t_k = kh_j$ ($k = 0, \dots, N_j$). Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0, T]$ y $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tales que

$\varepsilon_j \geq 0$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$. Sea $(\bar{u}^{h_j})_j$ una sucesión de controles ε_j -óptimos para los problemas discretos asociados con $V^{k_j+1}(x)$, donde $k_j \in \{0, \dots, N_j - 1\}$ es tal que $t \in (t_{k_j}, t_{k_j+1}]$. Definimos ahora,

$$\tilde{u}^{h_j}(s) = \begin{cases} \bar{u}_{k_j+1}^{h_j}, & s \in [t, t_{k_j+1}), \\ \bar{u}_m^{h_j}, & s \in [t_m, t_{m+1}), \quad m = k_j + 1, \dots, N_j - 1. \end{cases} \quad (5.172)$$

En el caso $t = 0$ definimos $\tilde{u}^{h_j}(s) = \bar{u}_m^{h_j}$, para todo $s \in [t_m, t_{m+1})$ y $m = 0, \dots, N_j - 1$, donde \bar{u}^{h_j} es un control ε_j -óptimo para el problema discreto asociado a $V^0(x)$. Notemos que de la definición, se tiene $\tilde{u}^{h_j} \in \mathcal{U}_{ad}^t$. Señalamos que si bien \tilde{u}^{h_j} depende de t , para simplificar la notación, omitimos esta dependencia. Ahora probamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.6.2. *Utilizando las mismas notaciones que antes, tenemos*

$$V(t, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} V^{h_j}(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (5.173)$$

donde V^{h_j} fue definido en (5.155), y

$$V(t, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} J^{t,x}(\tilde{u}^{h_j}). \quad (5.174)$$

Además, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, la sucesión $(V^{h_j})_j$ converge uniformemente a V en $[0, T] \times K$.

Demostración. Comenzamos probando la convergencia puntual en (5.173). Sea $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^n$ fijos. Para cada h_j , consideramos la partición de $[0, T]$ dada por $\{t_0, t_1, \dots, t_{N_j}\}$ donde $t_k = kh_j$, para $k = 0, \dots, N_j$. Entonces, si $t \in (0, T]$ para todo $j \in \mathbb{N}$ existe k_j tal que $t \in (t_{k_j}, t_{k_j+1}]$. Si $t = 0$, denotamos $t_{k_j+1} = 0$. Sea ε un número positivo, entonces existe un control $\frac{\varepsilon}{2}$ -óptimo $\bar{u}_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^t$ tal que

$$J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) \leq V(t, x) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.175)$$

Para todo j suficientemente grande, tenemos

$$J^{t_{k_j+1},x}(\bar{u}_\varepsilon) \leq V(t_{k_j+1}, x) + \varepsilon. \quad (5.176)$$

En efecto, de (5.175) y el Teorema 5.5.1 existe $C_0 > 0$, independiente de h_j , tal que,

$$\begin{aligned} J^{t_{k_j+1},x}(\bar{u}_\varepsilon) &= J^{t_{k_j+1},x}(\bar{u}_\varepsilon) - J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) + J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) \\ &\leq C_0 [1 + |x|^2] h_j^{\frac{1}{2}} + V(t, x) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq C_0 [1 + |x|^2] 2h_j^{\frac{1}{2}} + V(t_{k_j+1}, x) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (5.177)$$

Sea $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos que converge a 0. Luego, existe un control ε_j -óptimo, $\bar{u}^{h_j} \in \mathcal{U}_{k_j+1}^{h_j}$ para cada $V^{h_j}(t_{k_j+1}, x)$, i.e.

$$V^{h_j}(t_{k_j+1}, x) \leq J_{k_j+1}^{h_j}(x, \bar{u}^{h_j}) \leq V^{h_j}(t_{k_j+1}, x) + \varepsilon_j. \quad (5.178)$$

Como U_{ad} es compacto, gracias a un resultado de Krylov (ver [56, Sección 3.2, Lema 6]), para cada $\varepsilon' > 0$, existe $N_{\varepsilon'}$ tal que para todo $j \geq N_{\varepsilon'}$ existe $u^{h_j} \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^2$ constante en cada intervalo de la partición $\{t, t_{k_j+1}, \dots, t_{N_j}\}$, tal que

$$\|u^{h_j} - \bar{u}_\varepsilon\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^2} < \varepsilon'. \quad (5.179)$$

Es claro que $u^{h_j} = (u_t^{h_j}, u_{k_j+1}^{h_j}, \dots, u_{N_j}^{h_j})$ pertenece a $L_{\mathcal{F}_t}^2 \times \prod_{i=k_j+1}^{N-1} L_{\mathcal{F}_{t_i}}^2$. Podemos definir $\hat{u}^{h_j} = (u_{k_j+1}^{h_j}, \dots, u_{N_j}^{h_j}) \in \prod_{i=k_j+1}^{N-1} L_{\mathcal{F}_{t_i}}^2$, luego

$$\begin{aligned} |J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) - J_{k_j+1}^{h_j}(x, \hat{u}^{h_j})| &\leq |J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) - J^{t,x}(u^{h_j})| + |J^{t,x}(u^{h_j}) - J^{t_{k_j+1},x}(\hat{u}^{h_j})| \\ &\quad + |J^{t_{k_j+1},x}(\hat{u}^{h_j}) - J_{k_j+1}^{h_j}(x, \hat{u}^{h_j})|. \end{aligned} \quad (5.180)$$

De (5.179) y la continuidad de $J^{t,x}$ en \mathcal{U}_{ad} deducimos que el primer término del lado derecho tiende a cero cuando j tiende a infinito. Del Teorema 5.5.1, y el Lema 5.6.1, existe $C_1 > 0$ tal que,

$$|J^{t,x}(u^{h_j}) - J^{t_{k_j+1},x}(\hat{u}^{h_j})| \leq C_1 [1 + |x|^2] h_j^{\frac{1}{2}}, \quad (5.181)$$

y

$$|J^{t_{k_j+1},x}(\hat{u}^{h_j}) - J_{k_j+1}^{h_j}(x, \hat{u}^{h_j})| \leq C_1 [1 + |x|^2] \left[h_j^{\frac{1}{2}} + \bar{\omega}(h_j) \right]. \quad (5.182)$$

Por lo tanto, para j suficientemente grande tenemos

$$|J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) - J_{k_j+1}^{h_j}(x, \hat{u}^{h_j})| < \varepsilon. \quad (5.183)$$

Como vimos en la Nota 5.4.7, el valor $V^{h_j}(t_{k_j+1}, x)$ es el mismo que si minimizamos sobre el conjunto de controles $\Pi_{i=k_j+1}^{N_j-1} L_{\mathcal{F}_{t_i}}^2$ y como \hat{u}^{h_j} pertenece a ese conjunto, tenemos

$$V^{h_j}(t_{k_j+1}, x) \leq J_{k_j+1}^{h_j}(x, \hat{u}^{h_j}) \leq J^{t,x}(\bar{u}_\varepsilon) + \varepsilon \leq V(t, x) + 2\varepsilon, \quad (5.184)$$

donde en las últimas dos desigualdades utilizamos (5.183) y (5.175). Por otro lado, el Teorema 5.5.1 implica que existe $C_2 > 0$ tal que

$$V(t, x) \leq C_2 [1 + |x|^2] h_j^{\frac{1}{2}} + V(t_{k_j+1}, x). \quad (5.185)$$

Finalmente, del Lema 5.6.1 y (5.178) deducimos la existencia de $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} V(t_{k_j+1}, x) &\leq J^{t_{k_j+1}, x}(\bar{u}^{h_j}) \leq J_{k_j+1}^{h_j}(x, \bar{u}^{h_j}) + C_3 [1 + |x|^2] \left[h_j^{\frac{1}{2}} + \bar{\omega}(h_j) \right] \\ &\leq V^{h_j}(t_{k_j+1}, x) + \varepsilon_j + C_3 [1 + |x|^2] \left[h_j^{\frac{1}{2}} + \bar{\omega}(h_j) \right]. \end{aligned} \quad (5.186)$$

Combinando las últimas tres desigualdades y usando el Teorema 5.5.4, obtenemos la existencia de $C > 0$ tal que para j suficientemente grande,

$$\begin{aligned} |V(t, x) - V^{h_j}(t, x)| &\leq |V(t, x) - V^{h_j}(t_{k_j+1}, x)| + |V^{h_j}(t_{k_j+1}, x) - V^{h_j}(t, x)| \\ &\leq \varepsilon_j + 2\varepsilon + C [1 + |x|^2] \left[h_j^{\frac{1}{2}} + \bar{\omega}(h_j) \right]. \end{aligned} \quad (5.187)$$

Tomando $j \uparrow \infty$ y utilizando la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ obtenemos (5.173).

Ahora probaremos (5.174). Combinando el Teorema 5.5.1 y el Lema 5.6.1, tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |J^{t,x}(\tilde{u}^{h_j}) - J_{k_j+1}^{h_j}(x, \bar{u}^{h_j})| &\leq |J^{t,x}(\tilde{u}^{h_j}) - J^{t_{k_j+1}, x}(\tilde{u}^{h_j})| + |J^{t_{k_j+1}, x}(\bar{u}^{h_j}) - J_{k_j+1}^{h_j}(x, \bar{u}^{h_j})| \\ &\leq C [1 + |x|^2] \left[h_j^{\frac{1}{2}} + \bar{\omega}(h_j) \right]. \end{aligned} \quad (5.188)$$

De (5.186) y (5.173), concluimos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J^{t,x}(\tilde{u}^{h_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} J_{k_j+1}^{h_j}(x, \bar{u}^{h_j}) = V(t, x). \quad (5.189)$$

Por último, sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Del Teorema 5.5.1 y el Lema 5.4.2, deducimos que la sucesión $(V^{h_j})_j$ es uniformemente acotada y uniformemente equicontinua en $[0, T] \times K$. Luego, del Teorema de Ascoli-Arzelá y la convergencia puntual (5.173), deducimos que la sucesión converge uniformemente a V en $[0, T] \times K$. \square

Nota 5.6.3. La relación (5.174) muestra que (\tilde{u}^{h_j}) es una sucesión minimizante para el problema de control óptimo asociado a $V(t, x)$. En particular, podemos tomar (\tilde{u}^{h_j}) la sucesión de controles óptimos discretos feedback construidos en la Nota 5.4.9.

