FUNCTIONES REALES

Docentes: Dra. Gabriela Reyero. Lic. María Evangelina Álvarez.

Asignatura: L-316 Funciones Reales.

Carrera: Licenciatura en Matemática.

Departamento: de Matemática.

Escuela: de Ciencias Exactas y Naturales.

Facultad: de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Universidad: Nacional de Rosario.

Contenido: Los números reales. Funciones reales. Continuidad. Medibilidad. Medidas. Integración abstracta. La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Derivación e integración. Los espacios de Lebesgue L^p. El teorema de Radon-Nikodym. Espacios duales de los espacios L^p.

Pautas internas del sistema de evaluación de la materia

1. Se realizarán tres parciales **teóricos-prácticos**. Se calificará cada uno de ellos de 0 a 100 puntos. Se considerará:

- *alumno promovido*: al que obtenga en los tres parciales nota mayor o igual a 70 y como promedio de las tres evaluaciones una nota no inferior a 80. La condición de promovido es válida sólo para las mesas de noviembre y diciembre del año en curso. En caso de no aprobar el examen final quedará en condición de regular para los próximos turnos de exámenes.
- *alumno regular*: al que obtenga en cada parcial un puntaje mayor o igual a 50 y como promedio de las tres evaluaciones una nota no inferior a 60.
- *alumno libre*: a aquel que no cumpla los requisitos para ser alumno regular.

2. a) El examen final para alumnos promovidos será una evaluación integradora que consistirá en un coloquio final, inmediatamente terminado el cursado de la materia o eventualmente en las mesas de examen del turno noviembre-diciembre del corriente año.

b) El examen final para alumnos regulares consistirá de dos partes:

- una evaluación de ejercicios prácticos sobre los temas de la asignatura,
- una evaluación sobre la teoría de todos los temas de la materia.

c) El examen final para alumnos libres consistirá de tres partes:

- una evaluación de ejercicios prácticos sobre los temas de la asignatura que fueron incluidos en los parciales (similar a lo que rinde un alumno regular),
- una tercera evaluación de ejercicios prácticos sobre todos los temas de la asignatura,
- una evaluación sobre la teoría de todos los temas de la materia.

Para aprobar la materia hay que aprobar todas las instancias con una nota no menor a 60 en cada una de ellas.

3. Aquellos alumnos que no hayan quedado en condición regular durante el cursado de la materia, habiendo obtenido en uno de los parciales una nota mayor o igual a 50, podrán realizar un examen recuperatorio, que consistirá de una evaluación sobre los temas de la asignatura incluidos en el (o los) parcial(es) a recuperar, para conseguir la condición de regular.

4. Las fechas estimativas de los parciales y recuperatorios son:
Primer parcial: segunda semana de septiembre.
Segundo parcial: tercera semana de octubre.
Tercer parcial: segunda semana de noviembre.
Recuperatorios: tercera semana de noviembre.
Coloquio final para alumnos promovidos: tercera semana de noviembre o mesas de examen del turno noviembre-diciembre.

Índice

Parte I

Los números reales.

1. El sistema de los números reales.

El sistema de los números reales está caracterizado por ser un cuerpo ordenado y completo. Veremos en esta sección de manera precisa estos conceptos.

1.1. Cuerpos

Definición 1 *Un **cuerpo** es una terna $(F, +, \cdot)$ constituida por un conjunto F dotado de dos operaciones $+$ y $\cdot$ en F, denominadas respectivamente adición y multiplicación, que verifican los siguientes axiomas:*

Axiomas de la adición

A1 *Propiedad asociativa:* $x, y, z \in F \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$.

A2 *Propiedad conmutativa:* $x, y \in F \Rightarrow x + y = y + x$.

A3 *Existencia de elemento neutro para +:* $\exists!$ *elemento* $\theta \in F$ *t.q.* $x \in F \Rightarrow x + \theta = \theta + x = x$.

A4 *Existencia del opuesto de un elemento:* $x \in F$, $\exists!$ *elemento* $-x \in F$ *t.q.* $x+(-x) = (-x)+x = \theta$.

Axiomas de la multiplicación

A5 *Propiedad asociativa:* $x, y, z \in F \Rightarrow (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.

A6 *Propiedad conmutativa:* $x, y \in F \Rightarrow x\cdot y = y\cdot x$.

A7 *Existencia de elemento identidad para $\cdot$:* $\exists!$ *elemento* $\epsilon \in F$ *t.q.* $x \in F \Rightarrow x\cdot\epsilon = \epsilon\cdot x = x$.

A8 *Existencia del recíproco de un elemento:* $\theta \neq x \in F$, $\exists!$ *elemento* $x^{-1} \in F$ *tal que* $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = \epsilon$.

Axiomas comunes a la adición y la multiplicación

A9 Propiedad distributiva: $x, y, z \in F \Rightarrow (x + y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$.

Los axiomas anteriores no son independientes unos de otros. Se puede comprobar fácilmente (hacerlo) la unicidad del elemento neutro y de la identidad y además, al ser las operaciones asociativas, la unicidad del opuesto y del recíproco de todo elemento del conjunto.
A partir de estos axiomas se deducen todas las leyes usuales de manipulación de números reales. Veamos algunas de ellas

Proposición 1 *Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo, entonces*
i) $x \in F \Rightarrow x\cdot\theta = \theta\cdot x = \theta$.
ii) F no posee divisores del elemento neutro o cero, es decir que si $x, y \in F$, entonces $x\cdot y = \theta \Rightarrow x = \theta \vee y = \theta$.
iii) Vale la regla de los signos: $x, y \in F \Rightarrow x\cdot(-y) = (-x)y = -(x\cdot y)$, *de donde se obtiene que* $x, y \in F \Rightarrow (-x)\cdot(-y) = x\cdot y$, *y en particular* $(-\epsilon)(-\epsilon) = \epsilon\cdot\epsilon = \epsilon$.

iv) *Si $x, y \in F$, entonces la suma $x + (-y)$ será simbolizada $x - y$ y denominada* ***diferencia entre** x* ***e** y. Si $y \neq \theta$ entonces el producto $x{\cdot}y^{-1}$ será simbolizado x/y y denominado **cociente entre** x **e** y. Las operaciones*

$$(x, y) \to x - y, \qquad\qquad (x, y) \to x/y,$$

*son denominadas **sustracción** y **división** .*
v) *Si $x, y \in F$, entonces $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$.*

dem: *i*) $x \in F \to x{\cdot}\theta + x = x{\cdot}\theta + x{\cdot}\epsilon = x{\cdot}(\theta + \epsilon) = x{\cdot}\epsilon = x$.
El resultado sigue de la unicidad del elemento neutro para la suma.

ii) Si $y \neq \theta$, luego $x{\cdot}y = \theta \to \theta = \theta{\cdot}y^{-1} = (x{\cdot}y){\cdot}y^{-1} = x{\cdot}(y{\cdot}y^{-1}) = x{\cdot}\epsilon \Rightarrow x{\cdot}\epsilon = \theta \Rightarrow x = \theta$.

iii) Siendo $x{\cdot}(-y) + x{\cdot}y = x{\cdot}((-y) + y) = x{\cdot}\theta = \theta$ resulta $x{\cdot}(-y) = -(x{\cdot}y)$. En forma análoga se muestra que $(-x){\cdot}y = -(x{\cdot}y)$.
Usando el hecho que $z \in F \Rightarrow -(-z) = z$, se tiene que $(-x){\cdot}(-y) = -(x{\cdot}(-y)) = x{\cdot}(-(-y)) = x{\cdot}y$.

v) Observemos que $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = (x - y){\cdot}(x + y) = \theta \Rightarrow x - y = \theta \vee x + y = \theta$. □

Definición 2 *Un **subcuerpo** de un cuerpo $(F, +, \cdot)$ es un subconjunto H no vacío de F tal que munido de las restricciones de las operaciones $+$ y $\cdot$ a H, constituye un cuerpo.*

Teorema 1 *Si $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo, un subconjunto no vacío H de F es un subcuerpo si y sólo si se verifican los axiomas siguientes:*

SC1 *H es cerrado con respecto a las operaciones es decir: $x, y \in H \Rightarrow x + y \in H \wedge x{\cdot}y \in H$.*

SC2 *H es cerrado con respecto a la oposición y a la inversión, i.e.: $x \in H \Rightarrow -x \in H$ y $\theta \neq x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.*

Corolario 1 *Sea F un cuerpo, entonces:*
a) *La intersección de cualquier familia no vacía de subcuerpos de F es un subcuerpo de F.*
b) *La intersección F_0 de todos los subcuerpos de F es el menor subcuerpo de F, en el sentido que si H es un subcuerpo de F entonces $F_0 \subseteq H$.*

1.2. Cuerpos ordenados

Definición 3 *Una relación "$\leq$" sobre un conjunto S es una **relación de orden** si verifica las siguientes propiedades: Si $x, y, z \in S$, entonces*
(O1) Propiedad reflexiva: $x \leq x$;
(O2) Propiedad antisimétrica: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$;
(O3) Propiedad transitiva: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow z \leq z$.

*Una relación de orden sobre un conjunto S es una **relación de orden lineal o total** si verifica que: Si $x, y \in S$ entonces:*
(O4) Propiedad de linealidad (o totalidad): $x \leq y \vee y \leq x$.

Definición 4 *Un subconjunto F^+ de un cuerpo F es un **subconjunto de elementos positivos** del cuerpo F si verifica los siguientes axiomas.*
i) *Es estable con respecto a la adición y a la multiplicación:*

$$x, y \in F^+ \Rightarrow x + y \in F^+, \;\; x{\cdot}y \in F^+.$$

ii) *Se verifica el principio de tricotomía: si $x \in F$ entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:*

$$x = \theta, \quad x \in F^+, \quad , -x \in F^+.$$

Nota 1 *Se simboliza* $F^- := \{x \in F : -x \in F^+\}$. *De este modo el axioma* ii) *indica que* $\{\{\theta\}, F^+, F^-\}$ *es un partición del conjunto* F. *Se dice que* F^- *es el* ***conjunto de elementos negativos*** *del cuerpo* F. *Se tiene que*

$$x \in F \wedge x \neq \theta \Rightarrow x^2 \in F^+.$$

En efecto pues, si $x \in F^+$, *por el axioma* i) *se tiene que* $x{\cdot}x \in F^+$ *y si* $x \notin F^+$, *entonces al ser* $x \neq \theta$, *por el axioma* ii) *resulta* $-x \in F^+$ *y así* $x^2 = (-x)(-x) \in F^+$. *En particular se tiene que* $\epsilon = \epsilon{\cdot}\epsilon = \epsilon^2 \in F^+$.

Definición 5 *Sea* F^+ *un subconjunto de elementos positivos del cuerpo* F, *se define la relación* $<$ *en el conjunto* F *de la siguiente manera*

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in F^+,$$

en tal caso se dice que x *es* ***menor que*** y. *La relación inversa se simboliza* $>$, *y se dice que* y *es* ***mayor que*** y.

En particular se tiene que

$$F^+ = \{x \in F : \theta < x\}, \quad F^- = \{x \in F : x < \theta\}.$$

La relación recién definida posee propiedades de las que se deducen todas las leyes usuales del cálculo con desigualdades entre números reales. Veamos algunas.

Proposición 2 *Sea* F^+ *un subconjunto de elementos positivos de un cuerpo* F, *entonces la relación* $<$ *que él determina verifica las siguientes propiedades. Siendo* $x, y, z \in F$ *se tiene*
i) Propiedad transitiva: $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z.$
ii) Propiedad de tricotomía: una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

iii) Monotonía de la adición$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z.$
iv) Monotonía de la multiplicación: $x < y \wedge \theta < z \Rightarrow x{\cdot}z < y{\cdot}z, \quad x < y \wedge z < \theta \Rightarrow y{\cdot}z < x{\cdot}z.$
v) $\theta < x < y \rightarrow y^{-1} < x^{-1}.$

dem: *i*) Por la definición de $<$ y usando el axioma *i*)

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow y - x \in F^+ \wedge z - y \in F^+ \Rightarrow z - x = (z - y) + (y - x) \in F^+ \Rightarrow x < z.$$

ii) El resultado surge de lo que sucede con las proposiciones

$$y - x \in F^+, \quad y - x = \theta, \quad x - y = -(y - x) \in F^+.$$

iii) Se tienen las siguientes equivalencias

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in F^+ \Leftrightarrow (y + z) - (x - z) = y - x \in F^+ \Leftrightarrow x + z < y + z.$$

iv) La primera proposición sigue de usar el primer axioma, pues

$$x < y \wedge \theta < z \Rightarrow y - x \in F^+ \wedge z \in F^+ \Rightarrow y{\cdot}z - x{\cdot}z = (y - x){\cdot}z \in F^+ \Rightarrow x{\cdot}z < y{\cdot}z.$$

La segunda desigualdad es análoga.
v) Veamos primero que el recíproco de un elemento de F^+ es un elemento de dicho conjunto. En efecto pues

$$\theta < z \Rightarrow \theta = \theta{\cdot}(z^{-1})^2 < z{\cdot}(z^{-1})^2 = z^{-1}.$$

Ahora, puesto que $\theta < x^{-1}$ y $\theta < y^{-1}$ resulta $\theta < x^{-1}{\cdot}y^{-1}$ y en consecuencia

$$x < y \Rightarrow x{\cdot}(x^{-1}{\cdot}y^{-1}) < y{\cdot}(x^{-1}{\cdot}y^{-1}) \Rightarrow y^{-1} < x^{-1},$$

como queríamos demostrar. □

La relación $<$ definida en el cuerpo F a partir del conjunto de elementos positivos F^+ no es una relación de orden, pues si bien verifica las propiedades antisimétrica y transitiva, no verifica, debido a la propiedad de tricotomía, la propiedad reflexiva.

Definición 6 *Un **cuerpo ordenado** es un par* $(F, \leq)$ *constituido por un cuerpo F y una relación* $\leq$ *sobre el conjunto F tales que*
a) La relación $\leq$ *es una relación de orden lineal sobre F, i.e.* $x, y, z \in F$ *entonces*
(CO1) *Propiedad reflexiva:* $x \leq y$,
(CO2) *Propiedad antisimétrica:* $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$,
(CO3) *Propiedad transitiva:* $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$,
(CO4) *Propiedad de linealidad:* $x, y \in F \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$.

b) La relación $\leq$ *es compatible con la estructura de cuerpo de F, en el sentido que si* $x, y, z \in F$ *entonces*
(CO5) *Monotonía de la adición:* $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
(CO6) *Monotonía de la multiplicación* $x \leq y \wedge \theta < z \Rightarrow x{\cdot}z \leq y{\cdot}z$.

