Proyecto: Problemas asociados a ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias en el tiempo.

Integrantes: Dra. Isolda E. Cardoso, Dr. Nahuel D. Caruso, Dra. Sabrina D. Roscani

Este proyecto fue presentado en el año 2020 proponiendo las siguientes l'ineas de trabajo:

(i) **Problemas de valores iniciales y de contorno:** Estudiar el problema parabólico fraccionario en el tiempo $D^\alpha u = L[u]$ con L un operador elíptico y con condiciones de Robin que involucran la constante de transferencia del calor (también denominada constante de Newton) β, en un dominio acotado del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

(ii) **Problemas de cambio de fase:** Búsqueda de soluciones autosimilares explícitas a partir de la utilización de funciones especiales de Wright y búsqueda de soluciones aproximadas.

Durante los años 2020-2022, dio lugar a las siguientes publicaciones:

- I. Cardos, S. Roscani and D. Tarzia, "About the convergence of a family of initial boundary value problems for a fractional diffusion equation of Robin type", Applied Mathematics and Computation, Vol. 433 (2022), ID 127375.
- S. Roscani, N. D. Caruso, D. A. Tarzia, "*Explicit solutions to fractional Stefan-like problems for Caputo and Riemann-Liouville derivatives*", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 90 (2020), 105361.

Y a las siguientes presentaciones en congresos:

- "Sobre las soluciones de una familia de problemas de valores iniciales y de contorno de tipo Robin para la ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo". VIII Congreso de Matemática Aplicada , Computacional e Industrial, Universidad Nacional de La Plata, virtual, 3 al 7 de Mayo de 2021.
- "About Explicit Solutions to Different One-dimensional Fractional Stefan-Like Problems", Nonlocal diffusion problems, nonlocal interface evolution (Online), Institute of Mathematics, Polish Academic of Science, 1-3 de Octubre de 2020.
- "Soluciones explícitas a problemas de tipo Stefan para derivadas de Caputo y RiemannLiouville", LXIX Reunión de Comunicaciones Científicas de la Reunión Anual Virtual de la Unión Matemática Argentina (virtUMA 2020), del 14 al 25 de Septiembre de 2020.

El proyecto se encuentra en etapa de finalización, pero se pretende continuar con la investigación. En particular, del trabajo previo previo realizdo, han surgido nuevos objetivos que serán plasmados en la continuacón del proyecto presentado. Se presenta a continuación uno de ellos en el marco de una propuesta para realizar una tesina.

Propuesta para Tesina de Lic. en Matemática - Dra. Isolda Cardoso y Dra. Sabrina Roscani

La presente propuesta está dirigida a alumnxs avanzadxs de Licenciatura en Matemática que estén interesadxs en realizar una tesina y/o solicitar una beca CIN en la convocatoria próxima, así como unirse en calidad de becarix al proyecto. El tema propuesto es en el área de las ecuaciones diferenciales parciales, más específicamente en cálculo fraccionario.

La idea de considerar derivadas o integrales de órdenes arbitrarios data de los propios inicios del cálculo diferencial. De hecho el *antecedente estrella* viene de la mano del mismísimo Leibniz, a quien en L'Hôpital pregunta, en una correspondencia en el año 1695, *qué sentido tendría esta expresión para* $n = \frac{1}{2}$. En su respuesta, Leibniz escribió a L'Hôpital que esa expresión no admitía todavía el uso de de exponentes arbitrarios, pero que esa aparente paradoja algún día mostraría útiles consecuencias. Hoy en día el Cálculo Fraccionario es una rama del Análisis Matemático que estudia derivadas e integrales de órdenes arbitrarios, y el adjetivo fraccionario en el nombre es una característica puramente histórica, ya que los órdenes pueden considerarse incluso en el conjunto de los números complejos.

Existen muchas ramas en cálculo fraccionario, cada una de ellas asociadas a diferentes operadores fraccionarios. Entre los más destacados se encuentran el Laplaciano fraccionario y las redicadas fraccionarias de Caputo o Riemann-Liouville.