El siguiente resultado muestra que bajo hipótesis de convexidad, tenemos la convergencia de (\tilde{u}^{h_j}) a una solución óptima del problema continuo.

Corolario 5.6.4. A las hipótesis anteriores, le sumamos la hipótesis adicional de que el conjunto U_{ad} es convexo y que $J^{t,x}$ es una función convexa. Luego, existe al menos un punto límite débil de (\tilde{u}^{h_j}) , y todo punto límite $u^* \in \mathcal{U}_{ad}^t$ satisface,

$$J^{t,x}(u^*) = V(t, x). \quad (5.190)$$

Si además suponemos que $J^{t,x}$ es fuertemente convexa, entonces toda la sucesión $(\tilde{u}^{h_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente al único control $u \in \mathcal{U}_{ad}^t$ que verifica (5.190).

Demostración. Primero notemos que como U_{ad} es compacto, el espacio \mathcal{U}_{ad}^t es acotado en $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^2$. Como la función $J^{t,x}$ es convexa y continua, deducimos que es débilmente semicontinua inferiormente, y por lo tanto utilizando los mismos argumentos que los expuestos en los capítulos anteriores, deducimos la existencia de al menos un control óptimo \bar{u} para $V(t, x)$.

Como \tilde{u}^{h_j} es una sucesión acotada en $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^2$, existe una subsucesión (la cual seguimos denotando con \tilde{u}^{h_j}) que converge débilmente a $u^* \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^2$. De la semicontinuidad inferior débil y la ecuación (5.174) deducimos

$$J^{t,x}(u^*) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J^{t,x}(\tilde{u}^{h_j}) = V(t, x). \quad (5.191)$$

Finalmente, si $J^{t,x}$ es fuertemente convexa, la convergencia fuerte se deduce utilizando argumentos clásicos de que toda sucesión minimizante de un problema fuertemente convexo converge fuertemente al único minimizador del problema (ver [30]). \square

Capítulo 6

El algoritmo de Sakawa-Shindo para el caso discreto

En este capítulo mostraremos que, combinando adecuadamente las hipótesis, es posible extender el algoritmo presentado en el Capítulo 4 al problema discreto estudiado en el Capítulo 5. Con este objetivo, definiremos el estado adjunto en este contexto y estudiaremos expansiones de primer orden del estado cuando consideramos perturbaciones en el control. Probaremos que valen condiciones de optimalidad análogas a las del caso continuo en tiempo, las cuales nos permitirán definir el algoritmo para este caso.

6.1. Introducción

Como mencionamos anteriormente en este capítulo estudiaremos condiciones de optimalidad para el problema (P^h) , introducido en el capítulo anterior, las cuales nos permitirán extender el algoritmo de Sakawa-Shindo para este caso. Por una cuestión de completitud, recordamos brevemente el planteo de (P^h) .

6.1.1. Problema en tiempo discreto

Dado $N \in \mathbb{N}$ tomamos $h := T/N$. Definiendo $\Delta W_{j+1} = W(t_{j+1}) - W(t_j)$, para $j = 0, \dots, N-1$ y $\Delta W_0 = 0$ \mathbb{P} -c.s., consideramos la filtración en tiempo discreto $\mathbb{F}^h = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N$

donde $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_k = \sigma(\Delta W_{k'} ; 0 \leq k' \leq k)$. Denotamos $L_{\mathcal{F}_k}^2 := L^2(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$ y definimos $\mathcal{U}^h := \prod_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^2$, al cual dotamos de la norma $\|u\|_{\mathcal{U}^h}^2 := h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}|u_k|^2$.

La ecuación de estado discreto que consideramos es:

$$\begin{cases} y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}) + \sigma(t_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1})\Delta W_k, & k = 1, \dots, N, \\ y_0 = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (6.1)$$

La función de costo discreta $J^h : \mathcal{U}^h \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$J^h(u) := \mathbb{E} \left[h \sum_{k=0}^{N-1} \ell(t_k, y_k, u_k) + g(y_N) \right], \quad (6.2)$$

donde $y = (y_0, \dots, y_N)$ es la solución de (6.1). Finalmente, consideramos el conjunto de controles admisibles como

$$\mathcal{U}_{ad}^h := \{u \in \mathcal{U}^h; u_k \in U_{ad} \text{ } \mathbb{P}\text{-c.s., } \forall k = 0, \dots, N-1\}, \quad (6.3)$$

donde U_{ad} es un subconjunto de \mathbb{R}^r no vacío y cerrado. Entonces, el problema de control óptimo (P^h) que consideramos es

$$\text{Min } J^h(u) \text{ sujeto a } u \in \mathcal{U}_{ad}^h. \quad (P^h)$$

Ahora presentamos las hipótesis que consideraremos a lo largo de este capítulo.

6.1.2. Hipótesis

(H1) Hipótesis sobre la dinámica:

- a) Las funciones $\varphi = f, \sigma$ son $\mathcal{B}([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ -medibles.
- b) Para casi todo $t \in [0, T]$ la aplicación $(y, u) \mapsto \varphi(t, y, u)$ es C^2 y existe una constante $L > 0$ tal que para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U_{ad}$ se tiene

$$\begin{cases} |\varphi(t, y, u)| \leq L[|y| + |u| + 1], \\ |\varphi_y(t, y, u)| + |\varphi_u(t, y, u)| \leq L, \\ |\varphi_{yy}(t, y, u)| + |\varphi_{yu}(t, y, u)| + |\varphi_{uu}(t, y, u)| \leq L, \end{cases} \quad (6.4)$$

(H2) Hipótesis sobre el costo:

- a) Las funciones ℓ y g son respectivamente $\mathcal{B}([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ medibles.
 b) Para casi todo $t \in [0, T]$ la aplicación $(y, u) \mapsto \ell(t, y, u)$ es C^2 , y existe $L > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in U_{ad}$,

$$\begin{cases} |\ell(t, y, u)| \leq L[|y| + |u| + 1]^2, \\ |\ell_y(t, y, u)| + |\ell_u(t, y, u)| \leq L[|y| + |u| + 1], \\ |\ell_{yy}(t, y, u)| + |\ell_{yu}(t, y, u)| + |\ell_{uu}(t, y, u)| \leq L, \end{cases} \quad (6.5)$$

- c) La aplicación $y \mapsto g(y)$ es C^2 y existe $L > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} |g(y)| \leq L[|y| + 1]^2, \\ |g_y(y)| \leq L[|y| + 1], \\ |g_{yy}(y)| \leq L, \end{cases} \quad (6.6)$$

Nota 6.1.1. Notemos que las hipótesis (H1) y (H2) combinan las dos primeras hipótesis del Capítulo 5 junto con la hipótesis (H4) del mismo capítulo. Por lo tanto, el Lema 5.3.1, que establece estimaciones para el estado discreto sigue siendo válido bajo las hipótesis de este capítulo.

6.2. Estado adjunto discreto

Comenzamos definiendo el *Hamiltoniano* para este problema. Sea $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$H(t, y, u, p, q) := \ell(t, y, u) + p \cdot f(t, y, u) + \sum_{j=1}^m q^j \cdot \sigma^j(t, y, u), \quad (6.7)$$

donde $p \cdot f(t, y, u)$ es el producto escalar en \mathbb{R}^n y q^j y σ^j denotan las columnas de las matrices q y σ .

Sea $u = (u_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control discreto dado y sea $y = (y_k)_{k=0}^N$ el estado asociado dado por (6.1). Definimos *el estado adjunto discreto* $(p, q) = ((p_k, q_k))_{k=0}^{N-1}$, asociado a u ,

como la solución de la siguiente ecuación retrógrada discreta en tiempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_k = \mathbb{E}_k[p_{k+1} + h\nabla_y H(t_{k+1}, y_{k+1}, u_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1})], \quad k = 0, \dots, N-2, \\ q_k = \frac{1}{h}\mathbb{E}_k[(p_{k+1} + h\nabla_y H(t_{k+1}, y_{k+1}, u_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}))\Delta W_{k+1}^\top], \quad k = 0, \dots, N-2, \\ p_{N-1} = \mathbb{E}_{N-1}[\nabla g(y_N)], \\ q_{N-1} = \frac{1}{h}\mathbb{E}_{N-1}[\nabla g(y_N)\Delta W_N^\top]. \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Esta definición de estado adjunto discreto fue introducida en [61]. El siguiente resultado nos permitirá demostrar en el Lema 6.2.2 estimaciones importantes para (p, q) .

Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue asumimos que $m = 1$.

Lema 6.2.1. *Bajo las hipótesis (H1)-(H2), el estado adjunto discreto $(p, q) = ((p_k, q_k))_{k=0}^{N-1}$, dado por (6.8) está bien definido y $(p_k, q_k) \in (L_{\mathcal{F}_k}^2)^n \times (L_{\mathcal{F}_k}^2)^{n \times m}$, para todo $k = 0, \dots, N-1$. Además, para todo $(z_{N-1}^v, z_{N-1}^2) \in (L_{\mathcal{F}_{N-1}}^2)^n \times (L_{\mathcal{F}_{N-1}}^2)^{n \times m}$, tenemos*

$$\mathbb{E}[(p_{N-1} + q_{N-1}\Delta W_N) \cdot (z_{N-1}^v + z_{N-1}^2\Delta W_N)] = \mathbb{E}[\nabla g(y_N) \cdot (z_{N-1}^v + z_{N-1}^2\Delta W_N)], \quad (6.9)$$

y para todo $k = 0, \dots, N-2$, y para todo $(z_k^v, z_k^2) \in (L_{\mathcal{F}_k}^2)^n \times (L_{\mathcal{F}_k}^2)^{n \times m}$, se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(p_k + q_k\Delta W_{k+1}) \cdot (z_k^v + z_k^2\Delta W_{k+1})] \\ &= \mathbb{E}[(p_{k+1} + h\nabla_y H(t_{k+1}, y_{k+1}, u_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1})) \cdot (z_k^v + z_k^2\Delta W_{k+1})]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Como consecuencia,

$$\mathbb{E}[|p_{N-1} + q_{N-1}\Delta W_N|^2] \leq \|\nabla g(y_N)\|_{L_{\mathcal{F}_N}^2}^2, \quad (6.11)$$

y

$$\mathbb{E}[|p_k + q_k\Delta W_{k+1}|^2] \leq \|p_{k+1} + h\nabla_y H(t_{k+1}, y_{k+1}, u_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1})\|_{L_{\mathcal{F}_{k+1}}^2}^2. \quad (6.12)$$