Definición 7 *Sea* F^+ *un subconjunto de elementos positivos de un cuerpo F y* $<$ *la relación de menor que él determina sobre F. Se define la relación* $\leq$ *sobre el conjunto F del siguiente modo, para* $x, y \in F$

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y,$$

*en cuyo caso se dice que x es **menor o igual** que y (o bien que y es **mayor o igual** que x).*

Teorema 2 *Sea* F^+ *un subconjunto de elementos positivos de un cuerpo F y* $\leq$ *la relación de menor o igual que él determina sobre el conjunto F. Entonces el par* $(F, \leq)$ *constituye un cuerpo ordenado*

Puede demostrarse el resultado recíproco de este teorema es decir que si $(F, \leq)$ es un cuerpo ordenado entonces el subconjunto $\{x \in F : \theta \leq x \wedge \theta \neq x\}$ constituye un subconjunto de elementos positivos del cuerpo F. Demostrar ambos resultados.

1.3. Los múltiplos de un elemento de un cuerpo

Definición 8 *Sea F un cuerpo, siendo* $n \in \mathbb{Z}$ *y* $x \in F$ *se define el elemento* $nx \in F$ *del siguiente modo*

$$nx = \begin{cases} \theta & \text{si } n = 0 \\ x & \text{si } n = 1 \\ (n-1)x + x & \text{si } n > 1 \\ -((-n)x & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

De la definición anterior se obtiene que

$$n \in \mathbb{Z}, x \in F \Rightarrow -(nx) = (-n)x, \qquad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n\theta = \theta.$$

Lema 1 *Sea F un cuerpo, para* $n, m \in \mathbb{Z}$ *y* $x, y \in F$ *se tiene que*

i) $(m + n)x = mx + nx$, *iii)* $m(-x) = (-m)x = -(mx)$, *v)* $m(x{\cdot}y) = (mx){\cdot}y$
ii) $m(x + y) = mx + my$, *iv)* $n(mx) = (nm)x$.

dem: Se ve fácilmente que los resultados son válidos para los casos $n = 0, m = 0$ o $x = \theta, y = \theta$. Veamos las demostraciones para el caso en que $m \neq 0 \neq n$.

i) En el caso que m y n sean enteros positivos el resultado se prueba por inducción. Fijado $m \in \mathbb{Z}$ probemos $(m+n)x = mx + nx$. Para $n = 1$ vale, veamos que si vale para k vale para $k+1$.

$$(m+(k+1))x = ((m+k)+1)x = (m+k)x + x = (mx+kx)+x = mx+(kx+x)0mx+(k+1)x.$$

En el caso en que $m < 0$ y $n < 0$, entonces $m + n < 0$, de donde

$(m+n)x = -[(-(m+n))x] = -[((-m)+(-n))x] = -[(-m)x+(-n)x] = -[(-m)x]+[-((-n)x)] = mx + nx$

En el caso en que $m < 0$ y $n > 0$ debemos analizar dos casos:

• Si $|m| \leq n$, se tiene

$$(m+n)x = \theta + (m+n)x = (mx+(-m)x)+(m+n)x = mx+((-m)x+(m+n)x) = mx+nx.$$

• Si $|m| > n$ entonces

$$(m+n)x = (m+n)x + \theta = (m+n)x + ((-n)x + nx) = ((m+n)x + (-n)x) + nx = mx + nx.$$

ii) En el caso en que m sea un número entero positivo el resultado se demuestra por inducción. Si m es un número negativo, se aplica la definición y el resultado ya demostrado.

iii) A partir de las igualdades $\theta = n\theta = n(x + (-x)) = nx + n(-x)$ se obtiene que $n(-x) = -(nx)$.

iv), *v*) Las demostraciones son similares a lo hecho hasta acá. Hágalo. □

1.4. Cuerpos ordenables

Hemos mencionado que una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo F sea ordenable (es decir que exista una relación de orden lineal sobre el conjunto F compatible con su estructura de cuerpo) es que el mismo posea un subconjunto de elementos positivos. La respuesta a si esto siempre es posible de encontrar es negativa.

Teorema 3 *Si $(F, \leq)$ es un cuerpo ordenado entonces F es un conjunto infinito.*

dem: Según vimos se tiene que $\theta < \epsilon$, y así por inducción se obtiene que

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n\epsilon < (n+1)\epsilon.$$

De este modo se tiene que $m \neq n \Rightarrow m\epsilon \neq n\epsilon$, entonces el conjunto $\{n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de F y en consecuencia resulta F un conjunto infinito. □

Corolario 2 *Todo subcuerpo de un cuerpo ordenado F es un conjunto infinito.*

Este resultado muestra que si F es un cuerpo finito no es ordenable, i.e. no existe ninguna relación de orden sobre F que sea compatible con su estructura de cuerpo. Veamos que esto también puede suceder aun en el caso de que F sea infinito.

Proposición 3 *El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos no es ordenable.*

dem: Supongamos que sea $\prec$ un orden cualquiera sobre el conjunto $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, en este caso se tiene que $\theta = (0,0)$ y $\epsilon = (1,0)$. Se tiene

$$\theta = (0,0) \prec (0,-1)^2 = (0,-1)(0,-1) = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -\epsilon,$$

contradiciendo el hecho que probamos que $\theta \prec \epsilon$.
En consecuencia queda demostrado que la relación de orden no es lineal. □

1.5. Caracterización del subcuerpo racional de un cuerpo ordenado F

Definición 9 *Sea $(F,\leq)$ un cuerpo ordenado, al menor subcuerpo de F se lo denomina* ***subcuerpo racional*** *del cuerpo F. Se simboliza el subcuerpo racional de un cuerpo F como F_0.*

Observemos que al ser F_0 un subcuerpo de F, entonces por ser F_0 cerrado respecto de la adición y la oposición resulta

$$\{n\epsilon : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq F_0.$$

Además si $0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$ entonces F_0 contiene la solución de la ecuación

$$(n\epsilon)x = m\epsilon,$$

que siempre existe y es única, y que simbolizamos $m\epsilon/n\epsilon = \dfrac{m\epsilon}{n\epsilon}$. Por lo tanto se tiene que

$$\{m\epsilon/n\epsilon : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \subseteq F_0.$$

Propiedad 1 *Valen las siguientes propiedades*

a) $\dfrac{0\epsilon}{1\epsilon} = \theta$ *y* $\dfrac{1\epsilon}{1\epsilon} = \epsilon$.

b) Si $m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $0 \neq k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{(km)\epsilon}{(kn)\epsilon} = \dfrac{m\epsilon}{n\epsilon}$.

c) Si $m, r, n \neq 0, s \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\dfrac{m\epsilon}{n\epsilon} = \dfrac{r\epsilon}{s\epsilon} \Leftrightarrow ms = nr$.

d) Si $m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\dfrac{m\epsilon}{n\epsilon} = \theta \Leftrightarrow m = 0$.

e) Si $m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\dfrac{m\epsilon}{n\epsilon} < \theta \Leftrightarrow mn > 0$.

El siguiente teorema caracteriza el subcuerpo racional F_0 de un cuerpo ordenado $(F,\leq)$, mostrando que sus elementos son los recién presentados.

Teorema 4 *Sea $(F,\leq)$ un cuerpo ordenado, entonces el subcuerpo racional F_0 de F es el conjunto*

$$F_0 = \{m\epsilon/n\epsilon : m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}\}.$$

dem: Por las consideraciones anteriores basta ver que este conjunto es un subcuerpo de F. Para ello usemos el resultado presentado en el Teorema 1, de este modo tenemos que probar:

$$a)\ \ \frac{m\epsilon}{n\epsilon} + \frac{r\epsilon}{s\epsilon} = \frac{(ms+nr)\epsilon}{(ns)\epsilon}, \qquad c)\ \ \frac{-(m)\epsilon}{n\epsilon} = \frac{(-m)\epsilon}{n\epsilon},$$

$$b)\ \ \frac{m\epsilon}{n\epsilon}\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon} = \frac{(mr)\epsilon}{(ns)\epsilon}, \qquad d)\ \ m \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\right)^{-1} = \frac{n\epsilon}{m\epsilon}.$$

Veamos a), para ello basta considerar

$$(ns)\epsilon \cdot \left(\tfrac{m\epsilon}{n\epsilon} + \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon}\right) = (ns)\epsilon \cdot \left(\tfrac{(ms)\epsilon}{(ns)\epsilon} + \tfrac{(nr)\epsilon}{(ns)\epsilon}\right) = (ns)\epsilon \cdot \tfrac{(ms)\epsilon}{(ns)\epsilon} + (ns)\epsilon \cdot \tfrac{(nr)\epsilon}{(ns)\epsilon} = (ms)\epsilon + (nr)\epsilon$$
$$= (mx + nr)\epsilon.$$

Para el caso b) la igualdad que se debe usar es

$$(ns)\epsilon \cdot \left(\tfrac{m\epsilon}{n\epsilon} \cdot \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon}\right) = s(n\epsilon) \cdot \left(\tfrac{m\epsilon}{n\epsilon} \cdot \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon}\right) = \left(s(n\epsilon) \cdot \tfrac{m\epsilon}{n\epsilon}\right) \cdot \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon} = s\left((n\epsilon) \cdot \tfrac{m\epsilon}{n\epsilon}\right) \cdot \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon} = s(m\epsilon) \cdot \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon}$$
$$= m(s\epsilon) \cdot \tfrac{r\epsilon}{s\epsilon} = m(r\epsilon).$$

Para la prueba de c) y d) deben usarse

$$\frac{m\epsilon}{n\epsilon} + \frac{(-m)\epsilon}{n\epsilon} = \frac{(mn + (-m)n)\epsilon}{(nn)\epsilon} = \frac{0\epsilon}{(nn)\epsilon} = \theta,$$

$$\frac{m\epsilon}{n\epsilon} \cdot \frac{n\epsilon}{m\epsilon} = \frac{(mn)\epsilon}{(mn)\epsilon} = \frac{1\epsilon}{1\epsilon} = \epsilon.$$

Quedando así demostrado el teorema. □

Corolario 3 *El subcuerpo racional de un cuerpo ordenado es un conjunto numerable.*

1.6. Isomorfismo entre subcuerpos racionales

A partir de la demostración del último teorema vemos que está justificado el nombre de cuerpo racional ya que el mismo actúa de manera similar al subcuerpo $\mathbb{Q}$ de los reales, cuyos elementos se expresan como un cociente de números enteros.

Definición 10 *Sean F y G dos cuerpos ordenados, una aplicación biyectiva $\varphi : F \to G$ es un **isomorfismo** si y sólo si se verifican los siguientes axiomas:*
i) $x, y \in F \Rightarrow \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
ii) $x, y \in F \Rightarrow \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$,
iii) $x, y \in F,\ x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$,
*Dos cuerpos ordenados F y G se dicen **isomorfos** si existe algún isomorfismo $\varphi : F \to G$.*

Notemos que puede verificarse que dados dos cuerpos ordenados F, G una aplicación $\varphi : F \to G$ es un isomorfismo si su inversa lo es. Además se comprueba fácilmente que la composición de isomorfismos es un isomorfismo, con lo que se obtiene que, en el conjunto de todos los cuerpos ordenados, la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia.

Proposición 4 *Sean F y $\tilde{F}$ dos cuerpos ordenados, si F_0 y $\tilde{F}_0$ son sus respectivos subcuerpos racionales, entonces los cuerpos F_0 y $\tilde{F}_0$ son isomorfos.*

dem: Sean ϵ y $\tilde{\epsilon}$ los elementos unidad de los cuerpos F y $\tilde{F}$ respectivamente, basta demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & F_0 & \to & \tilde{F}_0 \\ & \frac{m\epsilon}{n\epsilon} & \mapsto & \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) = \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}}, \end{array}$$

es un isomorfismo.

La aplicación Φ es biyectiva: la sobreyectividad es inmediata y para la inyectividad se tiene que

$$\Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) = \Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}) \Leftrightarrow \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}} = \frac{r\tilde{\epsilon}}{s\tilde{\epsilon}} \Leftrightarrow ms = nr \Leftrightarrow \frac{m\epsilon}{n\epsilon} = \frac{r\epsilon}{s\epsilon}.$$

Además en lo concerniente a las operaciones se tiene que

$$\Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}+\frac{r\epsilon}{s\epsilon}) = \Phi(\frac{(ms+nr)\epsilon}{(ns)\epsilon} = \frac{(rn+ms)\tilde{\epsilon}}{(ns)\tilde{\epsilon}} = \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}}+\frac{r\tilde{\epsilon}}{s\tilde{\epsilon}} = \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon})+\Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}).$$

De manera análoga se tiene que

$$\Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon}) = \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon})\cdot\Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}).$$

Falta solamente verificar el axioma *iii*) de isomorfismo para ello notemos que

$$\frac{m\epsilon}{n\epsilon}<\frac{r\epsilon}{s\epsilon} \Leftrightarrow \frac{r\epsilon}{s\epsilon}-\frac{m\epsilon}{n\epsilon} = \frac{(rn-ms)\epsilon}{ns\epsilon} > \theta \Leftrightarrow (rn-ms)>0 \Leftrightarrow \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}}<\frac{r\tilde{\epsilon}}{s\tilde{\epsilon}} \Leftrightarrow \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon})<\Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}),$$

como queríamos demostrar □

Corolario 4 *Sea F un cuerpo ordenado, entonces su subcuerpo racional F_0 es isomorfo al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.*

1.7. Cuerpos ordenados completos

Cuando se estudia la estructura de los números reales, además de los axiomas de cuerpo y de orden también se estudia el ***axioma de completitud*** , estrechamente ligado a la estructura topológica de dicho espacio.

