Procesamiento de Señales basado en Wavelets

Notas de Clase - Parte III

Juan Carlos Gómez [1]

<jcgomez@fceia.unr.edu.ar>

[1] Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información
FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Argentina

Semestre 2, 2006

Contenidos

- La idea es representar una señal como una combinación lineal de señales de duración efectiva limitada que se obtienen por traslación y escalado de una función original denominada **mother Wavelet**.
- La mother wavelet es una función $\psi(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ que verifica la **condición de admisibilidad**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0,$$

es decir tiene media cero, y que está normalizada: $\|\psi\| = 1$, y centrada en un entorno de $t = 0$.

- Con la mother wavelet se genera un conjunto de funciones $\psi_{u,s}(t)$ (**átomos wavelets** o simplemente **wavelets**) por dilatación con un factor de escala s y translación u, de la forma

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

- Los átomos wavelets resultan tambien normalizados: $\|\psi_{u,s}\| = 1$.
- La Transformada Wavelet Continua (CWT) de una señal $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ en la escala s y en la posición u se computa

$$Wf(u,s) = \langle f, \psi_{u,s}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right)dt$$

Transformada Wavelet continua
Relación Escala-Frecuencia

- **Relación Escala-Frecuencia:** A cada wavelet puede asociarse una frecuencia central F_c que es la frecuencia para la cual el módulo de la transformada de Fourier de la wavelet es máximo. Puede interpretarse a F_c como la frecuencia de una senoide que captura las principales oscilaciones de la wavelet.

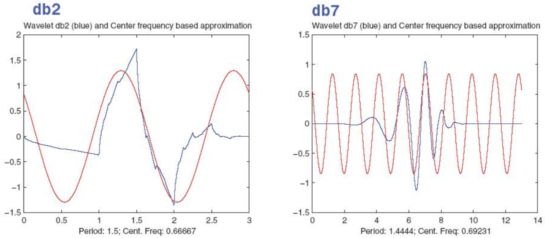

Fig.1: Wavelets Daubechies db2 y db7, y correspondientes aproximaciones con senoide de frecuencia central.

Transformada Wavelet continua
Relación Escala-Frecuencia

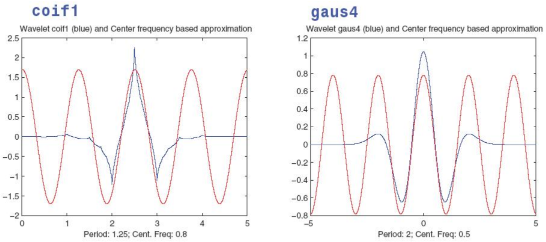

Fig.2: Idem Fig. 1, pero para Wavelets coif1 y gauss4.

- La frecuencia (central) asociada a cada escala s, puede entonces calcularse como

$$F_s = \frac{F_c}{sT}$$

donde T es el período de muestreo.

- **Ejemplo:** Considere las wavelets *Mexican hat* y *Morlet*.
  - Mexican Hat: $\psi(t) = \left(1 - t^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$
  - Morlet: $\psi(t) = \cos(5t) e^{-\frac{t^2}{2}}$

1. Calcule las respectivas frecuencias centrales
2. Grafique las wavelets y las correspondientes aproximaciones senoidales.
3. Compare los resultados con los obtenidos usando el comando Matlab `centfrq`.

- **CWT como Filtrado Lineal:** La CWT puede escribirse como un producto de convolución de la forma

$$Wf(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = f \star \overline{\psi}_s(u) \quad (1)$$

donde

$$\overline{\psi}_s(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right).$$

Tomando la Transformada de Fourier de $\overline{\psi}_s(t)$ resulta

$$\widehat{\overline{\psi}}_s(\omega) = \sqrt{s}\widehat{\psi}^*(s\omega)$$

Como se verifica $\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$, entonces puede interpretarse a $\widehat{\psi}(\omega)$ como la respuesta en frecuencia de un filtro pasabanda.

Luego, la CWT en (1) se computa como la convolución de la señal f con versiones dilatadas de filtros pasa banda (**Banco de Filtros**).

- **Completitud:** Bajo ciertas condiciones sobre la mother wavelet $\psi(t)$ (**condición de admisibilidad**), una señal $f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ puede reconstruirse a partir de los coeficientes wavelet. Este resultado fue probado por Calderón en 1964 en otro contexto. Grossmann y Morlet no conocían el resultado de Calderón y lo probaron en el contexto de Procesamiento de Señales. El resultado está dado en el siguiente Teorema.