Demostración. De las hipótesis y el Lema 5.3.1 deducimos que $\nabla g(y_N) \in (L_{\mathcal{F}_N}^2)^n$ y que existe $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|\nabla g(y_N)\Delta W_N|^2) \leq C_0\mathbb{E}(|\Delta W_N|^2) \\ & + C_0\mathbb{E}(|y_{N-1} + hf(t_{N-1}, y_{N-1}, u_{N-1}) + \sigma(t_{N-1}, y_{N-1}, u_{N-1})\Delta W_N|^2 |\Delta W_N|^2). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Expandiendo el lado derecho de la desigualdad, tomando \mathbb{E}_{N-1} y utilizando el hecho de los momentos de cualquier orden de ΔW_N son finitos, tenemos que $\nabla g(y_N)\Delta W_N \in (L^2_{\mathcal{F}_N})^n$. Luego, de la desigualdad de Jensen obtenemos que $(p_{N-1}, q_{N-1}) \in (L^2_{\mathcal{F}_{N-1}})^n \times (L^2_{\mathcal{F}_{N-1}})^n$. Además, para todo $(z_{N-1}^v, z_{N-1}^2) \in (L^2_{\mathcal{F}_{N-1}})^n \times (L^2_{\mathcal{F}_{N-1}})^n$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(p_{N-1} + q_{N-1}\Delta W_N) \cdot (z_{N-1}^v + z_{N-1}^2\Delta W_N)] &= \mathbb{E} [p_{N-1} \cdot z_{N-1}^v] + h\mathbb{E} [q_{N-1} \cdot z_{N-1}^2] \\ &= \mathbb{E} [\nabla g(y_N) \cdot z_{N-1}^v] \\ &\quad + \mathbb{E} [\nabla g(y_N) \cdot (z_{N-1}^2\Delta W_N)] \\ &= \mathbb{E} [\nabla g(y_N) \cdot (z_{N-1}^v + z_{N-1}^2\Delta W_N)]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Por lo tanto vale (6.9) y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz concluimos (6.11).

Ahora supongamos que para $k \in \{1, \dots, N-1\}$ tenemos definido $p_k, q_k \in (L^2_{\mathcal{F}_k})^n$. Dado que,

$$\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k) = \nabla_y \ell(t_k, y_k, u_k) + f_y(t_k, y_k, u_k)^\top p_k + \sigma_y(t_k, y_k, u_k)^\top q_k, \quad (6.15)$$

de **(H1)** y **(H2)** existe $C_1 > 0$ tal que

$$\mathbb{E}[|\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k)|^2] \leq C_1 (1 + \mathbb{E}[|y_k|^2] + \mathbb{E}[|u_k|^2] + \mathbb{E}[|p_k|^2] + \mathbb{E}[|q_k|^2]). \quad (6.16)$$

Luego, $\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k)$ pertenece a $(L^2_{\mathcal{F}_k})^n$. Como ΔW_k también pertenece al espacio $(L^2_{\mathcal{F}_k})^n$, podemos concluir que (p_{k-1}, q_{k-1}) está bien definido y pertenece a $(L^1_{\mathcal{F}_{k-1}})^n \times (L^1_{\mathcal{F}_{k-1}})^n$. A su vez, de la definición es claro que $p_{k-1} \in (L^2_{\mathcal{F}_{k-1}})^n$. Ahora, sea $z_{k-1}^v \in (L^\infty_{\mathcal{F}_{k-1}})^n$, de la propiedad de la torre de la esperanza condicional, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la isometría de Itô tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [q_{k-1} \cdot z_{k-1}^v] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{h} \mathbb{E}_{k-1} [(p_k + h\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k))\Delta W_k] \cdot z_{k-1}^v \right] \\ &= \frac{1}{h} \mathbb{E} [(p_k + h\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k)) \cdot (\Delta W_k z_{k-1}^v)] \\ &\leq \|p_k + h\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k)\|_{L^2_{\mathcal{F}_k}} \|z_{k-1}^v\|_{L^2_{\mathcal{F}_{k-1}}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

De la densidad de $(L^\infty_{\mathcal{F}_{k-1}})^n$ en $(L^2_{\mathcal{F}_{k-1}})^n$ y el Teorema de representación de Riesz podemos deducir que $q_{k-1} \in (L^2_{\mathcal{F}_{k-1}})^n$. Finalmente, argumentando del mismo modo que en (6.14), obtenemos (6.10), a partir de la cual (6.12) sigue directamente. \square

Lema 6.2.2. *Supongamos que valen (H1) y (H2), entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\max_{k=0, \dots, N-1} \mathbb{E}|p_k|^2 + h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}|q_k|^2 \leq C[|y_0|^2 + \|u\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1]. \quad (6.18)$$

Demostración. Para $k = 1, \dots, N-1$ denotamos, $\varphi^k := \varphi(t_k, y_k, u_k)$ para $\varphi = \ell_y, f_y, \sigma_y$. De (6.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|p_{k-1}|^2] + h\mathbb{E}[|q_{k-1}|^2] &= \mathbb{E}[|p_{k-1} + q_{k-1}\Delta W_k|^2] \\ &\leq \|p_k + h\nabla_y H(t_k, y_k, u_k, p_k, q_k)\|_{L^2_{\mathcal{F}_k}}^2 \\ &\leq \mathbb{E}|p_k|^2 + 3h^2\mathbb{E}[|\nabla_y \ell^k|^2 + |(f_y^k)^\top p_k|^2 + |(\sigma_y^k)^\top q_k|^2] \\ &\quad + 2h\mathbb{E}[p_k \cdot \nabla_y \ell^k + p_k \cdot (f_y^k)^\top p_k + (\sigma_y^k p_k) \cdot q_k]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

De las hipótesis y la desigualdad de Young tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|p_{k-1}|^2 + h\mathbb{E}|q_{k-1}|^2 &\leq \mathbb{E}|p_k|^2 + 3h^2[\mathbb{E}|\nabla_y \ell^k|^2 + L^2\mathbb{E}|p_k|^2 + L^2\mathbb{E}|q_k|^2] \\ &\quad + [h\mathbb{E}|p_k|^2 + h\mathbb{E}|\nabla_y \ell^k|^2] + hL\mathbb{E}|p_k|^2 + [2hL^2\mathbb{E}|p_k|^2 + \frac{h}{2}\mathbb{E}|q_k|^2]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Luego, existe $C_0 > 0$ tal que,

$$\mathbb{E}|p_{k-1}|^2 + h\mathbb{E}|q_{k-1}|^2 \leq [1 + C_0h][\mathbb{E}|p_k|^2 + h\mathbb{E}|q_k|^2] + 4h\mathbb{E}|\nabla_y \ell^k|^2, \quad (6.21)$$

de donde deducimos

$$\max_{k=0, \dots, N-1} [\mathbb{E}|p_k|^2 + h\mathbb{E}|q_k|^2] \leq [1 + C_0h]^{N-1} \mathbb{E}|\nabla_y g(y_N)|^2 + 4h \sum_{k=1}^{N-1} [1 + C_0h]^{k-1} \mathbb{E}|\nabla_y \ell^k|^2. \quad (6.22)$$

De (H2), y el Lema 5.3.1, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \max_{k=0, \dots, N-1} [\mathbb{E}|p_k|^2 + h\mathbb{E}|q_k|^2] &\leq e^{C_0T} 2L^2[\mathbb{E}|y_N|^2 + 1] + 4e^{C_0T} h \sum_{k=1}^{N-1} 3L^2[\mathbb{E}|y_k|^2 + |u_k|^2 + 1] \\ &\leq e^{C_0T} C_1[|y_0|^2 + \|u\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ahora, sumando en k en la segunda desigualdad de (6.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E}|q_k|^2 &\leq [1 + C_0h]\mathbb{E}|\nabla_y g(y_N)|^2 - [\mathbb{E}|p_0|^2 + h\mathbb{E}|q_0|^2] \\ &\quad + Ch \sum_{k=1}^{N-2} [\mathbb{E}|p_k|^2 + h\mathbb{E}|q_k|^2] + 4h \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E}|\nabla_y \ell^k|^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

De (H2), (6.23), (6.24), y el Lema 5.3.1 se deduce el resultado. \square

6.3. Expansiones de primer orden

A lo largo de esta sección, para $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ y $v \in \mathcal{U}^h$ dados, denotamos con \bar{y} al estado asociado a \bar{u} y con \bar{y}^v al estado asociado al control $\bar{u} + v$. También utilizaremos la notación para todo $k = 0, \dots, N$,

$$\bar{\varphi}(t_k) := \varphi(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k), \quad \bar{\varphi}_k^v := \varphi(t_k, \bar{y}_k^v, \bar{u}_k + v_k), \quad \Delta y_k := \bar{y}_k^v - \bar{y}_k, \quad (6.25)$$

y finalmente

$$\Delta \varphi_k := \varphi(t_k, \bar{y}_k^v, \bar{u}_k + v_k) - \varphi(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k), \quad (6.26)$$

para $\varphi = f, \sigma, \ell$ y sus derivadas parciales.