Noción de supremo de un subconjunto de un cuerpo ordenado

Definición 11 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío de F.*
*Se dice que X es **acotado superiormente** si existe un elemento $b \in F$ tal que si $x \in X \Rightarrow x \leq b$.*
*Se dice que X es **acotado inferiormente** si existe un elemento $a \in F$ tal que si $x \in X \Rightarrow a \leq x$.*
*Se dice que X es **acotado** si es acotado superior e inferiormente, i.e. si existen elementos $a, b \in F$ tales que si $x \in X \Rightarrow a \leq x \leq b$.*

Un subconjunto X de un conjunto ordenado está acotado si está contenido en un intervalo $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ o en forma equivalente si existe un elemento $k \in F$ tal que

$$x \in X \Rightarrow |x| \leq k.$$

Definición 12 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío y acotado superiormente de F.*
*Un elemento $s \in F$ es un **extremo superior o supremo** de X si es la menor de las cotas superiores de X, i.e. si se verifican los siguientes axiomas:*
i) s es cota superior del subconjunto X: $x \in X \Rightarrow x \leq s$.
ii) Si b es una cota superior del subconjunto X entonces $s \leq b$.
Se simboliza el supremo del conjunto X como $\sup(X)$.

Notemos que la condición *ii*) puede interpretarse como que ningún elemento menor que s puede ser cota superior de X, i.e.

Si $c < s$ luego existe $x \in X$ tal que $c < x < s$.

Otro modo de expresar esta última condición es la siguiente

$$\forall \rho \in F^{+} \text{ existe un } x \in X \text{ tal que } s - \rho < x < s.$$

Definición 13 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío y acotado inferiormente de F. Un elemento $i \in F$ se denomina el* ***extremo inferior o ínfimo*** *si es la mayor de las cotas inferiores de X, i.e. se verifican las siguientes propiedades*
i) i es una cota inferior del subconjunto X: $x \in X \Rightarrow i \leq x$.
ii) Si a es una cota inferior del subconjunto X entonces $a \leq i$.
Se simboliza al ínfimo como $\text{ínf}(X)$.

Análogamente a lo enunciado para el supremo puede mostrarse que la segunda propiedad puede reformularse como: ningún número mayor que i puede ser cota inferior de X, i.e.

$$\text{Si } i < c \text{ luego existe } x \in X \text{ tal que } i < x < c.$$

De manera equivalente

$$\forall \rho \in F^{+} \text{ existe un } x \in X \text{ tal que } i < x < i + \rho.$$

Definición 14 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío de F. Se dice que el elemento $m \in X$ es el* ***máximo de*** *X si*

$$x \in X \Rightarrow x \leq m,$$

en otras palabras, cuando m es una cota superior de X perteneciente a dicho conjunto.

Resulta evidente que si X es un subconjunto no vacío de un cuerpo ordenado F que posee máximo m entonces el conjunto X es acotado superiormente y su supremo es m.

Ejemplo 1 *Se demuestra fácilmente que los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ son subconjuntos acotados superiormente, que ambos admiten como cotas superiores los elementos del conjunto $\{x \in F : b \leq x\}$ y por lo tanto b es el supremo de los dos intervalos. Además $b = \text{máx}([a, b])$ mientras que $[a, b)$ no tiene máximo.*

El axioma de completitud

Según mencionamos en el ejemplo anterior existen subconjuntos acotados superiormente de un conjunto ordenado que no poseen elemento máximo, pero que si poseen supremo. Nos preguntamos si todo subconjunto acotado superiormente posee un supremo. La respuesta general a esta pregunta es no. Veremos un resultado donde efectivamente esto no sucede.

Teorema 5 *El siguiente subconjunto del cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$*

$$X = \{p \in \mathbb{Q} : 0 \leq p \wedge p^2 < 2\}$$

es acotado superiormente y no posee supremo.

dem: Observemos que $0 \leq p \wedge p^2 < 2 \Rightarrow p < 2$, luego X es un conjunto acotado superiormente.
Supongamos que X posea supremo $m \in \mathbb{Q}$. Por el principio de tricotomía, debe verificarse una de estas proposiciones:

$$m^2 = 2, \qquad m^2 \in X_1 = \{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2\}, \qquad m^2 \in X_2 = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2\}.$$

Veamos en primer lugar que $m^2 \neq 2$. Si sucediera esto tendríamos que $p = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ no ambos pares. Entonces se tendría que

$$m^2 = 2n^2.$$

Esto muestra que m^2 sería un número par de igual modo m sería un número par y por lo tanto que m^2 es divisible por 4. De aquí tendríamos que $2n^2$ es divisible por 4 y por lo tanto que n^2 es un número par, de donde n sería par contradiciendo nuestra hipótesis.
Para demostrar lo que falta consideremos para cada número racional $p > 0$

$$\pi = p - \frac{p^2-2}{p+2} = \frac{2p+2}{p+2} \qquad \Rightarrow \qquad \pi^2 - 2 = \frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}. \tag{1}$$

Si suponemos que $p \in X_1$, i.e. $p^2 - 2 < 0$, surge de la primera igualdad anterior que $p < \pi$ y de la segunda que $\pi^2 < 2$, luego p no puede ser cota superior del conjunto X. Luego toda cota superior del conjunto X debe estar en X_2. Además como

$$p \in X_2 \wedge x \in X \Rightarrow x^2 < 2 < p^2 \Rightarrow 0 < p^2 - x^2 = (p+x)(p-x) \Rightarrow p - x > 0$$

se tiene que todo $p \in X_2$ es cota superior del conjunto X.
Para terminar basta ver que el conjunto X_2 no contiene un menor elemento, esto pues si

$$p \in X_2 \Rightarrow p^2 - 2 > 0$$

y de la primera igualdad en (1) se obtiene que $\pi < p$ y de la segunda que $\pi^2 > 2$, es decir que π es una cota superior de X y por lo tanto p no puede ser el supremo de X_2. Luego de existir el supremo no satisface el principio de tricotomía, lo que es un absurdo y queda demostrado el resultado. □

Definición 15 *El **Principio del extremo superior**. Se dice que un cuerpo ordenado F es **completo** si todo subconjunto no vacío de F acotado superiormente posee supremo.*

Lema 2 *Si F es un cuerpo ordenado completo entonces todo subconjunto no vacío del cuerpo F acotado inferiormente posee ínfimo.*

dem: Sea $\emptyset \neq X \subset F$ acotado inferiormente, definimos el conjunto

$$-X = \{x \in F : -x \in X\}.$$

Es inmediato verificar que $-X$ es un subconjunto vacío de F, acotado superiormente. La completitud de F asegura la existencia del supremo de dicho subconjunto. Demostrando que

$$\text{ínf}(X) = -\sup(-X),$$

la prueba queda completa. □

Veamos a continuación algunas propiedades de los cuerpos ordenados y completos.

Teorema 6 *Sea F un conjunto ordenado y completo, entonces:*
i) El conjunto $N = \{n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado superiormente.
ii) El ínfimo del conjunto $X = \{1\epsilon/n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ es θ.
*iii) El **Principio de Eudoxo-Arquímedes**: Dado $a \in F^+$ y $b \in F$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$.*

dem: *i*) Siendo $\emptyset \neq N \subset F$, éste cuerpo ordenado y completo, si N fuese acotado superiormente tendría un supremo. Supongamos que sea $s = \sup(N)$, se tiene entonces que $s - 1\epsilon$ no es cota superior de N y por lo tanto existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1\epsilon < n\epsilon$, luego

$$s = (s - 1\epsilon) + 1\epsilon < n\epsilon + 1\epsilon = (n + 1)\epsilon.$$

Como $(n + 1)\epsilon \in N$, la desigualdad anterior indica que s no es cota superior de N por lo tanto s no puede ser el supremo del mismo.
ii) Claramente θ es una cota inferior de X, basta ver que es la mayor y para ello veremos que si $c \in F^+$ luego c no es cota inferior de X.
Como $\theta < c$ por lo visto en *i*) se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\theta < c^{-1} < n\epsilon = \frac{n\epsilon}{1\epsilon},$$

entonces

$$\frac{1\epsilon}{n\epsilon} = (\frac{n\epsilon}{1\epsilon})^{-1} < (c^{-1})^{-1} = c,$$

luego c no es cota inferior de X.
iii) Por lo visto en *i*) existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^{-1} \cdot b < n\epsilon,$$

entonces se tiene que

$$b = a \cdot (a^{-1} b) < a \cdot (n\epsilon) = n(a\epsilon) = na.$$

De este modo queda demostrado el teorema. □

El siguiente es un resultado debido a Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845 Saint Petersburgo - 1918 Halle).

Teorema 7 ***El principio del encaje de intervalos cerrados***
Sea F un cuerpo ordenado completo, si $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de intervalos cerrados encajados, i.e. tales que*

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots,$$

Entonces

a)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

b) *Además, si* $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = \theta$, *entonces existe* $\xi \in F$ *tal que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}.$$

dem: *a*) A partir de la sucesión de intervalos podemos obtener las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \qquad \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Veamos que para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \leq b_m$. De no ser así existen $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, supongamos que $n_0 \leq m_0$ tales que $b_{m_0} < a_{n_0}$, luego $a_{m_0} < b_{m_0} < a_{n_0}$ lo que es una

contradicción con el hecho que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente.
El conjunto $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado superiormente, luego como F es un cuerpo ordenado completo existe $s_a = \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ siendo $a_n \le s_a, \forall n \in \mathbb{N}$. Además por ser cada b_m cota superior de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta $s_a \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Por otro lado $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado inferiormente, tiene ínfimo y se verifica $a_n \le s_b \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Resumiendo se tienen las siguientes desigualdades

$$a_n \le s_a \le s_b \le b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

con lo cual resulta $[s_a, s_b] \subset [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$ y así

$$\emptyset \ne [s_a, s_b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$$

Se tiene entonces que $\theta \le s_b - s_a \le b_n - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, luego $s_b - s_a$ es cota inferior de $\{b_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}$, con lo cual es menor que el ínfimo, de donde si éste es θ se tiene

$$\theta \le s_b - s_a \le \theta \Rightarrow s_b - s_a = \theta \Rightarrow s_b = s_a = \xi,$$

como queríamos probar. □

Teorema 8 *Sea F un cuerpo ordenado que verifica el ppio. de Eudoxo-Arquímedes y el ppio. del encaje de intervalos cerrados, entonces F es un cuerpo ordenado completo.*

dem: Sea $\emptyset \ne X \subset F$ acotado superiormente, queremos ver que existe $\xi \in F : \xi = \sup(X)$. Sea

$$M = \{m \in F : m \text{ es cota superior de } X\} = \{m \in F : m \ge x, \forall x \in X\}.$$

Sea $b \in M$ y $a \in X$ fijos. Vamos a construir una sucesión de intervalos cerrados en F. Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} > \theta$ y además $b - a \le \theta$, luego por el ppio. de Eudoxo-Arquímedes, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$b - a < m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} \Rightarrow b < a + m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon},$$

de donde resulta $a + m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}$ cota superior de X, pues b lo era.
Para n fijo elegimos

$$p_n := \min\{m \in \mathbb{N} : a + m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} \text{ es cota superior de } X\},$$

entonces

$$a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} \ge x, \forall x \in X,$$

y $a + (p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}$ no es cota superior de X, luego existe $x_0 \in X$ tal que $a + (p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < x_0$.
Consideremos los intervalos

$$I_n = [a_n, b_n] = [a + (p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}, a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}], n = 1, 2, ...$$

$I_n \cap X \ne \emptyset$, pues para cada n está el x_0 que mencionamos recién.
Si observamos que $p_{n+1} = 2p_n$ o bien $p_{n+1} = 2p_n - 1$. Esto pues

$$p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = 2p_n\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon},$$

luego $a + 2p_n \frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon}$ es cota superior de X y $p_{n+1} \leq 2pn$. Por otro lado

$$(p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = (2p_n - 2)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon},$$

con lo cual $a + (2p_n - 2)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon}$ no es cota superior de X, y resulta $2p_n - 1 \leq p_{n+1}$.
Si se tiene que $p_{n+1} = 2p_n$ resulta

$$a + p_{n+1}\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a + 2p_n\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon},$$

es decir que $b_{n+1} = b_n$, i.e. los extremos derechos de I_n y de I_{n+1} coinciden. Además

$$a_n = a + (p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - 1\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - \frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a_{n+1}.$$

Si se tiene que $p_{n+1} = 2p_n - 1$ resulta

$$a + (p_{n+1} - 1)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a + (2p_n - 1 - 1)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a + (p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon},$$

es decir que $a_{n+1} = a_n$ i.e. los extremos izquierdos de I_n y de I_{n+1} coinciden. Además

$$b_{n+1} = a + p_{n+1}\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - 1\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} < a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = b_n.$$

En consecuencia en ambos casos resulta $I_{n+1} \subset I_n$, siendo $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ un encaje de intervalos cerrados en F. Además se tiene que

$$b_n - a_n = a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - a + (p_n - 1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = \frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < \frac{1\epsilon}{n\epsilon},$$

con lo cual $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{b_n - a_n\} = \theta$. Luego por el ppio. del encaje de intervalos cerrados se obtiene que existe un único elemento $\xi \in F$ tal que $\{\xi\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.
Falta por demostrar que efectivamente ξ es supremo del conjunto X. Veamos primero que es una cota superior, de no serlo existiría un elemento $x_0 \in X$ tal que $\theta < x_0 - \xi$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < \frac{1\epsilon}{n\epsilon} < x - \xi,$$

y en consecuencia

$$a + \frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon} = a + \frac{(p_n - 1)\epsilon}{2^n\epsilon} + \frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < (a + \frac{(p_n - 1)\epsilon}{2^n\epsilon} - \xi) + x < x,$$

en cuyo caso el elemento $a + \frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon}$ no sería una cota superior del conjunto X, lo que es una contradicción por construcción.
Finalmente para ver que ξ es supremo de X, supongamos que no lo es. Luego existe un elemento $y \in M$ tal que $y < \xi$, con lo que existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < \xi - y$, y como $\xi \in I_n$ resultaría

$$a + \frac{(p_n - 1)\epsilon}{2^n\epsilon} = a + \frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon} - \frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} > (a + \frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon} - \xi) + y > y,$$

en cuyo caso el elemento $a + \frac{(p_n-1)\epsilon}{2^n\epsilon}$ sería una cota superior de X contradiciendo una vez más su construcción. □

Densidad del subcuerpo racional en un cuerpo ordenado y completo

Es muy importante el siguiente resultado que presentamos sin demostración, la misma puede verse en [4]

Teorema 9 *Un cuerpo ordenado y completo es un conjunto infinito no numerable.*

Proposición 5 *Sea F un cuerpo ordenado completo y sea F_0 su subcuerpo racional. Si $x, y \in F$ son tales que $x < y$ entonces existe un $r \in F_0$ tal que $x < r < y$.*

dem: Se tiene que $\theta < y - x$, además como $\theta < \epsilon$ por el axioma de Eudoxo-Arquímedes se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon < n_0(y - x)$ o lo que equivalente que

$$\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y - x. \tag{2}$$

Supongamos que $y > \theta$. Por Eudoxo-Arquímedes, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$y < m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}.$$

Sea entonces $\tilde{m} = \min\{m \in \mathbb{N} : y \leq m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\}$. Vale entonces que $(\tilde{m} - 1)\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y < \tilde{m}\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}$ y por (2), resulta

$$x < y - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} \leq \tilde{m}\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} = (\tilde{m} - 1)\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y.$$

En el caso $\theta > y$ sería $\theta < -x$ y por Eudoxo-Arquímedes podemos asegurar que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$-x < m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}.$$

Sea ahora $\tilde{m} = \min\{m \in \mathbb{N} : -x \leq m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\}$. Vale que $(\tilde{m} - 1)\min\{m \in \mathbb{N} : y \leq m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\} < -x \leq \tilde{m}\min\{m \in \mathbb{N} : y \leq m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\}$ y usando nuevamente (2) se obtiene que

$$-y < -x - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} \leq \tilde{m}\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} = (\tilde{m} - 1)\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < -x,$$

es decir $x < (1 - \tilde{m})\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y$ como queríamos probar. □

Recuperamos para los cuerpos ordenados completos la propiedad que ya conocíamos para el subcuerpo racional de los reales. Veamos ahora un resultado que muestra que los elementos no racionales también son densos en el cuerpo.

