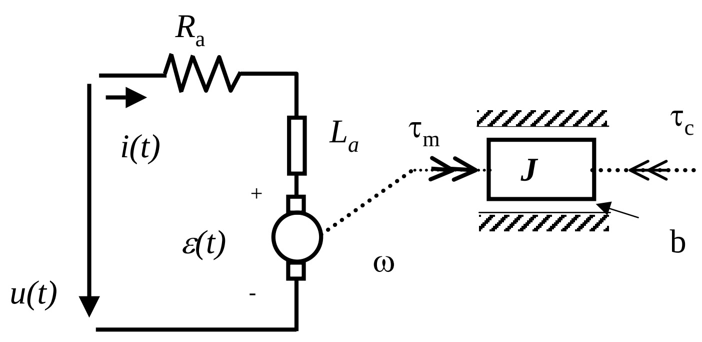
Identificación de SISTemas

Identificación de un modelo ARX con Estima de Mínimos Cuadrados

Identificación de un modelo ARX usando Estima de Mínimos cuadrados

- **Proceso:** Motor de Corriente Continua con excitación independiente constante



Conversión Electromecánica
$$\begin{cases} \varepsilon = k\omega & \text{f.c.e.m.} \\ \tau_m = ki & \text{torque} \end{cases}$$

❑ Estructura de Modelo

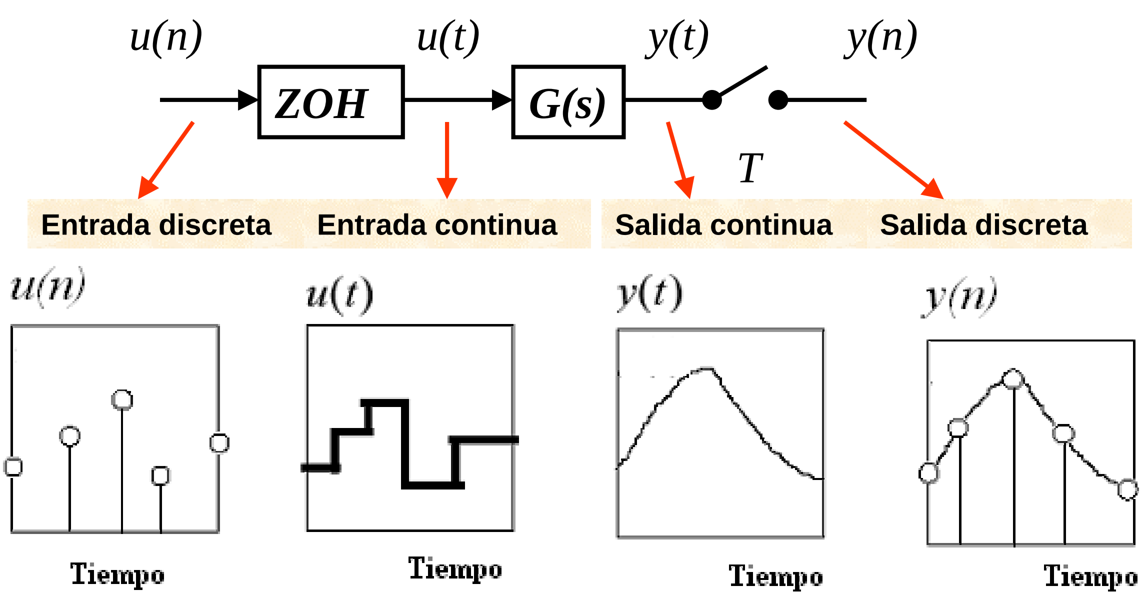
Basándose en principios físicos (2da. Ley de Newton, Leyes de Kirchhoff y Faraday), es fácil ver que la FT entre la velocidad y la tensión de armadura del MCC es de la forma

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{U(s)}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

donde

$$2\xi\omega_n=\frac{b}{J}+\frac{R_a}{L_a} \qquad \omega_n^2=\frac{R_a b+k^2}{L_a J} \qquad K=\frac{k}{R_a b+k^2}$$

Considerando entonces que tiene un equivalente discreto (equivalente ZOH: Zero Order Hold) de la forma



Equivalente Discreto ZOH

$$G(z) = \mathrm{ZOH}\{G(s)\} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

es natural tratar de identificar los parámetros del modelo ARX que se deriva de esta transferencia discreta, *i.e.*

$$\omega(n) = -a_1\omega(n-1) - a_2\omega(n-2) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) \tag{1}$$