Lema 6.3.1. *Si vale (H1), para todo $p \geq 2$ existe $C_p > 0$ tal que para cada $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ y $v \in \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^p$, definiendo $\|v\|_p^p := h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} [|v_k|^p]$, obtenemos*

$$\mathbb{E} \left[\max_{k=0, \dots, N} |\Delta y_k|^p \right] \leq C_p \|v\|_p^p. \quad (6.27)$$

Demostración. Como $\Delta y_0 = 0$, para todo $k = 0, \dots, N$ tenemos,

$$\Delta y_{k+1} = h \sum_{j=0}^k \Delta f_j + \sum_{j=0}^k \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1}, \quad (6.28)$$

y entonces,

$$|\Delta y_{k+1}|^p \leq 2^{p-1} \left[\left| h \sum_{j=0}^k \Delta f_j \right|^p + \left| \sum_{j=0}^k \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1} \right|^p \right]. \quad (6.29)$$

De (H1) obtenemos,

$$\begin{aligned} \left| h \sum_{j=0}^k \Delta f_j \right|^p &\leq h^p N^{p-1} \sum_{j=0}^k |\Delta f_j|^p \\ &\leq T^{p-1} 2^{p-1} L^p h \sum_{j=0}^k [|\Delta y_j|^p + |v_j|^p]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

De (H1) y la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, existe $K_p > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{0 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=0}^i \Delta \sigma_j \Delta W_{j+1} \right|^p \right] &\leq K_p \mathbb{E} \left[\left(h \sum_{j=0}^k |\Delta \sigma_j|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq K_p N^{\frac{p}{2}-1} h^{\frac{p}{2}} \sum_{j=0}^k \mathbb{E} [|\Delta \sigma_j|^p] \\ &\leq K_p T^{\frac{p}{2}-1} 2^{p-1} L^p h \sum_{j=0}^k \mathbb{E} [|\Delta y_j|^p + |v_j|^p]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Combinando (6.29), (6.30) y (6.31), del Lema de Grönwall's discreto, deducimos (6.27). \square

Con el objetivo de estudiar expansiones de primer orden para el estado y el funcional de costo, para cada $v \in \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^p$, con $p \geq 2$, definimos z^v como la solución del siguiente sistema linealizado:

$$\begin{cases} z_{k+1}^v &= z_k^v + h[\bar{f}_y(t_k)z_k^v + \bar{f}_u(t_k)v_k] + [\bar{\sigma}_y(t_k)z_k^v + \bar{\sigma}_u(t_k)v_k]\Delta W_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ z_0^v &= 0. \end{cases} \quad (6.32)$$

Con argumentos similares a los expuestos en el lema previo, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 6.3.2. *Si vale (H1), para todo $p \geq 2$ existe $C_p > 0$ tal que para cada $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ y $v \in \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^p$,*

$$\mathbb{E} \left[\max_{k=0, \dots, N} |z_k^v|^p \right] \leq C_p \|v\|_p^p. \quad (6.33)$$

Lema 6.3.3. *Supongamos que vale (H1). Sea $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control fijo, para todo $p \geq 2$ existe $C_p > 0$ tal que para cada $v \in \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^{2p}$, definiendo $d_k^v := \Delta y_k - z_k^v$ para todo $k = 0, \dots, N$, tenemos*

$$\mathbb{E} \left[\max_{k=0, \dots, N} |d_k^v|^p \right] \leq C_p \|v\|_{2p}^{2p}. \quad (6.34)$$

Demostración. De (H1) se tiene

$$\begin{cases} \Delta y_{k+1} &= \Delta y_k + h[\tilde{f}_y(t_k)\Delta y_k + \tilde{f}_u(t_k)v_k] + [\tilde{\sigma}_y(t_k)\Delta y_k + \tilde{\sigma}_u(t_k)v_k]\Delta W_{k+1}, \\ \Delta y_0 &= 0, \end{cases} \quad (6.35)$$

donde para $\varphi = f_y, f_u, \sigma_y, \sigma_u$ definimos

$$\tilde{\varphi}(t_k) := \int_0^1 \varphi(t_k, \bar{y}_k + \theta \Delta y_k, \bar{u}_k + \theta v_k) d\theta. \quad (6.36)$$

Para todo $k = 0, \dots, N$, obtenemos

$$\begin{aligned} d_{k+1}^v &= d_k^v + h[\tilde{f}_y(t_k)\Delta y_k - \bar{f}_y(t_k)z_k^v + (\tilde{f}_u(t_k) - \bar{f}_u(t_k))v_k] \\ &\quad + [\tilde{\sigma}_y(t_k)\Delta y_k - \bar{\sigma}_y(t_k)z_k^v + (\tilde{\sigma}_u(t_k) - \bar{\sigma}_u(t_k))v_k]\Delta W_{k+1}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Definimos para $\varphi = f, \sigma$,

$$\Phi_k(\varphi) := \tilde{\varphi}_y(t_k)\Delta y_k - \bar{\varphi}_y(t_k)z_k^v + (\tilde{\varphi}_u(t_k) - \bar{\varphi}_u(t_k))v_k. \quad (6.38)$$

Luego, tenemos

$$d_{k+1}^v = h \sum_{j=0}^k \Phi_j(f) + \sum_{j=0}^k \Phi_j(\sigma)\Delta W_{j+1}. \quad (6.39)$$

Siguiendo las idea de la prueba del Lema 6.3.1, de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy existe \bar{C}_p tal que

$$\mathbb{E} \left[\max_{j=0, \dots, k+1} |d_j^v|^p \right] \leq \bar{C}_p h \left[\sum_{j=0}^k \mathbb{E} [|\Phi_j(f)|^p] + \sum_{j=0}^k \mathbb{E} [|\Phi_j(\sigma)|^p] \right]. \quad (6.40)$$

De **(H1)** tenemos,

$$\begin{aligned} |\Phi_k(\varphi)| &\leq |\tilde{\varphi}_y(t_k) - \bar{\varphi}_y(t_k)| |\Delta y_k| + |\bar{\varphi}_y(t_k)| |\Delta y_k - z_k^v| + |\tilde{\varphi}_u(t_k) - \bar{\varphi}_u(t_k)| |v_k| \\ &\leq L [|\Delta y_k| + |v_k|] |\Delta y_k| + L |d_k^v| + L [|\Delta y_k| + |v_k|] |v_k| \\ &\leq L [2|\Delta y_k|^2 + 2|v_k|^2 + |d_k^v|], \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde la última desigualdad se deduce de aplicar la desigualdad de Young. Luego, existe $C_0 > 0$ tal que

$$|\Phi_k(\varphi)|^p \leq C_0 [|\Delta y_k|^{2p} + |v_k|^{2p} + |d_k^v|^p]. \quad (6.42)$$

Por lo tanto combinando (6.40), el Lema 6.3.1 y la última desigualdad, el resultado sigue de aplicar el Lema de Grönwall's discreto. \square

Ahora, antes de estudiar la expansión de primer orden para el costo J^h necesitamos el siguiente resultado:

Lema 6.3.4. *Bajo las hipótesis **(H1)** y **(H2)** tenemos*

$$h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k] = h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k)z_k^v + \bar{\ell}_u(t_k)v_k] + \mathbb{E}[g_y(\bar{y}_N)z_N^v]. \quad (6.43)$$

Demostración. De (6.9) en el Lema 6.2.1 tenemos

$$\mathbb{E}[g_y(\bar{y}_N)z_N^v] = \mathbb{E}[(\bar{p}_{N-1} + \bar{q}_{N-1}\Delta W_N) \cdot z_N^v]. \quad (6.44)$$

Además, de (6.10), para todo $k = 1, \dots, N - 2$ deducimos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\bar{p}_k + \bar{q}_k \Delta W_{k+1}) \cdot z_{k+1}^v] &= \mathbb{E}[\bar{p}_k \cdot (z_k^v + h[\bar{f}_y(t_k)z_k^v + \bar{f}_u(t_k)v_k])] \\
&\quad + h\mathbb{E}[\bar{q}_k \cdot (\bar{\sigma}_y(t_k)z_k^v + \bar{\sigma}_u(t_k)v_k)] \\
&= \mathbb{E}[(\bar{p}_k + h[(\bar{f}_y(t_k))^\top \bar{p}_k + (\bar{\sigma}_y(t_k))^\top \bar{q}_k]) \cdot z_k^v] \\
&\quad + h\mathbb{E}[(\bar{f}_u(t_k))^\top \bar{p}_k + \bar{\sigma}_u(t_k)^\top \bar{q}_k] \cdot v_k] \\
&= \mathbb{E}[(\bar{p}_{k-1} + \bar{q}_{k-1} \Delta W_k) \cdot z_k^v] - h\mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k)z_k^v] \\
&\quad + h\mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k, k)v_k] - h\mathbb{E}[\bar{\ell}_u(t_k)v_k].
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Sumando (6.44), (6.45) y utilizando el hecho que $z_0^v = 0$, obtenemos (6.43). \square

Teorema 6.3.5. *Supongamos que valen (H1) y (H2). Sea $\bar{u} = (\bar{u}_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control dado y sean (\bar{y}_k) , (\bar{p}_k, \bar{q}_k) el estado y el estado adjunto asociados. Entonces, para todo $v \in \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^4$ tenemos*

$$J^h(\bar{u} + v) = J^h(\bar{u}) + h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k] + O(\|v\|_4^2). \tag{6.46}$$

Demostración. Observemos que

$$J^h(\bar{u} + v) - J^h(\bar{u}) = h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\Delta \ell_k] + \mathbb{E}[g(\bar{y}_N^v) - g(\bar{y}_N)]. \tag{6.47}$$

Además,

$$\Delta \ell_k = \bar{\ell}_y(t_k) \Delta y_k + \bar{\ell}_u(t_k) v_k + \int_0^1 (1 - \theta) \ell_{(y,u)^2}(t_k, \bar{y}_k + \theta \Delta y_k, \bar{u}_k + \theta v_k) (\Delta y_k, v_k)^2 d\theta. \tag{6.48}$$

De (H2) y la desigualdad de Young,

$$|\Delta \ell_k - \bar{\ell}_y(t_k) \Delta y_k - \bar{\ell}_u(t_k) v_k| \leq 2L [|\Delta y_k|^2 + |v_k|^2]. \tag{6.49}$$

Análogamente,

$$|g(\bar{y}_N^v) - g(\bar{y}_N) - g_y(\bar{y}_N)| \leq L |\Delta y_N|^2. \tag{6.50}$$

Al igual que en la prueba anterior, denotamos $d_k^v := \Delta y_k - z_k^v$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} J^h(\bar{u} + v) - J^h(\bar{u}) &= \left[h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k) z_k^v + \bar{\ell}_u(t_k) v_k] + \mathbb{E}[g_y(\bar{y}_N) z_N^v] \right] \\ &= h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k) d_k^v] + h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[O(|\Delta y_k|^2 + |v_k|^2)] + \mathbb{E}[g_y(\bar{y}_N) d_N^v + O(|\Delta y_N|^2)]. \end{aligned} \quad (6.51)$$