Corolario 5 *Sea F un cuerpo ordenado y completo y F_0 su subcuerpo racional, si $x, y \in F$ tales que $x < y$ entonces existe $z \in F \setminus F_0$ tal que $x < z < y$.*

dem: Sean $p, q \in F_0$ tales que $x < p < q < y$, esto es posible debido al teorema precedente. Como F es un conjunto no numerable y F_0 lo es resulta $F \backslash F_0 \neq \emptyset$, luego sea $\theta < w \in F \backslash F_0$. Por el axioma de E-A existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $w < n(q - p)$, entonces, simbolizando $z = p + \frac{1\epsilon}{n\epsilon} \cdot w$ resulta $x \in F \setminus F_0$ y además $q < z < q$. □

El resultado fue enunciado para cuerpos ordenados completos pero es válido para cualquier cuerpo arquimediano (cuerpo ordenado que verifique E-A), en cuyo caso para el corolario debe agregarse la hipótesis $F \setminus F_0 \neq \emptyset$.

Unicidad y existencia de los cuerpos ordenados y completos

Teorema 10 *Si F y G son dos cuerpos ordenados y completos luego son isomorfos.*

Este resultado, si bien no establece la unicidad de los cuerpos ordenados y completos, nos permite considerarlos como idénticos a través de la existencia de un isomorfismo que los vincula.
La demostración, que omitimos, sigue el siguiente esquema:
a) Se construye un isomorfismo entre los subcuerpos racionales respectivos F_0 y G_0, la existencia de este isomorfismo fue establecida en la Proposición 4.
b) Se extiende dicho isomorfismo a todo el cuerpo F utilizando argumentos de densidad, haciendo uso de la densidad del subcuerpo racional F_0 en F.
Esta noción de unicidad nos permite introducir la siguiente:

Definición 16 *Se denomina* ***cuerpo de los números reales*** *y se simboliza* $\mathbb{R}$*, al cuerpo ordenado y completo, cuyos elementos son denominados números reales.*

Para demostrar la existencia de un cuerpo ordenado y completo es necesario describir explícitamente uno de ellos a partir de elementos ya definidos, por ejemplo los números racionales. En dicho caso, los elementos del cuerpo ordenado y completo serán ciertos subconjuntos de números racionales y en él se definirán operaciones de adición y multiplicación y una relación de orden que verifique los axiomas correspondientes.
Existen diferentes construcciones basadas en estas ideas aparecidas de modo independiente en la segunda mitad del siglo XIX, por Weierstrass (1869), Dedekind (1872) y Cantor (1872).

1.8. Representación decimal de los números reales

Recordemos

Definición 17 *Dado* $x \in \mathbb{R}$ *se define como* ***parte entera*** *de* x *como el único entero tal que* $[x] \leq x < [x]+1$

Para la representación decimal de un número real podemos reducir el análisis a $0 \leq x < 1$ pues $0 \leq x-[x] < 1$ y $x = [x] + (x-[x])$. Simbolizamos con $D = \{0, 1, \cdots, 9\}$ el conjunto de los dígitos.

Proposición 6 *Dado* $x \in [0,1)$ *existe una sucesión* $\{x_n\} \subset D$*, tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

dem: Probaremos que existe una sucesión $\{x_n\} \subset D$ que verifica

$$0 \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} \leq x < \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_m+1}{10^m}.$$

En este caso, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq x - \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^m}$ y luego resulta que

$$x = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

La sucesión se obtiene por recurrencia.
Paso 1): Sea $x_1 = [10x]$, se tiene que al ser $0 \leq 10x < 10 \to x_1 \in D$. Además

$$x_1 \leq 10x < x_1 + 1 \Rightarrow \frac{x_1}{10} \leq x < \frac{x_1 + 1}{10}.$$

Paso 2) Habiendo obtenido $x_1 \in D$ que verifica la última desigualdad, i.e. $0 \leq 10(x - \frac{x_1}{10}) < 1$, se define

$$x_2 = [10^2(x - \frac{x_1}{10})].$$

Resulta $x_2 \in D$ y además

$$x_2 \leq 10^2(x - \frac{x_1}{10}) < x_2 + 1 \Rightarrow \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leq x_2 < \frac{x_1}{10} + \frac{x_2 + 1}{10^2}.$$

Paso m): En general, una vez obtenidos $\{x_1, x_2 \cdots, x_{m-1}\} \subset D$ tales que verifican

$$0 \leq x - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^{m-1}},$$

se define

$$x_m = [10^m(x - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n})].$$

Resulta $x_m \in D$ y además

$$x_m \leq 10^m(x - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n}) < x_m + 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} \leq x < \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_m + 1}{10^m},$$

como queríamos demostrar. □

Definición 18 *Dado un número real $x \in [0, 1]$ se denomina **representación decimal** de x a toda sucesión $\{x_n\} \subset D$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

Usualmente se nota $0, x_1 x_2 x_3 \cdots x_m \cdots$.

Unicidad de la representación decimal?

Si modificamos ligeramente la definición de parte entera de un número real x y lo tomamos como el único número entero $\lceil x \rceil$ tal que $\lceil x \rceil < x \leq \lceil x \rceil + 1$ puede probarse siguiendo los pasos de la demostración anterior, la existencia de una sucesión $\{\xi_n\} \subset D$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\xi_n}{10^n} < x \leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\xi_n}{10^n} + \frac{\xi_m + 1}{10^m}.$$

Resulta entonces que $0, \xi_1 \xi_2 \cdots$ es una nueva representación decimal del número x, la cual en principio no tiene por qué ser igual a la ya obtenida. Por lo tanto, en principio, podemos afirmar que la representación decimal de un número real no es necesariamente única. Para analizar esta situación veremos si existen números reales con más de una representación

decimal y dicho caso que características tienen dichas representaciones.
Supongamos que existe $x \in [0,1]$ que admite 2 representaciones decimales diferentes $\{x_n\}$ y $\{\xi_n\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_n = x_n, \forall n = 1, \cdots, m-1$ y que $\xi_m < x_m$.
Por la definición de representación decimal de x se tiene que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{10^n},$$

de donde resulta que

$$x_m - \xi_m = 10^m \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n}{10^n} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \Big) = 10^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n - x_n}{10^n}.$$

Como los $x_n, \xi_n \in D$ se tiene que $1 \leq x_m - \xi_m$ y que $|\xi_n - x_n| \leq 9$ si $n > m$, en consecuencia

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n - x_n}{10^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|\xi_n - x_n|}{10^n} \leq 9 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^m}.$$

Se ha obtenido entonces que

$$1 \leq x_m - \xi_m = 10^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n - x_n}{10^n} \leq 1$$

y esto ocurre si y sólo si se verifican simultáneamente las condiciones siguientes:
- $x_m - \xi_m = 1$
- $m < n \Rightarrow \xi_n - x_n = 9 \Rightarrow x_n = 0 \wedge \xi_n = 9.$

En conclusión probamos que si $x \in [0,1]$ tiene dos representaciones decimales entonces se tiene que para algún $m \in \mathbb{N}$ es

$$x = \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} = \frac{1}{10^m} \sum_{n=1}^{m} 10^{m-n} x_n.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{m} 10^{m-n} x_n \in \mathbb{N}$, resulta que debe ser x un número racional cuya representación irreducible posea denominador con únicos factores primos a lo sumo 2 y 5. Además dichos números aceptan únicamente dos representaciones decimales diferentes dadas por

$$0, x_1 x_2 \cdots x_m 0000 \cdots, \qquad y \qquad 0, x_1 x_2 \cdots (x_m - 1) 9999 \cdots$$

Notemos que la primera representación es la obtenida a partir del procedimiento utilizado en la Proposición 6, mientras que la segunda se obtiene a partir de la definición de $\lceil x \rceil$. Luego dichos procedimientos pueden considerarse los únicos para la obtención de la representación decimal de los números reales del intervalo $[0,1)$, salvo para los números racionales cuya representación irreducible posee un denominador cuyos únicos factores primos son, a lo sumo, 2 y 5, en cuyo caso estos 2 métodos dan las 2 únicas posibles representaciones decimales.
Una vez seleccionado uno de los procedimientos para la obtención de la representación decimal de los números reales del intervalo $[0,1)$, queda determinada una aplicación entre

dichos números y las sucesiones de dígitos. La definición de representación decimal de un número real muestra que esta aplicación es inyectiva. Notemos además que, fijado un procedimiento quedan sucesiones fuera del recorrido de la aplicación, a saber las sucesiones tales que a partir de un cierto término son todos 0 o 9, dependiendo del procedimiento elegido. Eligiendo cualquiera de los 2 procedimientos el complemento del conjunto recorrido de esta aplicación es un conjunto numerable.
Cabe destacar que la elección del conjunto D formado por 10 dígitos no es esencial y que puede ser reemplazado por subconjuntos de tipo $\{1, 2, \cdots, m\}$ para un $1 < m \in \mathbb{N}$ cualquiera.

2. El espacio métrico $\mathbb{R}$.

2.1. Topología métrica de $\mathbb{R}$.

Definición 19 *Si $x, y \in \mathbb{R}$ definimos la **distancia** entre x e y como el número $d(x, y) = |x - y|$.*

Proposición 7 *La función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = |x - y|$ es una métrica.*

dem: Es inmediato por propiedades de valor absoluto. □

Definición 20 *Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, se denomina **δ-entorno de** x o entorno de centro x y radio δ al conjunto $E_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) = |x - y| < \delta\}$. Diremos que $U \subset \mathbb{R}$ es **abierto** si para todo $x \in U$ existe $E_\delta(x) \subset U$.*

Teorema 11 *La familia τ de todos los abiertos de $\mathbb{R}$ constituye una topología que es la topología métrica.*

dem: CA1) $\emptyset \in \tau$ por definición.
CA2) Para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, $E_\delta(x) \subset \mathbb{R}$ luego, $\mathbb{R} \in \tau$.
CA3) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ y $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ (si $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \neq \emptyset$) entonces $x \in U_{\alpha_0}$ entonces existe δ_{α_0} tal que $E_{\delta_{\alpha_0}}(x) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ de donde $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.
CA4) Sea $\{U_j\}_{j=1}^n \subset \tau$ y $x \in \bigcap\limits_{j=1}^n U_j$ (si $\bigcap\limits_{j=1}^n U_j \neq \emptyset$) entonces $x \in U_j$ para todo j luego existe δ_j tal que $E_{\delta_j}(x) \subset U_j$. Sea $\delta = \min \delta_j$ luego $E_\delta(x) \subset \bigcap\limits_{j=1}^n U_j$ y $\bigcap\limits_{j=1}^n U_j \in \tau$. □

Nota 2 *todos los conceptos topológicos (conjunto abierto, interior, cerrado, clausura, acumulación, frontera, etc) tienen sentido en la topología métrica de $\mathbb{R}$.*

2.2. Convergencia en $\mathbb{R}$.

Definición 21 *Diremos que una **sucesión** $(x_n) \subset \mathbb{R}$ es **convergente** si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$.*

Proposición 8 *Si (x_n) converge el límite es único.*

dem: Si $a \neq b$ son límites de x_n para $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$ existen $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ y $n_0 = \text{máx}(n_a, n_b)$ tal que si $n \geq n_0$ es $|b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| < \dfrac{|b-a|}{2} + \dfrac{|b-a|}{2} = |b - a|$ abs.□

Nota 3 *En tal caso diremos que la sucesión* (x_n) *converge a* x *y que* x *es el límite de la sucesión y notamos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *o simplemente* $x_n \to x$.

Proposición 9 *Sea* $E \subset \mathbb{R}$*, entonces:*

i) un punto $x \in \mathbb{R}$ *es un punto clausura de* E *sii existe una sucesión* (x_n) *de puntos de* E *tal que* $x_n \to x$.

ii) un punto $x \in \mathbb{R}$ *es un punto de acumulación de* E *sii existe una sucesión* (x_n) *de puntos de* E *con* $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$ *tal que* $x_n \to x$.

dem: i) $\Rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$ es un punto clausura de E entonces $\forall U \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap E \neq \emptyset$ en particular $\forall n \in \mathbb{N}$ es $E_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \emptyset$. Sea $x_n \in E_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$ $\forall n$, luego $(x_n) \subset E$ y $x_n \to x$.
$\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ y $x_n \in E$ $\forall n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $E_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$ luego x es punto clausura de E.
ii) $\Rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de E entonces $\forall U \in \mathcal{N}(x)$, $(U - \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ en particular $\forall n \in \mathbb{N}$ es $(E_{\frac{1}{n}}(x) - \{x\}) \cap E \neq \emptyset$. Sea $x_n \in (E_{\frac{1}{n}}(x) - \{x\}) \cap E$ $\forall n$, luego $(x_n) \subset E$ y $x_n \to x$. Tomamos una subsucesión (x_{n_k}) (que también converge x) tal que $x_{n_i} \neq x_{n_j}$ $\forall i \neq j$, podemos hacerlo pues si no, a partir de un n la sucesión sería constante y como converge a x debería ser igual a x abs, pues $x_n \in (E_{\frac{1}{n}}(x) - \{x\}) \cap E$ $\forall n$.
$\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ existe $\bar{n}$ tal que $0 < |x_{\bar{n}} - x| < \varepsilon$ luego $\forall \varepsilon > 0$, $(E_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ luego x es punto de acumulación de E. □

2.3. Densidad. Separabilidad.

Definición 22 *Diremos que un conjunto* $D \subset \mathbb{R}$ *es* ***denso*** *en* $\mathbb{R}$ *sii* $\bar{D} = \mathbb{R}$.