Definiendo el vector de parámetros

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]^T$$

y el vector de regresión

$$\varphi(n) = [-\omega(n-1) \quad -\omega(n-2) \quad u(n-1) \quad u(n-2)]^T$$

la ecuación en diferencias (1) puede escribirse en la forma de un **regresor lineal**

$$y(n) = \varphi^T(n)\theta$$

Estructura de Modelo

donde $y(n) = \omega(n)$

❑ Estimación de parámetros

Basándose en la Estructura de Modelo, puede definirse un **predictor** de la salida en función de los datos pasados hasta el instante *n-1* y el vector de parámetros θ , como

$$\hat{y}(n \mid n-1, \theta) = \varphi^T(n)\theta$$

La estima de parámetros puede entonces computarse minimizando un criterio cuadrático en los **errores de predicción**

$$\boxed{\varepsilon(n,\theta) = y(n) - \hat{y}(n\,|\,n\text{-}1,\theta)}$$

Es decir, considerando que se dispone de *N* pares de datos de entrada-salida $\{u(n), y(n)\}_{n=1}^{N}$

$$\boxed{\hat{\theta}_N = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\{V_N(\theta)\}}$$

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \operatorname{Tr}\left\{\left[y(k) - \varphi^T(k)\theta\right]\left[y(k) - \varphi^T(k)\theta\right]^T\right\}$$

Criterio Cuadrático

i.e.

$$\boxed{\hat{\theta}_N = \left[\sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1}\left[\sum_{k=1}^{N} \varphi(k)y(k)\right]}$$

Estima de Mínimos Cuadrados

❑ El sistema "real"

$L_a = 2.5\,\text{mHy}$ $\quad R_a = 0.062\,\Omega$ $\quad k = 6.6\,\text{Nm/A}$

$b = 1.275\,\text{Nms}$ $\quad J = 30\,\text{Nms}^2$

$$\boxed{G(s) = \frac{87.99}{s^2 + 1.3370s + 580.821}}$$

Sistema Real (FT)

Equivalente ZOH (T_s = 10^{-4} *seg*)

$$G(z) = \text{ZOH}\{G(s)\} = \frac{0.4399\times 10^{-6}(z+1)}{z^2 - 1.9999z + 0.9999}$$

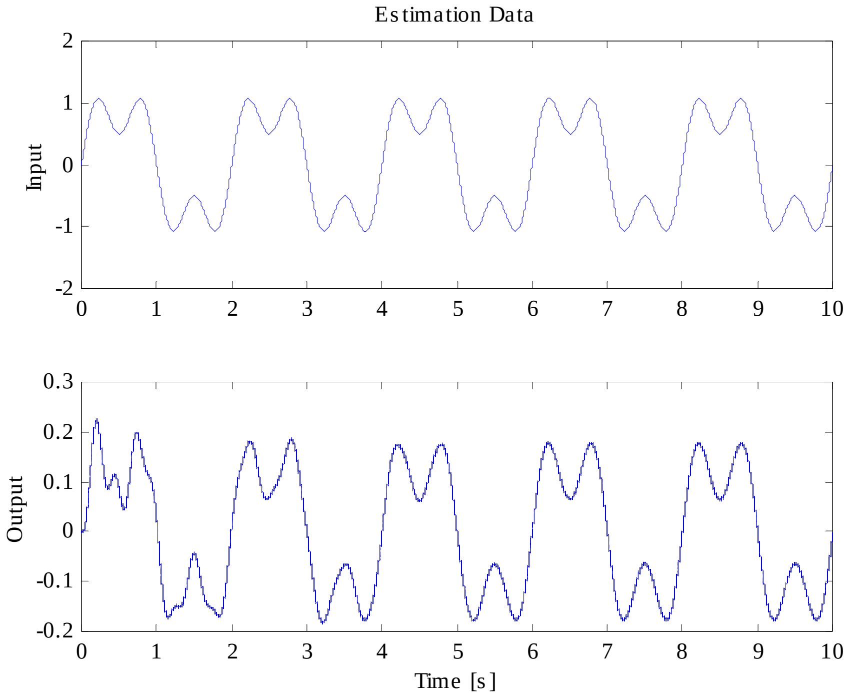
❑ Script Matlab

```
% Motor de Corriente Continua con Excitacion
% independiente constante
%       G(s)=num(s)/den(s)
%
num=87.9912;
den=[1 1.3370 580.821];
%
%  Computo de G(z)=ZOH{G(s)}
%
Ts=1e-4;
[numd,dend]=c2dm(num,den,Ts,'zoh');
%
% Generacion de datos de entrada/salida a partir del
%  sistema  en tiempo continuo
%
t=[0:1e-4:10]';
u=sin(1*pi*t)+0.5*sin(3*pi*t);
y=lsim(num,den,u,t) + 0.001*randn(size(u));
%
%  Computo del regresor
%
%
yy=-y;
ry=[yy(2) yy(1)];
cy=yy(2:length(yy)-1,:);
phiy=toeplitz(cy,ry);
ru=[u(2) u(1)];
cu=u(2:length(u)-1,:);
phiu=toeplitz(cu,ru);
phit=[phiy phiu];
```