Transformada Wavelet continua
Completitud del sistema de wavelets

- **Teorema:** Sea $\psi(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ una función a valores reales tal que

$$C_\psi \triangleq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

Entonces, para toda $f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ se verifica

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty Wf(u,s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \qquad (2)$$

y

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |Wf(u,s)|^2 \, du \frac{ds}{s^2} \qquad (3)$$

- La condición

$$C_\psi \triangleq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

  se denomina **condición de admisibilidad**. Para asegurar que la integral sea finita, debe asegurarse que $\widehat{\psi}(0) = 0$, lo que explica la condición de que la wavelet tenga media cero. Esta última condición es "casi" suficiente. En efecto, si $\widehat{\psi}(0) = 0$ y $\widehat{\psi}(\omega)$ es continuamente diferenciable, entonces la condición de admisibilidad es satisfecha.
- Similarmente a la WFT, la CWT es una representación redundante.
- La fórmula de reconstrucción (2) se conoce como **resolución de la identidad**.

- La fórmula (2) puede interpretarse de dos formas distintas
  - La señal f puede reconstruirse si se conoce su CWT.
  - La señal f puede escribirse como la combinación lineal de wavelets $\psi_{u,s}$, donde los coeficientes en la combinación lineal son los coeficientes CWT.
- La fórmula (3) es la **Identidad de Parseval** que establece la conservación de la energía en el dominio de la CWT.

- La **Transformada Wavelet Discreta (DWT: Discrete Wavelet Transform)** puede obtenerse de la CWT restringiendo los parámetros de escalado y translación a valores discretos de la forma $s = s_0^m$, $u = nu_0 s_0^m$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, resultando

$$W_{m,n}f = s_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(s_0^{-m}t - nu_0\right) dt$$

- Los átomos wavelet $\psi_{u,s}(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$ resultan

$$\psi_{m,n}(t) = s_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{t - nu_0 s_0^m}{s_0^m}\right) = s_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(s_0^{-m}t - nu_0\right)$$

- Surgen los siguientes dos interrogantes
  - Es posible caracterizar a f completamente a partir de sus coeficientes DWT $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$? O todavia más exigente, es posible reconstruir f de una manera numéricamente estable a partir de $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$?
  - Es posible escribir a cualquier función f como la superposición de bloques elementales $\psi_{m,n}$? Puede escribirse un algoritmo simple para computar los coeficientes de esa superposición ?
- En el caso de la CWT la respuesta a estas preguntas las daba la fórmula de resolución de la identidad (2), bajo la condición de admisibilidad de ψ. En el caso discreto, no existe un análogo a la fórmula de resolución de la identidad, por lo que el problema debe ser atacado de otra forma.

- Nos restringiremos a funciones $f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.
- Para que las funciones se puedan caracterizar por sus coeficientes wavelet $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$, se debe verificar que si

$$\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle = \langle f_2, \psi_{m,n} \rangle$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $f_1 \equiv f_2$. O equivalentemente si

$$\langle f, \psi_{m,n} \rangle = 0$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$.

DWT Frames

- Para poder reconstruir f a partir de $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ debemos asegurar que si la secuencia $\{\langle f_1, \psi_{m,n} \rangle\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es próxima a la secuencia $\{\langle f_2, \psi_{m,n} \rangle\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, entonces necesariamente f_1 debe ser próxima a f_2.
- Asumimos que las secuencias $\{\langle f, \psi_{m,n} \rangle\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ están en el espacio (con estructura Hilbert) $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$, con una métrica inducida por el producto interno entre dos secuencias $c^1 = \{c^1_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ y $c^2 = \{c^2_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ definida como

$$\left\| c^1 - c^2 \right\|^2 = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |c^1_{m,n} - c^2_{m,n}|^2$$

- Para toda wavelet ψ "razonable" se verifica la hipótesis anterior, por lo que $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 < \infty$, para todo $f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

- La condición anterior lleva a que se verifique

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2 < B\|f\|^2 \tag{4}$$

- Por otra parte se debe verificar que si $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2$ es pequeño, entonces $\|f\|^2$ debería ser tambien pequeña. Esto lleva a que debe existir un $A > 0$ tal que

$$A\|f\|^2 < \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2 \tag{5}$$

Transformada Wavelet Discreta
DWT Frames

- Combinando las condiciones (4) y (5) resulta que deben existir constantes $A > 0, B < \infty$ tal que

$$A\|f\|^2 < \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2 < B\|f\|^2 \tag{6}$$

- En otras palabras, para que sea posible una reconstrucción numéricamente estable de f a partir de los coeficientes wavelet $\langle f, \psi_{m,n}\rangle$, la secuencia $\{\psi_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ debe constituir un frame.