Nota 4 D *es denso en* $\mathbb{R}$ *sii* $\forall \xi \in \mathbb{R}$ *existe una sucesión* $(\xi_n) \subset D$ *tal que* $\xi_n \to \xi$.

Teorema 12 $\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Nota 5 *Siendo* $\mathbb{Q}$ *numerable, el teorema anterior nos dice que* $\mathbb{R}$ *es un espacio métrico separable, pues contiene un subconjunto denso y numerable.*

Corolario 6 *Entre dos números reales* $x < y$ *existen infinitos racionales.*

dem: Sean $x < y$ existen (x_n), $(y_n) \subset \mathbb{Q}$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Sea $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$, existe $x_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x_1 \in E_\varepsilon(x)$ y existe $x_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $x_2 \in E_\varepsilon(y)$. Definimos por recurrencia $x_n = \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2}$ luego $x \leq x_{n-2} < x_n < x_{n-1} \leq y$ $\forall n \in \mathbb{N}$. □

2.4. Sucesiones de Cauchy de números $\mathbb{R}$. Completitud de $\mathbb{R}$.

Definición 23 *Diremos que una sucesión* (x_n) *en* $\mathbb{R}$ *es una sucesión de* ***Cauchy*** *si* $\forall \varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. *Diremos que un espacio métrico es* **completo** *si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Proposición 10 *Toda sucesión convergente de números reales es de Cauchy.*

dem: Sea $x_n \to x$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Sean $n, m \geq n_0$ entonces $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon$. □

Teorema 13 $\mathbb{R}$ *es un cuerpo métrico completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$ *es convergente.*

2.5. Conjuntos y sucesiones acotadas. Supremo e ínfimo.

Definición 24 *Diremos que:*
i) Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es ***acotado superiormente*** *(inferiormente) si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq k$ $(x \geq k)$ $\forall x \in E$, en tal caso decimos que k es una cota superior (inferior) de E. Si E es acotado superior e inferiormente diremos que es* ***acotado****.*
ii) Una sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ es acotada superiormente (inferiormente) si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq k$ $(x \geq k)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si (x_n) es acotada superior e inferiormente diremos que es acotada.

Definición 25 *Si E es acotado superiormente (inferiormente) se denomina* ***supremo*** *(ínfimo) o extremo superior (inferior) de E, a la menor (mayor) de las cotas superiores (inferiores). Notamos* $\lambda = \sup E$ $(\lambda = \text{ínf}\, E)$.

Teorema 14 *Sea $E \neq \emptyset$, entonces:*
i) Si E es acotado superiormente, existe una mínima cota superior de E, esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq \lambda$ $\forall x \in E$ y $\forall \varepsilon > 0$, existe $x \in E$ tal que $x > \lambda - \varepsilon$.
ii) Si E es acotado inferiormente, existe una máxima cota inferior de E, esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq \lambda$ $\forall x \in E$ y $\forall \varepsilon > 0$, existe $x \in E$ tal que $x < \lambda + \varepsilon$.

dem: i) Sea E acotado superiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota superior de E. Como E es no vacío, existe $a \in E$ tal que $a < b$ tal que a no es cota superior de E, o sea existen elementos de E mayores que a.
Si $\dfrac{a+b}{2}$ es cota superior de E, sean $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$ y $a_1 = a$, siendo b_1 cota superior y a_1 no, es decir $x \leq b_1$ $\forall x \in E$ y existe $x \in E$ tal que $x > a_1$.
Si $\dfrac{a+b}{2}$ no es cota superior de E, ponemos $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ y $b_1 = b$ también tendremos que siendo b_1 cota superior y a_1 no, será $x \leq b_1$ $\forall x \in E$ y existe $x \in E$ tal que $x > a_1$.
Observemos que $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$. Tendremos entonces que

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b \quad \text{y} \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

con b, b_1 cotas superiores de E y a, a_1 no. Continuamos este razonamiento, tomando el número $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ y procediendo de manera análoga, se obtienen a_2, b_2 tales que

$$a \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{y} \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

con b, b_1, b_2 cotas superiores de E y a, a_1, a_2 no. Así sucesivamente, se obtienen sucesiones (a_n) y (b_n) tales que

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n < \ldots < b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{y} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

con b_n cotas superiores de E y los a_n no.
Mostraremos que estas sucesiones son convergentes a un Λ que resultará ser cota superior mínima de E. Para probar que (b_n) es convergente, veamos que es de Cauchy. Observemos que si $m > n$ se tiene

$$a_n \leq a_m < b_m \leq b_n \Longrightarrow 0 \leq b_n - b_m < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ si $n \geq N$ luego resultará

$$|b_n - b_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$$

Por lo tanto, (b_n) es Cauchy y luego $b_n \to \Lambda \in \mathbb{R}$. Por otro lado $a_n = b_n - \frac{b-a}{2^n} \to \Lambda$. Veamos que Λ es mínima cota superior de E. En efecto, para cada $x \in E$ se tiene $x \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall x \in E$, $x \leq \Lambda$, luego Λ es cota superior. Será mínima? sea $\varepsilon > 0$, como $(a_n) \nearrow \Lambda$ existe n_0 tal que $a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$, y a_{n_0} no es cota superior, existe un $x \in E$ tal que $x > a_{n_0}$ luego $x > \Lambda - \varepsilon$. Queda probado entonces que $\Lambda = \sup E$.
ii) Sea prueba de manera análoga. □

Teorema 15 *Toda sucesión monótona creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) es convergente.*

dem: Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n$ y existe M tal que $x_n \leq M$ $\forall n$. El conjunto $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente por M. Sea $\Lambda = \sup E$. Entonces $x_n \to \Lambda$, en efecto sea $\varepsilon > 0$, siendo $\Lambda = \sup E$ es $x_n \leq \Lambda$ $\forall n$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$. Entonces para todo $n \geq n_0$ resulta $\Lambda - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \Lambda < \Lambda + \varepsilon$. □

Teorema 16 *(Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.*

dem: Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ acotada, sea $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, que por cierto es acotado.
Si $card(E) = |E| < \infty$, es claro que (x_n) contiene una subsucesión cuasi constante y por tanto convergente.
Si $card(E) = |E| = \infty$, existirá una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) de términos todos distintos. Supondremos sin pérdida de generalidad que (x_n) tiene todos sus términos distintos. Como es acotada existe un intervalo $[a, b]$ tal que $x_n \in [a, b]$ $\forall n$. Subdividimos $[a, b]$ en dos intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$. En uno de ellos hay al menos infinitos términos distintos de (x_n), puediendo haber infinitos en ambos. Seleccionamos uno de ellos y lo renombramos $[a_1, b_1]$. Tendremos que en $[a_1, b_1]$ hay infinitos términos de (x_n) y

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b \quad \text{con} \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

Continuando con este procedimiento, obtenemos una sucesión de intervalos $[a_k, b_k]$ tales que

$$a \leq a_1 \leq ... \leq a_k < b_k \leq ... \leq b_1 \leq b \quad \text{con} \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

y en donde hay infinitos términos de (x_n), podemos entonces para cada k, seleccionar un término de los x_n que llamamos $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ de modo que $n_1 < ... < n_n < ...$, luego (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n) que resulta convergente puesto que la sucesión (a_n) es creciente y acotada superiormente por tanto converge a L, además $b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \to L$, y como $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ para todo k, resulta $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$. □

2.6. Compacidad.

Teorema 17 *(Bolzano-Weierstrass) Todo conjunto acotado infinito contiene al menos un punto de acumulación.*

dem: Sea E un conjunto acotado infinito. Sea $(x_n) \subset E$ de puntos distintos, que resultará acotada, existirá (x_{n_k}) subsucesión (de puntos distintos) de (x_n) convergente a $x \in \mathbb{R}$, luego $x \in E'$. □

Teorema 18 *(Bolzano-Weierstrass) Si $E \subset \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:*
i) E es cerrado y acotado.
ii) Toda sucesión de puntos de E contiene una subsucesión convergente a un punto de E.

dem: i→ii) Sea E cerrado y acotado. Sea $(x_n) \subset E$, acotada y por tanto contiene una subsucesión $x_{n_k} \to x$ entonces $x \in \overline{E} = E$.
ii→i) Sea E un conjunto que cumple la propiedad ii.
Veamos que es acotado. Supongamos que no es acotado superiormente, podemos seleccionar una sucesión (x_n) en E tal que

$$x_1 \in E, \ x_2 > x_1 + 1, ..., x_{n+1} > x_n + 1$$

Y (x_n) no contiene una subsucesión convergente, en efecto, $\forall m > n$ es $x_m - x_n > 1$, no es de Cauchy. Esto contradice ii), luego E es acotado superiormente, análogamente se prueba que es acotado inferiormente, resultando entonces acotado.
Veamos que es cerrado, sea $x \in \bar{E}$, existe $x_n \to x$, de ii) surge que (x_n) contiene una subsucesión convergente a un punto de E, pero $x_{n_k} \to x$ luego $x \in E$ y entonces $\bar{E} \subset E$.
□

Definición 26 *Diremos que una familia $\Gamma = \{A_\alpha\}_\alpha$ de conjuntos es un **cubrimiento** de E, o que recubre E sii $E \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$. Si todos los A_α son abiertos diremos que Γ es un cubrimiento abierto. Un subcubrimiento de E es una subfamilia de Γ que también recubre a E.*

Teorema 19 *(Lindelöff) Todo cubrimiento abierto de $E \subset \mathbb{R}$, contiene un subcubrimiento numerable. ($\mathbb{R}$ es N_2 y $N_2 \Rightarrow L$, ver topología)*

Teorema 20 *Sea (F_n) una sucesión de cerrados, acotados no vacíos de $\mathbb{R}$, tales que $F_{n+1} \subset F_n$ $\forall n$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es cerrada y no vacía.*

dem: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es cerrado por ser intersección de cerrados. Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Como F_n es acotado para cada n, existe $[a_n, b_n] \supset F_n$, consideremos el menor de todos definido por

$$a_n = \inf F_n \quad \text{y} \quad b_n = \sup F_n$$

como F_n es cerrado, $a_n, b_n \in F_n$. Además siendo (F_n) una sucesión decreciente de conjuntos resulta

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$$

Luego la sucesión (a_n) es creciente y acotada superiormente por b_1, por tanto convergente, es decir, existe $\xi = \lim a_n$. Veamos que $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Como $(a_n)_1^\infty \subset F_1$ y $a_n \to \xi$ y F_1 cerrado, luego $\xi \in F_1$. También $(a_n)_2^\infty \subset F_2$ y $a_n \to \xi$ y F_2 cerrado, luego $\xi \in F_2$. Así sucesivamente, tenemos que $\xi \in F_n$ $\forall n$. Y por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. □

Teorema 21 *(Heine-Borel) Si F es cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, de todo cubrimiento abierto de F se puede extraer un subcubrimiento finito.*

dem: Sea F un conjunto cerrado y acotado y sea Γ un cubrimiento abierto de F, del teorema de Lindelöf podemos suponer Γ numerable, sea $\Gamma = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada n definimos $O_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ y $L_n = F \cap \mathcal{C}O_n$. Cada O_n es abierto y cada L_n cerrado. Además

$$O_n \subset O_{n+1} \quad \text{y} \quad L_{n+1} \subset L_n \qquad \forall n$$

La familia $\{O_n\}$ es también un cubrimiento de F, pues $G_n \subset O_n \forall n$.
Mostraremos que existe n_0 tal que $L_{n_0} = \emptyset$. Pues si suponemos que $L_n \neq \emptyset\ \forall n$, consideramos la sucesión (L_n) decreciente de cerrados no vacíos y acotados pues $L_n \subset F\ \forall n$, por teorema anterior existe $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \Rightarrow \xi \in L_n\ \forall n$, luego $\xi \in F$ y $\xi \notin O_n\ \forall n$ absurdo pues $\{O_n\}$ es un cubrimiento de F. Entonces existe n_0 tal que $L_{n_0} = F \cap \mathcal{C}O_{n_0} = \emptyset$, entonces $F \subset O_{n_0} = \bigcup_{k=1}^{n_0} G_k$, existe Γ_{n_0} subcubrimiento finito de F. □

Teorema 22 *Sea $F \subset \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:*
i) F es cerrado y acotado.
ii) Todo cubrimiento abierto de F contiene un subcubrimiento finito.
iii) Toda sucesión de puntos de F contiene una subsucesión convergente a un punto de F.

dem: (i⇔iii) Es el teorema de Bolzano-Weierstrass.

(i⇒ii) Es el teorema de Heine-Borel.