De **(H2)** y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k) d_k^v] \right|^2 &\leq N h^2 \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k) d_k^v])^2 \\ &\leq T h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[|\bar{\ell}_y(t_k)|^2] \mathbb{E}[|d_k^v|^2] \\ &\leq T h L_3 \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbb{E}|\bar{y}_k|^2 + \mathbb{E}|\bar{u}_k|^2 + 1] \mathbb{E}[|d_k^v|^2]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Del Lema 5.3.1 podemos concluir que existe $C_0 > 0$ tal que

$$\left| h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k) d_k^v] \right|^2 \leq C_0 [|y_0|^2 + \|\bar{u}\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] \max_{k=0, \dots, N} \mathbb{E}[|d_k^v|^2]. \quad (6.53)$$

Análogamente tenemos,

$$|\mathbb{E}[g_y(\bar{y}_N) d_N^v]|^2 \leq C_0 [|y_0|^2 + \|\bar{u}\|_{\mathcal{U}^h}^2 + 1] \max_{k=0, \dots, N} \mathbb{E}[|d_k^v|^2]. \quad (6.54)$$

Como $\|v\|_{\mathcal{U}^h}^2 \leq \|v\|_4^2$, utilizando el Lema 6.3.1 y Lema 6.3.3, y combinando (6.51), (6.53) y (6.54) obtenemos

$$J^h(\bar{u} + v) - J^h(\bar{u}) - \left[h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{\ell}_y(t_k) z_k^v + \bar{\ell}_u(t_k) v_k] + \mathbb{E}[g_y(\bar{y}_N) z_N^v] \right] = O(\|v\|_4^2). \quad (6.55)$$

Del lema previo podemos concluir el resultado. \square

6.4. Condición de optimalidad de primer orden

Ahora probaremos una condición de optimalidad de primer orden para el problema (P^h) . Esta condición de optimalidad está relacionada con el PMP, pero no podemos llamarla *principio del mínimo* ya que, en general, el Hamiltoniano no es minimizado. Esta condición nos permitirá extender el algoritmo del Capítulo 4 para el caso discreto.

Teorema 6.4.1. *Supongamos que valen (H1) y (H2) y que U_{ad} es convexo. Sea $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ una solución local de (P^h) . Entonces, para todo $k = 0, \dots, N-1$, tenemos*

$$H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v \geq 0, \quad \forall v \in T_{U_{ad}}(u_k), \quad \mathbb{P}\text{-c.s.} \quad (6.56)$$

o equivalentemente $H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)(u - \bar{u}_k) \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}.$

Demostración. De (6.46), si \bar{u} es una solución local, obtenemos

$$h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k] \geq 0, \quad (6.57)$$

para todo $v \in R_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u}) \cap \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^4$. Como el conjunto U_{ad} es convexo, siguiendo las ideas de [31, Lemma 4.5], se puede probar que

$$T_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u}) = \text{cl}_{\mathcal{U}^h}(R_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u}) \cap \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^4) = \text{cl}_{\mathcal{U}^h}(R_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u}) \cap \Pi_{k=0}^{N-1} L_{\mathcal{F}_k}^\infty), \quad (6.58)$$

y que

$$T_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u}) = \{v \in \mathcal{U}^h : v_k(\omega) \in T_{U_{ad}}(\bar{u}_k(\omega)), \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}, \quad \forall k = 0, \dots, N-1\}. \quad (6.59)$$

De las hipótesis se tiene que $H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k) \in L_{\mathcal{F}_k}^2$, para todo $k = 0, \dots, N-1$. Pasando al límite en (6.57) y teniendo en cuenta (6.58) y (6.59), podemos concluir que

$$h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k] \geq 0, \quad \forall v \in T_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u}). \quad (6.60)$$

Como $v \in T_{\mathcal{U}_{ad}^h}(\bar{u})$ es arbitrario, deducimos que vale (6.56). \square

Nota 6.4.2. *El Teorema 6.4.1 extiende al Teorema 3.1 de [61], el cual es uno de los principales resultados de ese trabajo. De hecho, contrariamente a [61, Sección III, Hipótesis 1] no asumimos que las derivadas del funcional de las funciones de costo ℓ y g son acotadas, lo cual nos permite, por ejemplo, considerar un costo cuadrático. Más aún, en nuestro enfoque es posible considerar restricciones para el control, y por lo tanto las variaciones que se consideran en el prueba de [61, Teorema 3.1] no son posibles de considerar en nuestro caso. Es por ello que en la prueba del teorema anterior consideramos ciertas perturbaciones radiales y luego concluimos utilizando un resultado de densidad.*

6.5. El algoritmo de Sakawa-Shindo para el caso discreto

A lo largo de esta sección asumimos que $U_{ad} \subset \mathbb{R}^r$ es convexo. Nuestro objetivo es extender el algoritmo presentado en el Capítulo 4 al problema en tiempo discreto. El algoritmo está basado en la condición de optimalidad presentada en el Teorema 6.4.1.

Introducimos una hipótesis adicional que usaremos en algunos de los resultados de esta sección.

(H3) Al menos alguna de las siguientes hipótesis se satisface:

- (a) Para casi todo $t \in [0, T]$ la aplicación $(y, u) \mapsto \sigma(t, y, u)$ es afín y además la siguiente condición de Lipschitz para el costo es satisfecha: existe $L \geq 0$ tal que para casi todo $t \in [0, T]$ y para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y $u, \bar{u} \in U_{ad}$,

$$\begin{cases} |\ell(t, y, u) - \ell(t, \bar{y}, \bar{u})| \leq L(|y - \bar{y}| + |u - \bar{u}|), \\ |g(y) - g(\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|. \end{cases} \quad (6.61)$$

- (b) Para $\varphi = f, \sigma$ y para todo $t \in [0, T]$ la aplicación $(y, u) \mapsto \varphi(t, y, u)$ es afín.

Como consecuencia de esta hipótesis tenemos el siguiente resultado de diferenciabilidad que será de suma importancia en esta sección.

Teorema 6.5.1. *Supongamos que (H1) y (H2) valen y que o bien se satisface (6.61), i.e. el costo es Lipschitz, o bien se satisface (H3)-(b). Entonces, la función J^h es Gâteaux diferenciable en cada $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}^h$, y la derivada direccional está dada por*

$$DJ^h(\bar{u})v = h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k], \quad \forall v \in \mathcal{U}^h, \quad (6.62)$$

donde \bar{y} y (\bar{p}, \bar{q}) son el estado y estado adjunto, respectivamente, asociados a \bar{u} .

Demostración. Antes que nada, si suponemos que (H3)-(b) vale, entonces $\Delta y_k = z_k^v$ para todo k y con los mismos argumentos que en la prueba del Teorema 6.3.5 (ver (6.51)), se tiene que

$$J^h(\bar{u} + v) = J^h(\bar{u}) + h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k] + O(\|v\|_{\mathcal{U}^h}^2), \quad \forall v \in \mathcal{U}^h. \quad (6.63)$$

Como $H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k) \in L^2_{\mathcal{F}_k}$ para todo $k = 0, \dots, N-1$, deducimos que J^h es Gâteaux diferenciable en \bar{u} y vale (6.62).

En el caso general, el Teorema 6.3.5 implica que para toda $v \in \Pi_{j=0}^{N-1} L^4_{\mathcal{F}_j}$ se tiene

$$(J^h)'(\bar{u})v := \lim_{s \downarrow 0} \frac{J^h(\bar{u} + sv) - J^h(\bar{u})}{s} = h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)v_k]. \quad (6.64)$$

Si se satisface (6.61), la igualdad anterior sigue siendo válida para todo $v \in \mathcal{U}^h$. En efecto, la hipótesis (6.61), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 6.3.1, implican la existencia de $L_J > 0$ tal que

$$|J^h(u) - J^h(u')| \leq L_J \|u - u'\|_{\mathcal{U}^h}, \quad \forall u, u' \in \mathcal{U}^h. \quad (6.65)$$

Como para todo $k = 0, \dots, N-1$, el espacio $L^4_{\mathcal{F}_k}$ es denso en $L^2_{\mathcal{F}_k}$, para cada dirección $v \in \mathcal{U}^h$ existe una sucesión $(v^j)_j \subset \Pi_{j=0}^{N-1} L^4_{\mathcal{F}_j}$ tal que $\|v^j - v\|_{\mathcal{U}^h} \rightarrow 0$. Sea $\varepsilon > 0$ un número positivo cualquiera. Si notamos $\bar{H}_u(k) = H_u(t_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{q}_k)$ tenemos para todo $s > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{J^h(\bar{u}+sv) - J^h(\bar{u})}{s} - h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{H}_u(k)v_k] \right| &\leq \left| \frac{J^h(\bar{u}+sv) - J^h(\bar{u})}{s} - \frac{J^h(\bar{u}+sv^j) - J^h(\bar{u})}{s} \right| \\ &+ \left| \frac{J^h(\bar{u}+sv^j) - J^h(\bar{u})}{s} - h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{H}_u(k)v_k^j] \right| \\ &+ \left| h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\bar{H}_u(k)(v_k^j - v_k)] \right|. \end{aligned} \quad (6.66)$$

De (6.65) y el hecho que $(\bar{H}_u(k))_{k=0}^{N-1} \in \Pi_{k=0}^{N-1} L^2_{\mathcal{F}_k}$ podemos elegir $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que el primero y último término del lado derecho de (6.66) sean inferiores a $\varepsilon/3$. Luego, para ese j , sabemos que vale (6.64) para $v = v^j$. Por lo tanto, si s es lo suficientemente chico, el segundo término en (6.66) es también inferior a $\varepsilon/3$. De la arbitrariedad de ε se concluye el resultado. \square

Nota 6.5.2. De [30, Proposición 2.49] deducimos que si se satisface (6.61), entonces J^h es también Hadamard diferenciable (ver por ejemplo [30, Definición 2.45]).

6.5.1. Versión discreta del algoritmo de Sakawa-Shindo

En esta sección, basados en [25], [66] y el Capítulo 4, proponemos un algoritmo para resolver el problema discreto (P^h) . Nuevamente, para $\varepsilon > 0$ definimos el *Hamiltoniano*

aumentado como

$$\begin{aligned} K_\varepsilon^h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, y, u, v, p, q) &\mapsto H(t, y, u, p, q) + \frac{1}{2\varepsilon} |u - v|^2. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Consideramos entonces el siguiente algoritmo:

Algoritmo 6.1.

Paso 1 Elegir $u^0 = (u_k^0)_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control admisible y $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos dados. Utilizando (6.1), calcular el estado $y^0 = (y_k^0)_{k=0}^N$ asociado a u^0 . Definir $\nu := 0$

Paso 2 Calcular el estado adjunto p^ν and q^ν , solución de (6.8), asociado al par (y^ν, u^ν) .