En esta propuesta se pretende estudiar un problema asociado a la ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo. Esta ecuación se utiliza para describir procesos de difusión anómala, por ejemplo cuando un proceso de transferencia de calor no sigue la ley de Fourier. La principal característica de este tipo de ecuaciones es que la derivada temporal ha sido reemplazada por una derivada fraccionaria de Caputo en el tiempo. Esto es, una ecuación de evolución del siguiente tipo

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} u(\boldsymbol{x},t) = Lu(\boldsymbol{x},t), \qquad (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1} $$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera suficientemente regular, L es un operador diferencial de segundo orden simétrico y uniformemente elíptico (por ejemplo el laplaciano clásico) y

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{2} $$

Nos interesa considerar el siguiente problema de valores iniciales y de contorno para la EDF de tipo Robin:

$$ \begin{array}{lll} (i) & {}_0^C D_t^{\alpha} u(\boldsymbol{x},t) = Lu(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ (ii) & u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ (iii) & \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x},t) + \beta u(\boldsymbol{x},t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,\ 0 < t < T. \end{array} \tag{3} $$

Este problema fue considerado en [1] siguiendo la línea de Sakamoto y Yamamoto en [3], esto es, a través del método de Fourier de representación en series, obteniendo el resultado que enunciamos a continuación.

Teorema *Sean $\beta > 0$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución débil $u_\beta \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H^1(\Omega))$ del problema (3) tal que ${}_0^C D_t^{\alpha} u_\beta \in C((0,T]; L^2(\Omega))$. Más aún,*

$$ ||u_\beta||_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq C ||u_0||_{L^2(\Omega)}, \tag{4} $$

y se tiene que

$$ u_\beta(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \psi_n(\beta;\cdot)) E_{\alpha,1}(-\lambda_n(\beta) t^{\alpha}) \psi_n(\beta; \boldsymbol{x}) \tag{5} $$

donde las funciones $E_{\alpha,1}$ son las funciones de Mittag-Leffler, $(\lambda_n(\beta), \psi_n(\beta;\cdot))$ son los autovalores y autofunciones, respectivamente, del problema de Sturm-Liouville

$$ \begin{array}{lll} (i) & \Delta\psi(\boldsymbol{x}) + \lambda\psi(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ (ii) & \frac{\partial \psi}{\partial n}(\boldsymbol{x}) + \beta\psi(\boldsymbol{x}) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega; \end{array} \tag{6} $$

Nuestro objetivo es abordar este problema mediante una formulación variacional siguiendo la línea de Zacher [5] y Kubica y Yamamoto [2]. En dominios multidimensionales, los problemas que involucran ecuaciones parabólicas de segundo orden, se estudian generalmente mediante técnicas de cálculo variacional , y una de las herramientas claves que se utilizan en las pruebas (por ejemplo pruebas de existencia y unicidad) es la aplicación de la siguiente propiedad:

$$ \frac{d}{dt}|f(t)|^2 = 2\left(\frac{d}{dt}f(t), f(t)\right) \tag{7} $$

donde la notación del lado derecho denota un producto interno y el izquierdo tiene una derivada de la norma al cuadrado, en un cierto espacio de Hilbert. La validez de la propiedad (7) sigue de la Regla de la Cadena. Sin embargo, cuando se trabaja con derivadas fraccionarias en el tiempo, no podemos deducir la misma regla. En efecto, una versión análoga a la expresión (7) para derivadas de Caputo está dada en [4, Theorem 2.1] pero en contraste con la simplicidad de (7), el lado izquierdo contiene, además del término de derivada fraccionaria, otros términos que involucran integrales que dependen del tiempo con núcleos singulares.

Bibliografía

[1] Cardoso, I., Roscani, S., and Tarzia, D. About the convergence of a family of initial boundary value problems for a fractional diffusion equation of robin type. *Applied Mathematics and Computation 433* (2022), ID 127375.

[2] Kubica, A., and Yamamoto, M. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equa tions with time-dependent coefficients. *Fract. Calc. Appl. Anal. 21*, 2 (2018), 276–311.

[3] Sakamoto, K., and Yamamoto, M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion–wave equations and applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl. 382* (2011), 426–447.

[4] Zacher, R. Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces. *Funkc. Ekvacioj 52* (2009), 1–18.

[5] Zacher, R. A de giorgi–nash type theorem for time fractional diffusion equations. *Mathematische Annalen 356*, 1 (2013), 99–146.