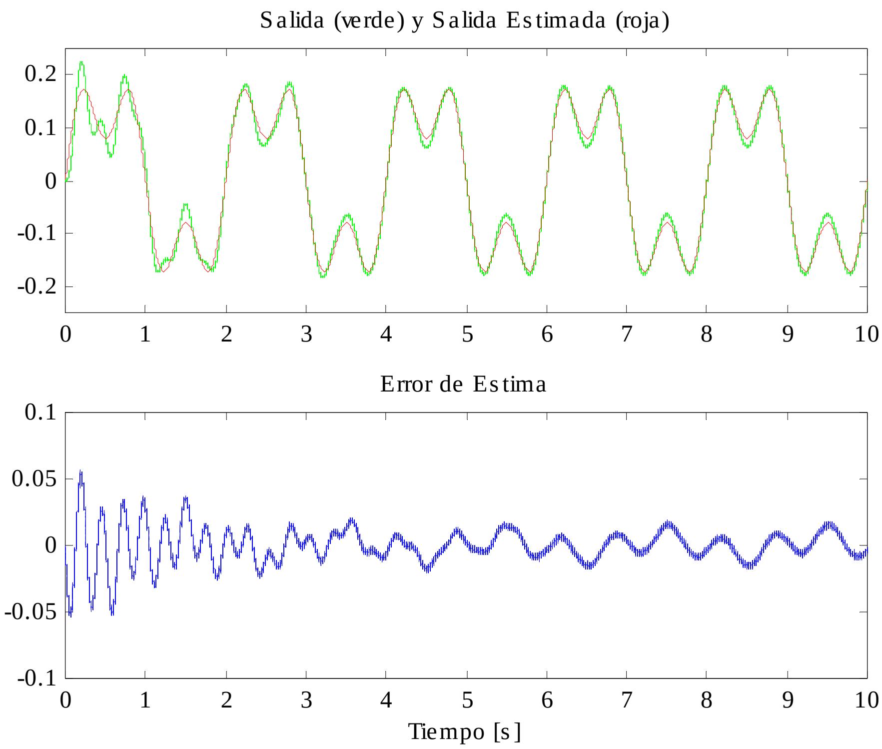


```
%  Computo de la estima
%
thetahat=phit\y(3:length(y),:);
%
%  Computo de la salida estimada
%
[yhat,x]=dlsim([thetahat(3) thetahat(4)],...
[1 thetahat(1) thetahat(2)],u);
%
%  Ploteo de la salida y la salida estimada
%
subplot(211)
plot(t(3:length(t),:),y(3:length(y),:),'g',...
t(3:length(t),:),yhat(3:length(y)),'r')
title('Salida(trazos) y Salida Estimada (llena)-...
Indistinguibles');
axis([0 10 -0.25 0.25])
subplot(212)
plot(t(3:length(t),:),y(3:length(y),:)-
yhat(3:length(y)))
xlabel('Tiempo [s]'),title('Error de Estima')
```

❑ Resultados de Identificación



Datos de Entrada-Salida de Estimación



Datos de Validación

❑ El modelo Identificado

La FT (en tiempo continuo) estimada puede calcularse con el siguiente script **Matlab**

```
numd=[thetahat(3) thetahat(4)];
dend=[1 thetahat(1) thetahat(2)];
sysd=tf(numd,dend,Ts);
sysc=d2c(sysd,'zoh');
tf(sysc)
```

y resulta

$$\hat{G}(s) = \frac{87.99}{s^2 + 1.337s + 580.8}$$

Modelo Identificado