(ii⇒i) Sea F un conjunto que verifica la propiedad ii, veamos que F es acotado y cerrado.
Sea $\Gamma = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de abiertos que cubre $\mathbb{R}$ por tanto cubre a F, entonces exite n_0 tal que $F \subset \bigcup_{n=1}^{n_0}(-n, n) = (-n_0, n_0)$ entonces F es acotado.
Para ver que es cerrado, mostraremos que contiene a F', por el absurdo supongamos que existe $\xi \in F'$ tal que $\xi \notin F$. Consideramos la familia de abiertos $O_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| > \frac{1}{n}\}$, que será $\{O_n\} \nearrow$. Resulta $O = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento abierto de F, pues $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = \mathbb{R} - \{\xi\} \supset F$, como F tiene propiedad ii, existirá un subcubrimiento finito de F, esto es $F \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} O_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| > \frac{1}{n_0}\}$. Se concluye que en el entorno $E_{\frac{1}{n_0}}(\xi)$ no hay ningún punto de F, absurdo pues ξ es punto de acumulación de F. Luego F es cerrado.
□

Definición 27 *Diremos que un conjunto F de $\mathbb{R}$ es* ***compacto*** *si tiene alguna de las propiedades del teorema anterior.*

2.7. Conjuntos perfectos. Conjuntos de Cantor.

Definición 28 *Diremos que un conjunto P es* ***perfecto*** *si coincide con P′.*

Nota 6 *Un conjunto perfecto es cerrado pues contiene a sus puntos de acumulación y no tiene puntos aislados.*

Teorema 23 *Todo conjunto perfecto no vacío es no numerable.*

dem: Sea P perfecto no vacío, supongamos que es numerable. Sea $P = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, si fuese P finito sería $P' = \emptyset$ que contradice que P sea perfecto. Construiremos una sucesión de puntos de P, tomamos $x_1 = x_{n_1}$ y sea E_1 un entorno de x_{n_1} (contiene un intervalo abierto centrado en x_{n_1}). Como $x_{n_1} \in P'$ existen infinitos $x_n \in E_1$. Sea $x_{n_2} \in P$ tal que $n_1 < n_2$ y n_2 es el menor índice tal que $x_{n_2} \in E_1$, es decir si $n_1 < j < n_2$, $x_j \notin E_1$. Sea ahora E_2 un entorno abierto de x_{n_2} tal que $x_{n_1} \notin \bar{E}_2$ y $\bar{E}_2 \subset E_1$. Repitiendo el proceso con $x_{n_2} \in P'$ encontramos un $x_{n_3} \in E_2$ tal que $n_1 < n_2 < j < n_3$ y $x_j \notin E_2$ (n_3 el primer índice mayor que n_2 tal que $x_{n_3} \in E_2$). Así sucesivamente, se obtiene una sucesión de elementos (x_{n_i}) de P y una sucesión de entornos abiertos E_i de estos puntos tales

$$\begin{aligned} n_i &< n_{i+1} \Rightarrow x_{n_{i+1}} \in E_i \quad \text{y} \quad n_i < j < n_{i+1} \Rightarrow x_i \notin E_i \\ x_{n_i} &\notin \bar{E}_{i+1} \quad \text{y} \quad \bar{E}_{i+1} \subset E_i \end{aligned}$$

Observemos que siendo (x_{n_i}) una sucesión acotada pues $(x_{n_i}) \subset E_1$, contiene una subsucesión $\left(x_{n_{i_k}}\right)_k$ convergente a cierto x. Además $x \in P' = P$.
Ahora si fijamos $i \in \mathbb{N}$ entonces $\forall j > i \Rightarrow x_{n_j} \in E_j \subset E_{i+1} \subset \bar{E}_{i+1} \subset E_i$ en consecuencia $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_{i_k}} \in \bar{E}_{i+1} \subset E_i$ $\forall i$. Pero observemos que $x \neq x_{n_i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ pues fijado i, $x_{n_j} \in \bar{E}_{i+1}$ $\forall j > i$ y entonces $x \in \bar{E}_{i+1}$ y como $x_{n_i} \notin \bar{E}_{i+1}$ sigue que $x \neq x_{n_i}$ $\forall i$.
Ahora para cierto $i_0 \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$n_{i_0} < m < n_{i_0+1} \quad \text{siendo } x = x_m \;\; \text{pues } x \in P$$

tendríamos que $x_m = x \in \bar{E}_{i_0+1} \subset E_{i_0}$ siendo $m < n_{i_0+1}$, esto contradice el hecho de que n_{i_0+1} es el primer índice mayor que n_{i_0} tal que $x_{n_{i_0+1}} \in E_{i_0}$. Luego P no es numerable. □

El conjunto de Cantor.
Hay conjuntos perfectos con cardinal potencia del continuo de medida cero. Consideramos los conjuntos $F_0 = [0,1]$ (es $1 = 2^0$ intervalo cerrado de longitud $\frac{1}{3^0}$), $F_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$ (tiene $2 = 2^1$ intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^1}$), $F_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$ (tiene $4 = 2^2$ intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^2}$), ... y así F_n (tiene 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$).

Obtenemos una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de cerrados no vacíos tales $F_n \supset F_{n+1}$, por tanto el conjunto $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ es no vacío y cerrado. Este conjunto se denomina **conjunto de Cantor**.
Veamos que es perfecto. Como K es cerrado $K \supset K'$. Veamos que $K \subset K'$, sea $x \in K \Rightarrow x \in F_n$ $\forall n$ y F_n tiene 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $E_\varepsilon(x)$ entorno de x. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$, entonces $x \in I_{n_0}^j$ intervalo cerrado de longitud $\frac{1}{3^{n_0}}$ componente de F_{n_0} y tendremos $I_{n_0}^j \subset E_\varepsilon(x)$, este intervalo es $I_{n_0}^j = [a_{n_0}^j, b_{n_0}^j]$ tal que $x - \varepsilon < a_{n_0}^j < x < b_{n_0}^j < x + \varepsilon$

y cada uno de éstos $a^j_{n_0}, b^j_{n_0} \in F_n\ \forall n$, luego $a^j_{n_0}, b^j_{n_0} \in K$ y al menos uno de ellos es distinto de x (??) llamémoslo z. Entonces, en todo entorno de $E_\varepsilon(x)$ existe un punto $z \in K$ tal que $z \neq x$, luego $x \in K'$. Luego K es perfecto no vacío, y por tanto no numerable. Por otra parte $K \subset [0,1]$, siendo la potencia del $[0,1]$ la del continuo, luego K tiene la potencia del continuo. Lo que le saqué mide

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots.=\frac{1}{3}(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\ldots)=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=1$$

O sea K tiene medida (de Lebesgue) nula.

3. El sistema de números reales extendidos.

3.1. El conjunto $\bar{\mathbb{R}}$.

Definición 29 *Definimos* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

3.2. Operaciones. Relación de orden.

Definición 30

• ***Suma en*** $\bar{\mathbb{R}}$. *Si* $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y$ *es la suma en* $\mathbb{R}$. *Si* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} x+(+\infty) & = & +\infty \\ x+(-\infty) & = & (-\infty) \\ (+\infty)+(+\infty) & = & +\infty \\ (-\infty)+(-\infty) & = & -\infty \end{array}$$

No está definido $(+\infty) + (-\infty)$, *ni* $(-\infty) + (+\infty)$.

• ***Producto en*** $\bar{\mathbb{R}}$. *Si* $x, y \in \mathbb{R}$, xy *es el producto en* $\mathbb{R}$. *Si* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

$$x(+\infty)=\begin{cases} +\infty & \text{si } x>0 \\ -\infty & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad x(-\infty)=\begin{cases} -\infty & \text{si } x>0 \\ +\infty & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} (+\infty)(+\infty) & = & +\infty \\ (-\infty)(-\infty) & = & +\infty \\ (-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty) & = & -\infty \\ 0\,(\pm\infty) & = & 0 \end{array}$$

Como $\int_a^b kdx = k(b-a)$, $\int_a^b 0dx = 0\,(b-a) = 0$ *luego* $\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx = 0(+\infty) = 0$ *y* $\int_{-\infty}^{+\infty} 1dx = +\infty$.

Definición 31 *Extendemos a* $\bar{\mathbb{R}}$ *la* ***relación de orden*** *de* $\mathbb{R}$ *poniendo* $-\infty < x < +\infty\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3.3. Supremo e ínfimo de conjuntos en $\bar{\mathbb{R}}$ y convergencia en $\bar{\mathbb{R}}$.

Definición 32 *Sea* $E \subset \bar{\mathbb{R}}$, *definimos* ***supremo*** *de* E *y notamos*

$$\sup E=\begin{cases} s & \text{si } E\subset\mathbb{R} \text{ acotado superiormente y } s \text{ menor cota superior} \\ +\infty & \text{si } E\subset\mathbb{R} \text{ no acotado superiormente} \\ +\infty & \text{si } +\infty\in E \end{cases}$$

*Definimos **ínfimo** de $E \subset \bar{\mathbb{R}}$ y notamos*

$$\inf E = \begin{cases} i & \text{si } E \subset \mathbb{R} \text{ acotado inferiormente e } i \text{ mayor cota inferior} \\ -\infty & \text{si } E \subset \mathbb{R} \text{ no acotado inferiormente} \\ -\infty & \text{si } -\infty \in E \end{cases}$$

Definición 33 *Si $\sup E = s \in E$ diremos que s es **máximo** de E. Y si $\inf E = i \in E$ diremos que i es **mínimo** de E.*

Definición 34 *Diremos que una sucesión de números reales (x_n) **converge** en $\bar{\mathbb{R}}$ sii $x_n \to L \in \mathbb{R}$ o si (x_n) diverge a $+\infty$ o $-\infty$.*

3.4. Puntos límites de una sucesión de números reales. Límite superior e inferior.

Definición 35 *Diremos que un número real extendido α es un **punto límite** de $(x_n) \subset \mathbb{R}$, si existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Definimos $\mathcal{L} = \{$puntos límites de $(x_n)\}$*

Ejemplo 2 *1) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $-1, 1$ son los únicos puntos límites.*
2) $(\sin \frac{n\pi}{2})_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $-1, 0, 1$ son los únicos puntos límites.
3) $(n(1 + (-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$, los puntos límites son $0, +\infty$.
4) $\left(\frac{1 + (-1)^n}{2 + (-1)^n} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ los puntos límites son $0, \frac{2}{3}$.

Teorema 24 *Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$,*
i) Si (x_n) es acotada superiormente (inferiormente) entonces $\mathcal{L}$ es acotado superiormente (inferiormente). Además $\sup \mathcal{L}$ es punto límite, es decir, $\sup \mathcal{L} = \max \mathcal{L}$, ($\inf \mathcal{L}$ es punto límite y $\inf \mathcal{L} = \min \mathcal{L}$).
ii) Si (x_n) no es acotada superiormente (inferiormente) entonces $+\infty \in \mathcal{L}$ ($-\infty \in \mathcal{L}$).

dem: i) Sea (x_n) acotada superiormente$\Rightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M\ \forall n$. Por teorema 16 (B-W), sea $\alpha \in \mathcal{L}$ existe $x_{n_k} \to \alpha$. Como $x_{n_k} \leq M$ es $\alpha \leq M$, luego $\mathcal{L}$ acotado superiormente. Además, sea $\Lambda = \sup \mathcal{L}$ ($\Lambda \in \mathbb{R}$), veamos que $\Lambda \in \mathcal{L}$. Existe $(\alpha_k) \subset \mathcal{L}$ tal que $\alpha_k \nearrow \Lambda$, luego para $j \in \mathbb{N}$ existe k_j tal que $\Lambda - \frac{1}{j} < \alpha_{k_j} < \Lambda$. Como $\alpha_{k_j} \in \mathcal{L}$ existe una subsucesión de (x_n) que converge a α_{k_j}. Podemos seleccionar de ésta una subsucesión $x_{n_{k_j}}$ tal que $\alpha_{k_j} - \frac{1}{j} < x_{n_{k_j}} < \alpha_{k_j} + \frac{1}{j}$ resulta

$$\Lambda - \frac{2}{j} < \alpha_{k_j} - \frac{1}{j} < x_{n_{k_j}} < \alpha_{k_j} + \frac{1}{j} < \Lambda + \frac{1}{j} < \Lambda + \frac{2}{j}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $j > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ resultará

$$\Lambda - \varepsilon < x_{n_{k_j}} < \Lambda + \varepsilon$$

es decir $x_{n_{k_j}} \to \Lambda$. Luego $\Lambda \in \mathcal{L}$ y por tanto $\Lambda = \max \mathcal{L}$.
ii) Sea ahora, (x_n) no acotada superiormente, existe una subsucesión $x_{n_k} \to +\infty$, luego $+\infty \in \mathcal{L}$. □

Corolario 7 *El conjunto $\mathcal{L}$ tiene máximo y mínimo en $\bar{\mathbb{R}}$.*

Definición 36 *Llamaremos **límite superior** (inferior) de una sucesión (x_n) al mayor (menor) de sus puntos límites en $\bar{\mathbb{R}}$. Notamos $\overline{\lim} x_n$, $(\underline{\lim} x_n)$.*

Teorema 25 *Una sucesión de números reales es convergente en $\mathbb{R}$ sii $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ y son finitos.*

dem: $\Rightarrow$) Sea (x_n) una sucesión de números reales convergente, luego $\exists!\ \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to \alpha$, luego $\mathcal{L} = \{\alpha\} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \alpha$.
$\Leftarrow$) Si $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L} = \{\alpha\} \Rightarrow x_n \to \alpha$. □

Ejemplo 3 *1)* $\overline{\lim}\,(-1)^n = 1 \neq \underline{\lim}\,(-1)^n = -1$, *la sucesión* $(-1)^n$ *no converge.*
2) $\overline{\lim} \sin \frac{n\pi}{2} = 1 \neq \underline{\lim} \sin \frac{n\pi}{2} = -1$, *la sucesión* $\sin \frac{n\pi}{2}$ *no converge.*
3) $\overline{\lim}\ n(1 + (-1)^n) = +\infty \neq \underline{\lim}\ n(1 + (-1)^n) = 0$, *la sucesión* $n(1 + (-1)^n)$ *no converge.*
4) $\overline{\lim}\left(\frac{1 + (-1)^n}{2 + (-1)^n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} \neq \underline{\lim}\left(\frac{1 + (-1)^n}{2 + (-1)^n} + \frac{1}{n}\right) = 0$, *la sucesión* $\left(\frac{1 + (-1)^n}{2 + (-1)^n} + \frac{1}{n}\right)$ *no converge.*
5) $\overline{\lim}\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \underline{\lim}\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2$, *la sucesión* $\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ *converge.*

Teorema 26 *a) Si (x_n) es acotada superiormente,*

$$\overline{\lim} x_n = \Lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : x_n > \Lambda - \varepsilon \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n < \Lambda + \varepsilon \end{cases}$$

b) Si (x_n) es acotada inferiormente,

$$\underline{\lim} x_n = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : x_n < \lambda + \varepsilon \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n > \lambda - \varepsilon \end{cases}$$

dem: a) $\Rightarrow$) Sean $\overline{\lim} x_n = \Lambda$ y $\varepsilon > 0$. Como $\Lambda \in \mathcal{L}$ existe $x_{n_k} \to \Lambda$ y por lo tanto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda - \varepsilon < x_{n_k} < \Lambda + \varepsilon\ \forall k \geq k_0$, por lo tanto para cualquier $N \in \mathbb{N}$ existirá un $n_k > N$ tal que $x_{n_k} > \Lambda - \varepsilon$ y luego vale i). Supongamos que no se cumple ii), existirían infinitos términos $x_n > \Lambda + \varepsilon$. Como la sucesión es acotada, existirá una subsucesión x_{n_j} tal que $x_{n_j} > \Lambda + \varepsilon$ y $x_{n_j} \to \alpha$, tendríamos que $\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha \geq \Lambda + \varepsilon > \Lambda$ contradicción pues $\overline{\lim} x_n = \Lambda$ es el mayor de puntos límites. Por lo tanto vale ii).
$\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen i,ii). Mostraremos que $\overline{\lim} x_n = \Lambda$, veamos primero que $\Lambda \in \mathcal{L}$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{j}$, de i,ii) existirá x_{n_j} tal que $\Lambda - \frac{1}{j} < x_{n_j} < \Lambda + \frac{1}{j}$. Esto muestra que existe una subsucesión $x_{n_j} \to \Lambda$. Veamos ahora que es el mayor punto límite. Supongamos que existe $\alpha \in \mathcal{L}$ tal que $\Lambda < \alpha$. Tomando $\varepsilon = \frac{\alpha - \Lambda}{2}$ tendremos $\Lambda < \Lambda + \varepsilon < \alpha$. Como $\alpha \in \mathcal{L}$ existirá una subsucesión de x_n que converge a α y por lo tanto infinitos términos de x_n mayores que $\Lambda + \varepsilon = \alpha - \varepsilon$ lo que contradice ii). Por lo tanto $\overline{\lim} x_n = \Lambda$.
b) Se prueba análogamente. □

Teorema 27 *Si* (x_n) *es una sucesión de números reales, se tiene:*

$$\begin{aligned}\overline{\text{lím}}\, x_n &= \inf_n (\sup_{k\geq n} x_k)\\ \underline{\text{lím}}\, x_n &= \sup_n (\inf_{k\geq n} x_k)\end{aligned}$$

dem: Supongamos que (x_n) es acotada superiormente. Sean $\overline{\text{lím}}\, x_n = \Lambda$ y $\alpha = \inf_n (\sup_{k\geq n} x_k)$.