Paso 3 Definir $\nu := \nu + 1$. Calcular u^ν y y^ν tal que y^ν es el estado correspondiente a u^ν y

$$u_k^\nu(\omega) = \operatorname{argmin} \{ K_{\varepsilon_\nu}(t_k, y_k^\nu(\omega), u, u_k^{\nu-1}(\omega), p_k^{\nu-1}(\omega), q_k^{\nu-1}(\omega)) ; u \in U_{ad} \}, \quad (6.68)$$

para todo $k = 0, \dots, N - 1$ y para casi todo $\omega \in \Omega$.

Paso 4 Parar si algún test de convergencia es satisfecho. En otro caso, volver al **Paso 2**.

6.5.2. Buena definición del algoritmo

En esta sección analizamos la buena definición del método propuesto y veremos que casi todos los resultados del Capítulo 4 siguen siendo válidos para este marco discreto en tiempo. Algunas pruebas son similares a las presentadas anteriormente, pero por completitud presentaremos al menos un esbozo de las mismas.

Lema 6.5.3. *Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3)-(a). Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$|p_k| \leq C(h), \quad \mathbb{P} - c.s., \quad \forall k = 0, \dots, N - 1. \quad (6.69)$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$ un control dado y sean $y = (y_k)_{k=0}^N$, $p = (p_k)_{k=0}^{N-1}$ y $q = (q_k)_{k=0}^{N-1}$ el estado y estado adjunto asociados a u . De **(H3)-(a)** tenemos $|\nabla g(y_N)| \leq L$, \mathbb{P} -c.s., luego

$$|p_{N-1}| = \mathbb{E}_{N-1}[\nabla g(y_N)] \leq L, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.} \quad (6.70)$$

De la definición, la desigualdad de Jensen y la isometría de Itô obtenemos,

$$\begin{aligned} h^2|q_{N-1}|^2 &= |\mathbb{E}_{N-1}[\nabla g(y_N)\Delta W_N]|^2 \\ &\leq \mathbb{E}_{N-1}[|\nabla g(y_N)|^2|\Delta W_N|^2] \\ &\leq L^2h. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Podemos entonces concluir que

$$|p_{N-1}|^2 + h|q_{N-1}|^2 \leq C^{N-1} := 2L^2, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.} \quad (6.72)$$

Ahora, asumimos que $|p_k|^2 + h|q_k|^2 \leq C^k$, \mathbb{P} -c.s. De las hipótesis **(H1)** y **(H3)-(a)**, tenemos $|\ell_y|$, $|f_y|$ y $|\sigma_y|$ acotados por L , luego de la desigualdad de Young se tiene,

$$\begin{aligned} |p_k + h[\ell_y^k + f_y^k \cdot p_k + \sigma_y^k \cdot q_k]|^2 &\leq |p_k|^2 + 3h^2[|\ell_y^k|^2 + L^2|p_k|^2 + L^2|q_k|^2] \\ &\quad + [h|p_k|^2 + h|\ell_y^k|^2] + hL|p_k|^2 + [hL^2|p_k|^2 + h|q_k|^2] \\ &= |p_k|^2[1 + 3h^2L^2 + h + hL + hL^2] + h|q_k|^2[1 + 3hL^2] \\ &\quad + |\ell_y^k|^2[3h^2 + h]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Por lo tanto, existe $C_0 > 0$ y $C_1 > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} |p_k + h[\ell_y^k + f_y^k \cdot p_k + \sigma_y^k \cdot q_k]|^2 &\leq [1 + C_0h][|p_k|^2 + h|q_k|^2] + C_1h \\ &\leq [1 + C_0h]C^k + C_1h, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned} |p_{k-1}|^2 &\leq \mathbb{E}_{k-1}[|p_k + h[\ell_y^k + f_y^k \cdot p_k + \sigma_y^k \cdot q_k]|^2] \\ &\leq [1 + C_0h]C^k + C_1h, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.} \end{aligned} \quad (6.75)$$

Análogamente de la isometría de Itô tenemos,

$$\begin{aligned} h|q_{k-1}|^2 &\leq \frac{1}{h}\mathbb{E}_{k-1}[|p_k + h[\ell_y^k + f_y^k \cdot p_k + \sigma_y^k \cdot q_k]|^2|\Delta W_k|^2] \\ &\leq [1 + C_0h]C^k + C_1h, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.} \end{aligned} \quad (6.76)$$

Luego, obtenemos

$$|p_{k-1}|^2 + h|q_{k-1}|^2 \leq C^{k-1} := 2[1 + C_0h]C^k + 2C_1h, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.} \quad (6.77)$$

y de (6.72) esto implica que

$$|p_j|^2 + h|q_j|^2 \leq 2^N e^{C_0T} 2L^2 + 2^N T e^{C_0T} C_1, \quad \mathbb{P} - \text{c.s.}, \quad (6.78)$$

para todo $j = 0, \dots, N - 1$.

□

Nota 6.5.4. *Observemos que en el Lema 4.3.1 del Capítulo 4, obtuvimos que el estado adjunto p es acotado c.s. por una constante C la cual es independiente del control dado. En el Lema 6.5.3, también obtuvimos que $C(h)$ no depende del control $u \in \mathcal{U}_{ad}^h$, pero claramente depende de h . Como el objetivo del algoritmo es encontrar soluciones para (P^h) con h fijo, esta dependencia no será un problema para lo que sigue.*

De nuestras hipótesis, el Lema 6.5.3 y el Lema 4.3.2 surge de inmediato el siguiente resultado.

Lema 6.5.5. *Asumimos que (H1)-(H3) se satisfacen. Definiendo la aplicación*

$$u_\varepsilon : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathbb{R}^{n \times m} \times U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}^r \quad (6.79)$$

donde $P := B(0, C)$ (bola en \mathbb{R}^n) si vale (H3)-(a), y $P = \mathbb{R}^n$ si vale (H3)-(b), como

$$u_\varepsilon(t, y, p, q, v) := \operatorname{argmin}\{K_\varepsilon(t, y, u, v, p, q) ; u \in U_{ad}\}. \quad (6.80)$$

Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$ independientes de (t, ω) , tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$, u_ε está bien definido y para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ y todo $(y^i, p^i, q^i, v^i) \in \mathbb{R}^n \times P \times \mathbb{R}^{n \times m} \times U_{ad}$, $i = 1, 2$ se tiene:

$$|u_\varepsilon(t, y^2, p^2, q^2, v^2) - u_\varepsilon(t, y^1, p^1, q^1, v^1)| \leq 2|v^2 - v^1| + \alpha(|y^2 - y^1| + |p^2 - p^1| + |q^2 - q^1|). \quad (6.81)$$

Estamos ahora en condiciones de poder demostrar la buena definición de algoritmo presentado.

Teorema 6.5.6. *Bajo las hipótesis anteriores, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\varepsilon_\nu < \varepsilon_0$ para todo ν , entonces el algoritmo define una única sucesión $\{u^\nu\}$ de controles admisibles.*

Demostración. Dado $u^0 = (u_k^0)_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}_{ad}^h$, podemos calcular el estado discreto asociado $y^0 = (y_k^0)$. Ahora, supongamos que tenemos $u^\nu = (u_k^\nu)$ y $y^\nu = (y_k^\nu)$, de (6.8) podemos obtener $p^\nu = (p_k^\nu)$ y $q^\nu = (q_k^\nu)$. Conocemos la condición inicial $y_0^{\nu+1} = x$, y si asumimos que conocemos $y_k^{\nu+1}$ para $k \in \{0, \dots, N-1\}$, entonces podemos calcular

$$u_k^{\nu+1} = u_{\varepsilon_{\nu+1}}(t_k, y_k^{\nu+1}, p_k^\nu, q_k^\nu, u_k^\nu). \quad (6.82)$$

Finalmente, de (6.1) obtenemos

$$y_{k+1}^{\nu+1} = y_k^{\nu+1} + hf(t_k, y_k^{\nu+1}, u_k^{\nu+1}) + \sigma(t_k, y_k^{\nu+1}, u_k^{\nu+1})\Delta W_{k+1}. \quad (6.83)$$

Podemos continuar con esta recurrencia hasta N , y luego calcular $p^{\nu+1}$ y $q^{\nu+1}$. Por lo tanto, es claro que el algoritmo define una única sucesión $\{u^\nu\}$. \square

6.5.3. Convergencia del algoritmo

En esta sección probaremos que el algoritmo propuesto es un método de descenso y que, bajo hipótesis de convexidad, todo punto límite débil de la sucesión generada por el algoritmo es un control óptimo para (P^h) .

El siguiente resultado es la versión discreta análoga del Teorema 4.4.2.

Teorema 6.5.7. *Bajo las hipótesis (H1)-(H3), existe $\alpha > 0$ tal que para toda sucesión generada por el algoritmo se satisface*

$$J^h(u^\nu) - J^h(u^{\nu-1}) \leq - \left(\frac{1}{\varepsilon_\nu} - \alpha \right) \|u^\nu - u^{\nu-1}\|_{\mathcal{U}^h}^2. \quad (6.84)$$

Demostración. Para $\nu \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, N$ y $\varphi = f, \sigma, \ell$, denotamos $\varphi_k^\nu := \varphi(t_k, y_k^\nu, u_k^\nu)$. De

la definición surge que

$$\begin{aligned}
J^h(u^\nu) - J^h(u^{\nu-1}) &= \mathbb{E} \left[h \sum_{k=0}^{N-1} [\ell_k^\nu - \ell_k^{\nu-1}] + g(y_N^\nu) - g(y_N^{\nu-1}) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} [hH(t_k, y_k^\nu, u_k^\nu, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1}) \right. \\
&\quad \left. - hH(t_k, y_k^{\nu-1}, u_k^{\nu-1}, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1}) \right. \\
&\quad \left. - h(p_k^{\nu-1}, f_k^\nu - f_k^{\nu-1}) - h(q_k^{\nu-1}, \sigma_k^\nu - \sigma_k^{\nu-1}) \right] \\
&\quad \left. + g(y_N^\nu) - g(y_N^{\nu-1}) \right]. \tag{6.85}
\end{aligned}$$