Sea $\varepsilon > 0$, por ii) del teorema anterior existe n tal que $x_k < \Lambda + \varepsilon$ $\forall k \geq n$ entonces $\exists n$ tal que $\sup_{k\geq n} x_k \leq \Lambda + \varepsilon$. Por lo tanto $\alpha = \inf_n (\sup_{k\geq n} x_k) \leq \Lambda + \varepsilon \Rightarrow \alpha \leq \Lambda + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario resulta $\alpha \leq \Lambda$.

Por i) se tiene que $\forall n$ $\exists k \geq n$ tal que $x_k > \Lambda - \varepsilon$. Por lo tanto $\sup_{k\geq n} x_k > \Lambda - \varepsilon$ $\forall n \Rightarrow \alpha = \inf_n (\sup_{k\geq n} x_k) \geq \Lambda - \varepsilon$ y luego $\alpha \geq \Lambda$. Resultando $\alpha = \Lambda$.

Supongamos que (x_n) no es acotada superiormente luego existe (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to +\infty$ entonces $+\infty \in \mathcal{L}$ de donde $\overline{\text{lím}}\, x_n = +\infty$, luego $\sup_{k\geq n} x_k = +\infty$ $\forall n$ y entonces $\inf_n (\sup_{k\geq n} x_k) = +\infty$.

Análogamente se prueba $\underline{\text{lím}}\, x_n = \sup_n (\inf_{k\geq n} x_k)$. □

Parte II

Funciones Reales. Continuidad.

1. Funciones reales.

1.1. Límite de una función en un punto.

Definición 1 *Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p \in D'$. Se dice que el número L* ***es límite de f en*** *p sii $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E^*_\delta(p) \cap D$ entonces $f(x) \in E_\varepsilon(L)$ sii $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Notamos $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$.*

Proposición 1 *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p \in D'$ existe a lo sumo un límite de f en p.*

dem: Supongo existen $a, b = \lim\limits_{x\to p} f(x)$, luego si $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta_1$, $x \in D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta_2$, $x \in D \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Luego si $x \in D$ es tal que $0 < |x - p| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ es $|a - b| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| < \dfrac{|a-b|}{2} + \dfrac{|a-b|}{2} = |a - b|$ absurdo, luego a lo sumo existe un límite. □

Proposición 2 *Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $p \in D'$. Entonces son equivalentes:*
i) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$.
ii) Para toda sucesión $(x_n) \subset D$, $x_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to p$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

dem: i⇒ii) Supongamos $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, como $p \in D'$, sea $(x_n) \subset D$, $x_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to p$. Como $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta$ $\forall x \in D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Para ese $\delta = \delta(\varepsilon)$, existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N_\delta$, $0 < |x_n - p| < \delta$ luego $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, es decir $\forall \varepsilon > 0$ existe $N_{\delta(\varepsilon)} = N_\varepsilon$ tal que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\delta$, siendo $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

ii⇒i) Supongamos que para toda $(x_n) \subset D$, $x_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to p$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Veamos que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$. Supongamos que no, existirá un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, existe $x_j \in D$ tal que $0 < |x_j - p| < \delta$ y $|f(x_j) - L| \geq \varepsilon$. Tomando $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ existirá $x_n \in D$, tal que $0 < |x_n - p| < \dfrac{1}{n}$ y $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Habría entonces una sucesión $x_n \to p$ y que $f(x_n) \nrightarrow L$ contradicción, luego $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$. □

Teorema 1 *(Condición de Cauchy) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $p \in D'$. Entonces $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ sii (CC) $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D \cap E^*_\delta(p) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

dem: ⇒) Como $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D \cap E^*_\delta(p) \Rightarrow |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Sean $x, y \in D \cap E^*_\delta(p) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Luego vale (CC).

⇐) Supongamos se cumple (CC) en p, veamos que existe finito $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, para ello veamos que para una sucesión $(x_n) \subset D$, $x_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to p$ entonces

$\{f(x_n)\}$ es convergente, que bastará probar que $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $\delta(\varepsilon) > 0$ dado por (CC), como $x_n \to p$ y $x_n \neq p$ $\forall n$ para este δ existe N tal que si $n \geq N \Rightarrow 0 < |x_n - p| < \delta$. Luego si $n, m \geq N$ se tiene que $x_n, x_m \in D \cap E^*_\delta(p)$ y por (CC) $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Luego $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy y por tanto convergente a un L, independiente de la sucesión considerada (x_n), en efecto, sean dos sucesiones $x_n \to p$ y $z_n \to p$ con $x_n \neq p \neq z_n$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L_1 \neq L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$. Consideramos la sucesión $(y_n) = (x_1, z_1, x_2, z_2, ...) \subset D$, $y_n \neq p$ y $y_n \to p$ sin embargo no existe $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.□

Nota 1 *Se pueden definir los* ***límites laterales*** *es decir podemos definir* ***límite por derecha*** *(izquierda) en un punto de acumulación por derecha (izquierda) y notamos* $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = L$. *Teniendo proposiciones similares a las anteriores para límites laterales.*

1.2. Límites infinitos y límites cuando $x \to \pm\infty$.

Definición 2 *Dada* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $p \in D'$ *definimos* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = +\infty$ *sii* $\forall M > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ *y* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = -\infty$ *sii* $\forall M > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

Definición 3 *Dada* $f : D \to \mathbb{R}$, *D no acotado superiormente (inferiormente) definimos*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ *sii* $\forall\varepsilon > 0$ *existe* $k > 0$ *tal que si* $x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ *sii* $\forall\varepsilon > 0$ *existe* $k > 0$ *tal que si* $x < -k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *sii* $\forall M > 0$ *existe* $k > 0$ *tal que si* $x > k \Rightarrow f(x) > M$

($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *sii* $\forall M > 0$ *existe* $k > 0$ *tal que si* $x < -k \Rightarrow f(x) < -M$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *sii* $\forall M > 0$ *existe* $k > 0$ *tal que si* $x > k \Rightarrow f(x) < -M$

($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *sii* $\forall M > 0$ *existe* $k > 0$ *tal que si* $x < -k \Rightarrow f(x) > M$)

1.3. Límite superior e inferior de una función en un punto.

Definición 4 *Sean* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $p \in D'$ *se denomina* ***límite superior de*** f ***en*** p *al número real extendido* $\overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = \inf\limits_{\delta>0} \sup\limits_{\substack{x\in D \\ 0<|x-p|<\delta}} f(x)$ *y se denomina* ***límite inferior de*** f ***en*** p *al número real extendido* $\underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = \sup\limits_{\delta>0} \inf\limits_{\substack{x\in D \\ 0<|x-p|<\delta}} f(x)$.

Proposición 3 *Sean* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $p \in D'$. *Supongamos que* f *sea acotada en un entorno reducido de* p. *Entonces*

$$\overline{\lim_{x\to p}} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0 \exists x \in D : 0 < |x - p| < \delta \text{ y } f(x) > L - \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta \text{ y } f(x) < L + \varepsilon \end{cases}$$

$$\underline{\lim_{x\to p}} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0 \exists x \in D : 0 < |x - p| < \delta \text{ y } f(x) < l + \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta \text{ y } f(x) > l - \varepsilon \end{cases}$$

dem: ejercicio.

Proposición 4 *Sean* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $p \in D'$. *Entonces existe* $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ *sii* $\underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = \overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$. *En cuyo caso* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = \overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$.

dem: ejercicio.

Ejemplo 1 *1)* $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$, *entonces* $\sup_{\delta>0}\underbrace{\left(\inf_{0<|x|<\delta}\sin\frac{\pi}{x}\right)}_{=-1} = \underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1 \neq 1 = \overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \inf_{\delta>0}\underbrace{\left(\sup_{0<|x|<\delta}\sin\frac{\pi}{x}\right)}_{=1}$ *luego no existe* $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$.

2) $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x}$, $\sup_{\delta>0}\underbrace{\left(\inf_{0<|x|<\delta}\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)}_{=-\infty} = \underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -\infty$ *y* $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \inf_{\delta>0}\underbrace{\left(\sup_{0<|x|<\delta}\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)}_{=+\infty} = +\infty$.

2. Continuidad.

2.1. Funciones continuas.

Definición 5 *Sean* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $p \in D$. *Diremos que* f ***es continua en*** p *sii* $\forall\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in E_\delta(p) \cap D$ *entonces* $f(x) \in E_\varepsilon(f(p))$ *sii* $\forall\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in D$ *y* $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$. *Diremos que* f *es* ***continua en*** $S \subset D$ *si lo es en cada punto de* S.

Observación 1 *i)* f *es continua en todo punto aislado de* D.
ii) Si $p \in D'$ *entonces* f *es continua en* p *sii* $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Definición 6 *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $S \subset D$, *llamaremos* ***oscilación de*** f ***en*** S *al número real extendido*

$$\Omega_f(S) = \sup_S f - \inf_S f$$

Si $p \in D$, *llamaremos* ***oscilación de*** f ***en*** p *al número real extendido*

$$\omega_f(p) = \inf_{\delta>0}\Omega_f(D \cap E_\delta(p)) = \inf_{\delta>0}\Omega_f(S_\delta(p))$$

es decir, para cada $\delta > 0$ *consideramos los conjuntos* $S_\delta(p) = D \cap E_\delta(p)$ *y calculamos* $\Omega_f(S_\delta(p))$, *la oscilación de* f *en* $S_\delta(p)$.

Proposición 5 *Sean* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $p \in D$. *Entonces* f *es continua en* $p \Leftrightarrow \omega_f(p) = 0$.

dem: $\Rightarrow$) Sea f continua en p, luego dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in S_\delta(p) = D \cap E_\delta(p) \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Entonces

$$f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon \quad \forall x \in S_\delta(p)$$

Sigue que

$$\begin{aligned} f(p) - \varepsilon &\leq \sup_{S_\delta(p)} f \leq f(p) + \varepsilon \\ f(p) - \varepsilon &\leq \inf_{S_\delta(p)} f \leq f(p) + \varepsilon \end{aligned}$$

luego
$$0 \leq \sup_{S_\delta(p)} f - \inf_{S_\delta(p)} f \leq f(p) + \varepsilon - f(p) + \varepsilon = 2\varepsilon$$
esto es
$$0 \leq \Omega_f\left(S_\delta(p)\right) \leq 2\varepsilon$$
Y así, $\omega_f(p) = \inf_{\delta>0} \Omega_f\left(S_\delta(p)\right) \leq 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, resulta $\omega_f(p) = 0$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\omega_f(p) = \inf_{\delta>0} \Omega_f\left(S_\delta(p)\right) = 0$ (*). Veamos que f es continua en p. Sea $\varepsilon > 0$, de (*) sigue que existe $\delta_0 > 0$ tal que $\Omega_f\left(S_{\delta_0}(p)\right) < \varepsilon$ o sea que
$$\sup_{S_{\delta_0}(p)} f - \inf_{S_{\delta_0}(p)} f < \varepsilon \tag{3}$$
resultando entonces f acotada en $S_{\delta_0}(p)$, así para $x \in S_{\delta_0}(p)$ es
$$\inf_{S_{\delta_0}(p)} f \leq f(x) \leq \sup_{S_{\delta_0}(p)} f$$
en particular para p
$$\inf_{S_{\delta_0}(p)} f \leq f(p) \leq \sup_{S_{\delta_0}(p)} f$$
Tenemos de (3) que
$$-\varepsilon < \inf_{S_{\delta_0}(p)} f - \sup_{S_{\delta_0}(p)} f \leq f(x) - f(p) \leq \sup_{S_{\delta_0}(p)} f - \inf_{S_{\delta_0}(p)} f < \varepsilon$$
luego para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\forall x \in S_{\delta_0}(p) = D \cap E_{\delta_0}(p) \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$, o sea f es continua en p. $\square$