Podemos ver que para todo $k = 0, \dots, N - 2$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[h(p_k^{\nu-1}, f_k^\nu - f_k^{\nu-1}) + h(q_k^{\nu-1}, \sigma_k^\nu - \sigma_k^{\nu-1})] \\
&= \mathbb{E}[(p_k^{\nu-1} + q_k^{\nu-1} \Delta W_{k+1}) \cdot (h[f_k^\nu - f_k^{\nu-1}] + [\sigma_k^\nu - \sigma_k^{\nu-1}] \Delta W_{k+1})] \\
&= \mathbb{E}[(p_k^{\nu-1} + q_k^{\nu-1} \Delta W_{k+1}) \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1} - y_k^\nu + y_k^{\nu-1})] \\
&= \mathbb{E}[(p_{k+1}^{\nu-1} + hH_y(t_{k+1}, y_{k+1}^{\nu-1}, u_{k+1}^{\nu-1}, p_{k+1}^{\nu-1}, q_{k+1}^{\nu-1})) \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1})] \\
&\quad - \mathbb{E}[(p_k^{\nu-1} + q_k^{\nu-1} \Delta W_{k+1}) \cdot (y_k^\nu - y_k^{\nu-1})] \\
&= \mathbb{E}[hH_y(t_{k+1}, y_{k+1}^{\nu-1}, u_{k+1}^{\nu-1}, p_{k+1}^{\nu-1}, q_{k+1}^{\nu-1}) \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1})] \\
&\quad + \mathbb{E}[p_{k+1}^{\nu-1} \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1})] - \mathbb{E}[p_k^{\nu-1} \cdot (y_k^\nu - y_k^{\nu-1})], \tag{6.86}
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad tomamos la esperanza condicional \mathbb{E}_k dentro de la esperanza.

Reemplazando (6.86) en (6.85) obtenemos

$$\begin{aligned}
J^h(u^\nu) - J^h(u^{\nu-1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} h \mathbb{E}[H(t_k, y_k^\nu, u_k^\nu, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1}) - H(t_k, y_k^{\nu-1}, u_k^{\nu-1}, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1})] \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N-2} \mathbb{E}[hH_y(t_{k+1}, y_{k+1}^{\nu-1}, u_{k+1}^{\nu-1}, p_{k+1}^{\nu-1}, q_{k+1}^{\nu-1}) \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1})] \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N-2} \mathbb{E}[p_{k+1}^{\nu-1} \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1})] - \mathbb{E}[p_k^{\nu-1} \cdot (y_k^\nu - y_k^{\nu-1})] \\
&\quad - \mathbb{E}[(p_{N-1}^{\nu-1} + q_{N-1}^{\nu-1} \Delta W_N) \cdot (y_N^\nu - y_N^{\nu-1} - y_{N-1}^\nu + y_{N-1}^{\nu-1})] \\
&\quad + \mathbb{E}[g(y_N^\nu) - g(y_N^{\nu-1})] \tag{6.87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} h \mathbb{E}[H(t_k, y_k^\nu, u_k^\nu, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1}) - hH(t_k, y_k^{\nu-1}, u_k^{\nu-1}, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1})] \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N-2} \mathbb{E}[hH_y(t_{k+1}, y_{k+1}^{\nu-1}, u_{k+1}^{\nu-1}, p_{k+1}^{\nu-1}, q_{k+1}^{\nu-1}) \cdot (y_{k+1}^\nu - y_{k+1}^{\nu-1})] \\
&\quad + \mathbb{E}[p_0^{\nu-1} \cdot (y_0^\nu - y_0^{\nu-1})] - \mathbb{E}[\nabla_y g(y_N^{\nu-1}) \cdot (y_N^\nu - y_N^{\nu-1})] \\
&\quad + \mathbb{E}[g(y_N^\nu) - g(y_N^{\nu-1})].
\end{aligned} \tag{6.88}$$

Como $y_0^\nu - y_0^{\nu-1} = 0$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
J^h(u^\nu) - J^h(u^{\nu-1}) &= h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H(t_k, y_k^\nu, u_k^\nu, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1}) - hH(t_k, y_k^{\nu-1}, u_k^{\nu-1}, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1})] \\
&\quad - h \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[H_y(t_k, y_k^{\nu-1}, u_k^{\nu-1}, p_k^{\nu-1}, q_k^{\nu-1}) \cdot (y_k^\nu - y_k^{\nu-1})] \\
&\quad - \mathbb{E}[\nabla_y g(y_N^{\nu-1}) \cdot (y_N^\nu - y_N^{\nu-1}) + g(y_N^\nu) - g(y_N^{\nu-1})].
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Luego podemos continuar con la prueba como en el Teorema 4.4.2. \square

El próximo resultado sigue del teorema previo, el Lema 6.3.1 y el Teorema 4.4.3.

Teorema 6.5.8. *Supongamos que J^h es acotada inferiormente y que las hipótesis del teorema previo se satisfacen. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\varepsilon_\nu < \varepsilon_0$, toda sucesión generada por el algoritmo satisface:*

1. $\{J^h(u^\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente monótona no creciente,
2. $\|u^\nu - u^{\nu-1}\|_{\mathcal{U}^h} \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$,
3. $\|u^\nu - P_{\mathcal{U}^h}(u^\nu - \varepsilon_\nu H_u(y^\nu, u^\nu, p^\nu, q^\nu))\|_{\mathcal{U}^h} \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$.

Combinando el Teorema 6.5.8, Teorema 6.5.1 y el Corolario 4.4.4 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.5.9. *Bajo las hipótesis anteriores, supongamos que la sucesión generada por el algoritmo u^ν es acotada, $\varepsilon_\nu < \varepsilon_0$ y $\liminf \varepsilon_k \geq \varepsilon > 0$. Entonces, para toda sucesión acotada $v^\nu \in \mathcal{U}^h$ tenemos*

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J^{h'}(u^\nu, v^\nu - u^\nu) \geq 0. \tag{6.90}$$

En particular

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J^{h'}(u^\nu, v - u^\nu) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^h. \quad (6.91)$$

Finalmente sumando hipótesis de convexidad, combinando el Teorema 4.4.6 y el Corolario 4.4.8 del Capítulo 4 podemos obtener un resultado análogo de convergencia con respecto a los controles generados por el algoritmo.

Teorema 6.5.10. *Supongamos que J^h es convexo y acotado inferiormente. Además, $\varepsilon_\nu < \varepsilon_0$, donde ε_0 está dado por el Teorema 6.5.8 y $\liminf \varepsilon_\nu > 0$. Entonces, todo límite débil \bar{u} de $\{u^\nu\}$ es un control óptimo para (P^h) . Como consecuencia, si $\{u^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ tiene subsucesiones acotadas, entonces $J(u^\nu) \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}^h} J^h(u)$.*

Si además suponemos que J^h es fuertemente convexa, entonces toda la sucesión converge fuertemente a la única solución óptima del problema.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis logramos proponer métodos numéricos para abordar diversos problemas de control óptimo. Para ello, en todos los casos planteamos problemas discretos en tiempo para los cuales fueron diseñados los algoritmos de resolución. Para cada problema justificamos de qué modo los problemas discretos aproximan a los continuos. Además, en cada caso estudiamos condiciones de optimalidad relacionadas tanto a los problemas continuos como a los discretos.

En el Capítulo 2 y el Capítulo 3 trabajamos con problemas de control óptimo de tipo minimax. Si bien en el primero de ellos consideramos un problema determinista y en el segundo uno con incertezas, en ambos casos el problema discreto que utilizamos para aproximarlos resultó ser un problema determinista. Este hecho fue el que nos permitió no sólo plantear algoritmos conceptuales de resolución, sino que también obtuvimos algoritmos implementables. Para los dos casos, presentamos pruebas numéricas que muestran el buen comportamiento del método. Sin embargo los ejemplos numéricos que abordamos no son problemas de gran tamaño. En particular, para el problema estudiado en el Capítulo 3, para obtener resultados significativos, no sólo el paso de tiempo debe ser pequeño, sino que también es necesario que el tamaño de la muestra sea lo suficientemente grande, lo cual obviamente deriva en problemas de gran escala. En esta línea de trabajo, el desafío radica en poder lidiar con problemas más complejos o de mayor dimensionalidad sin que el tiempo computacional crezca en la misma medida.

En los últimos tres capítulos de la tesis, trabajamos con un problema de control óptimo estocástico con costo acumulativo y final. Comenzamos planteando un algoritmo teórico de resolución en el Capítulo 4, el cual obviamente no es implementable. Siguiendo con la misma línea que en los primeros capítulos, planteamos un problema discreto en tiempo. En

este caso fue necesario estudiar más en profundidad este problema para obtener resultados de convergencia del discreto al continuo. A diferencia del enfoque que utilizamos para los problemas minimax, en el caso estocástico, debido al funcional de costo que consideramos, las condiciones de optimalidad con las que trabajamos son las que se derivan del enfoque variacional, relacionadas con el PMP. Por lo tanto, aparece involucrado el estado adjunto, el cual es solución de una EDER. Como es bien sabido, no es sencillo aproximar este tipo de ecuaciones. Si bien existen métodos para aproximar sistemas de EDE-EDER, el hecho de que en los coeficientes de las mismas esté involucrado el control, hace que no se cumplan las hipótesis generales que se consideran en dichos métodos, ya que no es de esperar que el control tenga suficiente regularidad. En esta dirección, con el objetivo de obtener un algoritmo implementable, queda pendiente continuar con el estudio de aproximaciones de este tipo de sistemas para el caso particular de problemas de control óptimo. Otro problema que surgió para ser tratado en el futuro es el estudio de la convergencia de los estados adjuntos discretos al continuo, en el cual una vez más la dificultad radica en la falta de regularidad de las soluciones de las ecuaciones EDER.

Bibliografía

- [1] C. Aliprantis and K. Border. *Infinite dimensional analysis. A hitchhiker's guide*. Springer, Berlin, third edition, 2006.
- [2] L. S. Aragone, S. Di Marco, and R. L. V. González. Numerical analysis of a minimax optimal control problem with an additive final cost. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(2):183–203, 2002.
- [3] L. S. Aragone, S. Di Marco, and R. L. V. González. Solution of a minimax problem with additive final cost. *Mathematica Notae*, 43:7–27, 2005.
- [4] L. S. Aragone, J. Gianatti, P. A. Lotito, and L. A. Parente. An approximation scheme for uncertain minimax optimal control problems. *Aceptado para ser publicado en Set-Valued and Variational Analysis*, 2017.
- [5] L. S. Aragone and R. L. V. González. A Bellman's equation for minimizing the maximum cost. *Indian J. Pure Appl. Math*, 31(12):1621–1632, 2000.
- [6] Z. Artstein and R. J. Wets. Consistency of minimizers and the sln for stochastic programs. *Journal of Convex Analysis*, 2(1-2):1–17, 1995.
- [7] H. Attouch. *Variational Convergence for Functions and Operators*. Applicable Mathematics Series. Pitman, London, 1984.
- [8] H. Attouch and R. J.-B. Wets. Approximation and convergence in nonlinear optimization. *Nonlinear Programming*, 4:367 – 394, 1981.
- [9] H. Attouch and R. J.-B. Wets. A convergence theory for saddle functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 280(1):1 – 41, 1983.

- [10] J. Backhoff and F. J. Silva. Some sensitivity results in stochastic optimal control: A Lagrange multiplier point of view. Technical Report 1404.0586, 2014.
- [11] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser, Boston, MA, 1997.
- [12] G. Barles and P. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Analysis*, 4:271–283, 1991.
- [13] E. N. Barron. The Pontryagin maximum principle for minimax problems of optimal control. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 15(12):1155–1165, 1990.
- [14] E. N. Barron and H. Ishi. The Bellman equation for minimizing the maximum cost. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 13(9):1067–1090, 1989.
- [15] E. N. Barron and R. Jensen. Relaxed minimax control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(4):1028–1039, 1995.
- [16] R. Bellman. *Dynamic programming*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [17] A. Bensoussan. *Lectures on stochastic control*. Lectures notes in Maths. Vol. 972, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [18] A. Bensoussan. Stochastic maximum principle for distributed parameter systems. *J. Franklin Inst.*, 315(5-6):387–406, 1983.
- [19] A. Bensoussan. *Perturbation methods in optimal control*. Wiley/Gauthier-Villars series in modern applied mathematics. Gauthier-Villars, 1988.
- [20] D. Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control (2 volumes)*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.
- [21] D. P. Bertsekas and S. E. Shreve. *Stochastic optimal control : the discrete time case*. Academic Press New York, 1978.

- [22] J.-M. Bismut. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Appl.*, 44:384–404, 1973.
- [23] J.-M. Bismut. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM J. Control Optimization*, 14(3):419–444, 1976.
- [24] J.-M. Bismut. An introductory approach to duality in optimal stochastic control. *SIAM Rev.*, 20(1):62–78, 1978.
- [25] J. F. Bonnans. On an algorithm for optimal control using Pontryagin’s maximum principle. *SIAM J. Control Optim.*, 24(3):579–588, 1986.
- [26] J. F. Bonnans. *Optimisation Continue*. Dunod, Paris, 2006.
- [27] J.-F. Bonnans, J. Gianatti, and F.-J. Silva. On the convergence of the Sakawa-Shindo algorithm in stochastic control. *Mathematical Control and Related Fields*, 6(3):391–406, 2016.
- [28] J. F. Bonnans, J. Gianatti, and F. J. Silva. On the time discretization of stochastic optimal control problems: the dynamic programming approach. 2017. Working paper or preprint, <https://hal.inria.fr/hal-01474285>.
- [29] J. F. Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer–Verlag, New York, 2000.
- [30] J. F. Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [31] J. F. Bonnans and F. J. Silva. First and second order necessary conditions for stochastic optimal control problems. *Appl. Math. Optim.*, 65(3):403–439, 2012.
- [32] B. Bouchard and N. Touzi. Weak dynamic programming principle for viscosity solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 49(3):948–962, 2011.
- [33] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 2010.

- [34] R. Bulirsch, F. Montrone, and H. J. Pesch. Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem, part 1: Necessary conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(1):1–23, 1991.
- [35] R. Bulirsch, F. Montrone, and H. J. Pesch. Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem, part 2: Multiple shooting and homotopy. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2):223–254, 1991.
- [36] D. L. Burkholder, B. J. Davis, and R. F. Gundy. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Probability Theory*, pages 223–240, Berkeley, Calif., 1972. University of California Press.
- [37] A. Cadenillas and I. Karatzas. The stochastic maximum principle for linear convex optimal control with random coefficients. *SIAM J. Control Optim.*, 33(2):590–624, 1995.
- [38] Casas, E. and Pola, C. An algorithm for indefinite quadratic programming based on a partial cholesky factorization. *RAIRO-Oper. Res.*, 27(4):401–426, 1993.
- [39] N. Christopeit. Discrete approximation of continuous time stochastic control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21(1):17–40, 1983.
- [40] D. S. Clark. Short proof of a discrete Gronwall inequality. *Discrete Applied Mathematics*, 16(3):279 – 281, 1987.
- [41] S. Di Marco and R. L. V. González. Minimax optimal control problems. Numerical analysis of the finite horizon case. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(1):23–54, 1999.
- [42] E. B. Dynkin and A. A. Yushkevich. *Controlled Markov processes*, volume 235 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. Translated from the Russian original by J. M. Danskin and C. Holland.

- [43] W. H. Fleming and R. W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Applications of Mathematics, No. 1.
- [44] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [45] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [46] J. Gianatti, L. S. Aragone, P. A. Lotito, and L. A. Parente. Solving minimax control problems via nonsmooth optimization. *Operations Research Letters*, 44(5):680 – 686, 2016.
- [47] I. I. Gikhman and A. V. Skorohod. *Controlled stochastic processes*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979. Translated from the Russian by Samuel Kotz.
- [48] A. Goldstein. Convex programming in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70:709–710, 1964.
- [49] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition, 2002.
- [50] U. G. Haussmann. Some examples of optimal stochastic controls or: the stochastic maximum principle at work. *SIAM Rev.*, 23(3):292–307, 1981.
- [51] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North Holland-Kodansha Publishing, 1981.
- [52] A. J. King and R. J. Wets. Epi-consistency of convex stochastic programs. *Stochastics and Stochastic Reports*, 34(1-2):83–92, 1991.
- [53] A. J. Kleywegt, A. Shapiro, and T. Homem-de Mello. The sample average approximation method for stochastic discrete optimization. *SIAM J. on Optimization*, 12(2):479–502, Feb. 2002.

- [54] N. Krylov. Approximating value functions for controlled degenerate diffusion processes by using piece-wise constant policies. *Electron. J. Probab.*, 4:1–19, 1999.
- [55] N. V. Krylov. Mean value theorems for stochastic integrals. *Ann. Probab.*, 29(1):385–410, 2001.
- [56] N. V. Krylov. *Controlled diffusion processes*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2008.
- [57] H. Kushner. *Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations*. Academic Press, New York, 1977. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 129.
- [58] H. J. Kushner. On the stochastic maximum principle: Fixed time of control. *J. Math. Anal. Appl.*, 11:78–92, 1965.
- [59] H. J. Kushner. Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems. *SIAM J. Control*, 10:550–565, 1972.
- [60] H. J. Kushner and F. C. Scheppe. A maximum principle for stochastic control systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 8:287–302, 1964.
- [61] X. Lin and W. Zhang. A maximum principle for optimal control of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(4):1121–1126, April 2015.
- [62] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. I. The dynamic programming principle and applications. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(10):1101–1174, 1983.
- [63] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. II. Viscosity solutions and uniqueness. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(11):1229–1276, 1983.

- [64] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. III. Regularity of the optimal cost function. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, Vol. V (Paris, 1981/1982)*, volume 93 of *Res. Notes in Math.*, pages 95–205. Pitman, Boston, MA, 1983.
- [65] P. Lu and N. Vinh. Optimal control problems with maximum functional,. *J. Guidance*,, 14(6):1215–1223, 1991.
- [66] L. Mazliak. An algorithm for solving a stochastic control problem. *Stochastic analysis and applications*, 14(5):513–533, 1996.
- [67] U. Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Mathematics*, 3(4):510 – 585, 1969.
- [68] L. Mou and J. Yong. A variational formula for stochastic controls and some applications. *Pure Appl. Math. Q.*, 3(2, Special Issue: In honor of Leon Simon. Part 1):539–567, 2007.
- [69] M. Nisio. *Stochastic control theory. Dynamic programming principle. 2nd ed.* Tokyo: Springer, 2nd ed. edition, 2015.
- [70] H. J. Oberle. Numerical solution of minimax optimal control problems by multiple shooting technique. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 50(2):331–357, 1986.
- [71] S. G. Peng. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 28(4):966–979, 1990.
- [72] I. R. Petersen, M. R. James, and P. Dupuis. Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):398–412, Mar 2000.
- [73] H. Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2009.

- [74] C. Phelps, J. O. Royset, and Q. Gong. Optimal control of uncertain systems using sample average approximations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(1):1–29, 2016.
- [75] E. Polak. *Computational Methods in Optimization. A Unified Approach*. Academic Press, New York, 1986.
- [76] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1979.
- [77] M. L. Puterman. *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. A Wiley-Interscience Publication.
- [78] R. Rockafellar and R. Wets. *Variational Analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [79] J. O. Royset and E. Polak. Implementable algorithm for stochastic optimization using sample average approximations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 122(1):157–184, 2004.
- [80] Y. Sakawa and Y. Shindo. On global convergence of an algorithm for optimal control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 25(6):1149–1153, 1980.
- [81] S. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [82] N. Touzi. *Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE*, volume 29 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2013. With Chapter 13 by Angèle Tourin.
- [83] V. Ugrinovskii and I. Petersen. Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty. *SIAM journal on control and optimization*, 37(4):1089–1122, 1999.
- [84] R. Vinter. *Optimal Control*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, 2010.

- [85] R. B. Vinter. Minimax optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(3):939–968, 2005.
- [86] R. A. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(1):186 – 188, 1964.
- [87] R. A. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, II(123):32 – 45, 1966.
- [88] C. Wu, K. L. Teo, and X. Wang. Minimax optimal control of linear system with input-dependent uncertainty. *Journal of the Franklin Institute*, 351(5):2742 – 2754, 2014.
- [89] J. Yong and X. Zhou. *Stochastic controls, Hamiltonian systems and HJB equations*. Springer-Verlag, New York, Berlin, 2000.
- [90] A. A. Yushkevich and R. Y. Chitashvili. Controlled random sequences and Markov chains. *Russian Mathematical Surveys*, 37(6):239, 1982.