2.2. Propiedades de las funciones continuas.

Teorema 2 *(Bolzano) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $\operatorname{sign} f(a) \neq \operatorname{sign} f(b)$ entonces existe al menos un c en (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

dem: Supongamos $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Sea $\xi = \dfrac{a+b}{2}$, si $f(\xi) = 0$ ya está, si no será $f(\xi) < 0$ o $f(\xi) > 0$. Definimos $[a_1, b_1]$ aquel intervalo de los dos subintervalos $[a, \xi]$ y $[\xi, b]$, en cuyos extremos f asume valores de signos contrarios. Tendremos
$$a \leq a_1 < b_1 \leq b, \quad f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$
Procedemos con $[a_1, b_1]$ como hicimos con $[a, b]$, con este razonamiento obtenemos un ξ tal que $f(\xi) = 0$ al cabo de un número finito de pasos o bien el proceso continua indefinidamente . En este último caso, se tiene una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ tales que
$$a \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b, \quad f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
La sucesión (a_n) es creciente y acotada superiormente por b, luego converge a cierto $c \in [a, b]$. Y la sucesión (b_n) también converge a c, pues $a_n \to c$ y $b_n = a_n + \dfrac{b-a}{2^n}$.
Siendo f continua en c resultará $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$, pero $f(a_n) < 0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ y $f(b_n) > 0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ luego $f(c) = 0$. $\square$

Corolario 1 *(Teorema del valor intermedio) Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Sean $x_1 < x_2$ en I tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$ y sea v un número entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Entonces existe ξ entre x_1 y x_2 tal que $f(\xi) = v$.*

dem: Sea $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - v$, como f continua resulta g continua y $\operatorname{sign} g(x_1) \neq \operatorname{sign} g(x_2)$, aplicando el teorema de Bolzano a g, existe ξ tal que $g(\xi) = f(\xi) - v = 0$. □

Corolario 2 *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ continua entonces $f(I)$ es un intervalo.*

dem: Sean $y_1 \neq y_2 \in f(I)$, entonces existen $x_1, x_2 \in I$ tales que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Suponemos $y_1 < y_2$, y f continua, por corolario anterior para cada y tal que $y_1 < y < y_2$ existe ξ tal que $f(\xi) = y$, luego $y \in f(I)$ y entonces $f(I)$ es un intervalo. □

Teorema 3 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua y sea F un compacto en D. Entonces $f(F)$ es compacto.*

dem: Ya hemos probado este resultado en general. Veamos ahora otra prueba, veremos que $f(F)$ tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass. Sea $F \subset D$ compacto, f continua y $(y_n) \subset f(F)$. Para cada n, sea $x_n \in F$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como F compacto la sucesión (x_n) contiene un subsucesión $x_{n_k} \to x \in F$. Como f continua en x se tiene que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Sea $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, entonces (y_{n_k}) es una subsucesión de (y_n) que converge a $f(x) \in f(F)$ esto es $y_{n_k} \to y = f(x) \in f(F)$, luego $f(F)$ es compacto. □

Teorema 4 *(Weierstrass) Una función continua sobre un compacto tiene máximo absoluto y mínimo absoluto.*

dem: Como f es continua y F compacto entonces $f(F)$ es compacto en $\mathbb{R}$, luego es cerrado y acotado, por tanto

$$\sup_{x\in F} f(x) = \max_{x\in F} f = M \in f(F) \qquad \inf_{x\in F} f(x) = \min_{x\in F} f(x) = m \in f(F)$$

esto es existen $x_1, x_2 \in F$ tales que $f(x_1) = M$ y $f(x_2) = m$. □

2.3. Continuidad uniforme.

Definición 7 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ diremos que f **es uniformemente continua sobre un subconjunto S de** D sii $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in S$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (CU).*

Nota 2 *(CU) es equivalente a $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in S$ existe $\delta > 0$ tal que $y \in S$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.*

Ejemplo 2 *1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $(0,1)$ pero no uniformemente continua en $(0,1)$. Si $0 < a < 1$, $\dfrac{1}{x}$ es uniformemente continua en $[a,1)$.*

En efecto, f es continua por ser la recíproca de una continua en $(0,1)$. Supongamos ahora que es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta \Rightarrow |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| < \varepsilon$. Pero si $\varepsilon = 1$, $\forall \delta > 0$ existe n tal que $0 < \dfrac{1}{n} < \delta$, luego $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \delta \Rightarrow |x-y| = |\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}| < \delta$

pero $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n+1})| = |n-(n+1)| = 1 \not< 1$. *Por lo tanto* f *no es uniformemente continua en* $(0,1)$. *Veamos que si lo es, en* $[a,1)$ *con* $0 < a < 1$. *Sea* $\varepsilon > 0$, *si ponemos* $\delta = a^2\varepsilon$, *tenemos que si* $x, y \in [a,1)$ *y* $|x-y| < \delta$ *resulta* $|f(y) - f(x)| = |\frac{x-y}{xy}| < \frac{1}{a^2}\delta = \varepsilon$. *Luego* f *es uniformemente continua en* $[a,1)$.

2) $f(x) = x^2$ *es continua en* $\mathbb{R}$ *pero no uniformemente continua en* $\mathbb{R}$, *pero si lo es en todo intervalo acotado.*

En efecto, $|(x+\frac{\delta}{2})^2 - x^2| = |x^2+\delta x+\frac{\delta^2}{4} - x^2| = \delta|x+\frac{\delta}{4}| \not< \varepsilon$ *para* $x \to \infty$. *En cambio,* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *es uniformemente continua. Supongamos* $|a| < |b|$, *luego* $|x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \leq |x-y|(|x|+|y|) \leq |x-y|2|b| < \varepsilon$ *si* $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2|b|}$.

3) $\sin x, \cos x$ *son uniformemente continuas en* $\mathbb{R}$.

En efecto, sean $x < y \in \mathbb{R}$ *y sea* ξ *(TVM) tal que* $x < \xi < y$, *luego* $|\sin x - \sin y| = |\cos\xi||x-y| \leq |x-y| < \varepsilon$ *si tomamos* $\delta = \varepsilon$. *Análogamente para la función* $\cos x$.

Teorema 5 *(Heine) Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *continua y* F *un compacto en* D. *Entonces* f *es uniformemente continua en* F.

dem: Sea $\varepsilon > 0$, siendo f continua en D para cada $x \in D$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $z \in D \cap E_{\delta_x}(x) \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (A). Para cada $x \in F$ consideramos la bola abierta $B_{\frac{\delta_x}{3}}(x)$, la familia $\Gamma = \{B_{\frac{\delta_x}{3}}(x) : x \in F\}$ es un cubrimiento abierto de F, como F es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in F$ tales que $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{\frac{\delta_{x_k}}{3}}(x_k)$. Ponemos $\delta = \text{mín}\{\frac{\delta_{x_k}}{3} : k = 1, ..., n\}$.
f será uniformemente continua en F si $y, z \in F$ y $|y-z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Sean entonces $y, z \in F$ tales que $|y-z| < \delta$. Existirán x_i, x_j tales que $y \in B_{\frac{\delta_{x_i}}{3}}(x_i)$, $z \in B_{\frac{\delta_{x_j}}{3}}(x_j)$ y además si $\delta_{x_i} \leq \delta_{x_j}$ (sin pérdida de generalidad) se tiene

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - y| + |y - z| + |z - x_j| < \frac{\delta_{x_i}}{3} + \delta + \frac{\delta_{x_j}}{3} \leq \delta_{x_j}$$

luego $x_i \in B_{\delta_{x_j}}(x_j)$ y entonces

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(z)| \underset{(A)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

por lo tanto f uniformemente continua en F. □

Parte III

Medibilidad.

1. $\sigma-$Álgebra. Espacios medibles.

Sea X un conjunto no vacío y $A, B \subset X$, la familia $\mathcal{P}(X)$ verifica: $X,\ A,\ \complement A,\ A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{P}(X)$. Toda colección de subconjuntos de X cerrada bajo uniones, intersecciones o complementos se llama **álgebra**. Si también es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables se llama σ**-álgebra**. Toda σ**-álgebra** es un **-álgebra**.

Definición 1 *Sea X un conjunto no vacío. Se dice que una familia Φ de subconjuntos de X es una σ**-álgebra** si tiene las siguientes propiedades:*
$\sigma1)$ $X \in \Phi$.
$\sigma2)$ $E \in \Phi \Rightarrow \complement E \in \Phi$.
$\sigma3)$ $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Phi$.
*Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto y Φ es una σ-álgebra de subconjuntos de X, el par (X, Φ) constituye un **espacio medible**. Los conjuntos de la σ-álgebra se denominan conjuntos Φ**-medibles**.*

Ejemplo 1 *1) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, las familias $\{X, \emptyset\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras (álgebras) de subconjuntos de X. Si Φ es cualquier σ-álgebra (álgebra) de subconjuntos de X, se tiene*

$$\{X, \emptyset\} \subset \Phi \subset \mathcal{P}(X)$$

2) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera y A subconjunto propio de X, entonces la familia $\Phi = \{X, \emptyset, A, \complement A\}$ es una $\sigma-$álgebra. Por ejemplo, $X = \mathbb{N}$ y consideramos $A = \{pares\}$ y $\complement A = \{impares\}$.
3) Sea X conjunto no numerable. La familia $\Phi = \{E \subset X : E \text{ numerable o } \complement E \text{ numerable}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Proposición 1 *Sea (X, Φ) un espacio medible, entonces:*
i) $\emptyset \in \Phi$.
ii) $A_1, ..., A_n \in \Phi \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \Phi$.
iii) $A_1, ..., A_n \in \Phi \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \Phi$.
iv) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Phi$.
v) $A, B \in \Phi \Rightarrow A - B \in \Phi$.

dem: i) $X \in \Phi \Rightarrow \emptyset = \complement X \in \Phi$.

ii) Sean $\{A_i\}_1^n \subset \Phi$, definimos $E_i = A_i$ para $i = 1, ..., n$ y $E_i = \emptyset$ para $i > n$, luego por i) la familia $\{E_i\}_1^\infty \subset \Phi \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \underset{\sigma3}{\in} \Phi$.

iii) Sean $\{A_i\}_1^n \subset \Phi \underset{\sigma2}{\Rightarrow} \complement A_i \in \Phi$ para $i = 1, ..., n \underset{\text{ii}}{\Rightarrow} \bigcup\limits_{i=1}^{n} \complement A_i \in \Phi \underset{\sigma2}{\Rightarrow} \complement \bigcup\limits_{i=1}^{n} \complement A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Phi$.

iv) Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi \underset{\sigma2}{\Rightarrow} \complement A_i \in \Phi\ \forall i \underset{\sigma3}{\Rightarrow} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \complement A_i \in \Phi \Rightarrow \complement \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Phi \underset{\sigma2}{\Rightarrow} \complement\left(\complement \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Phi$.

v) Sean $A, B \in \Phi \underset{\sigma2}{\Rightarrow} A, \complement B \in \Phi \underset{\text{iii}}{\Rightarrow} A \cap \complement B \in \Phi \Rightarrow A - B \in \Phi$. □

Lema 1 *Sea (X, Φ) un espacio medible y sea A un subconjunto de X. Entonces*
a) La familia $\Phi_A = \{A \cap E : E \in \Phi\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de A.
b) Si $A \in \Phi$, la familia Φ_A coincide con la familia de todos los subconjuntos de A que son Φ-medibles.
*Φ_A se denomina σ-**álgebra inducida sobre** A por la σ-álgebra Φ de X. El par (A, Φ_A) constituye un **subespacio medible** del espacio medible (X, Φ).*

dem: a) La familia Φ_A es σ-álgebra sobre A pues verifica:
$\sigma 1)$ Como $X \in \Phi$ y $A = A \cap X \Rightarrow A \in \Phi_A$.
$\sigma 2)$ Sea $B \in \Phi_A \Rightarrow B = A \cap E$, $E \in \Phi \Rightarrow C_A B = A \cap CB = A \cap C(A \cap E) = A \cap (CA \cup CE) = \underbrace{A \cap CA}_{=\emptyset} \cup A \cap CE = A \cap \underbrace{CE}_{\in\Phi} \in \Phi_A$.
$\sigma 3)$ Sean $B_n \in \Phi_A\ \forall n \Rightarrow B_n = A \cap E_n$, $E_n \in \Phi\ \forall n$ luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) = A \cap \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{\in\Phi} \in \Phi_A$.
b) Sea $B \subset A$ tal que $B \in \Phi$, luego $B = A \cap B \in \Phi_A$. Ahora, si $B \in \Phi_A \Rightarrow B = A \cap E$ para algún $E \in \Phi$ y como $A \in \Phi \underset{\text{iii}}{\Rightarrow} B \in \Phi$ y además $B \subset A$. □

1.1. Generación de σ-álgebras. Conjuntos de Borel.

Lema 2 *Sea $X \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces existe una mínima σ-álgebra $\Phi_{\mathcal{F}}$ de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{F}$ es decir tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\subset \Phi_{\mathcal{F}} \\ \Phi_{\mathcal{F}} &\subset \Phi \quad \forall \Phi\ \sigma\text{−algebra en } X \text{ que contiene a } \mathcal{F} \end{aligned}$$

*$\Phi_{\mathcal{F}}$ se denomina σ-**álgebra generada por la familia** $\mathcal{F}$. Los miembros de $\mathcal{F}$ se denominan* **generadores de la σ-álgebra $\Phi_{\mathcal{F}}$**.

dem: Como $\mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$, la familia $S_{\mathcal{F}} = \{Q : Q$ es σ-álgebra en X que contiene a $\mathcal{F}\}$ es no vacía. Sea $\Phi_{\mathcal{F}} = \bigcap_{Q \in S_{\mathcal{F}}} Q \Rightarrow \mathcal{F} \subset \Phi_{\mathcal{F}}$. Es claro que es la menor que contiene a $\mathcal{F}$, pues $\Phi_{\mathcal{F}} \subset Q\ \forall Q \in S_{\mathcal{F}}$. Veamos que es σ-álgebra:
$\sigma 1)$ $X \in Q\ \forall Q \in S_{\mathcal{F}} \Rightarrow X \in \bigcap_{Q \in S_{\mathcal{F}}} Q = \Phi_{\mathcal{F}}$.
$\sigma 2)$ Si $E \in \Phi_{\mathcal{F}} \Rightarrow E \in Q\ \forall Q \in S_{\mathcal{F}} \Rightarrow CE \in Q\ \forall Q \in S_{\mathcal{F}} \Rightarrow CE \in \Phi_{\mathcal{F}}$.
$\sigma 3)$ Sea $\{E_n\}_1^{\infty} \subset \Phi_{\mathcal{F}} \Rightarrow \{E_n\}_1^{\infty} \subset Q\ \forall Q \in S_{\mathcal{F}} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in Q\ \forall Q \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Phi_{\mathcal{F}}$. □

Definición 2 ***Conjuntos de Borel**. Si (X, τ) es un espacio topológico, se denomina **álgebra de Borel** de X a la σ-álgebra β generada por la familia de abiertos de X, esto es cuando en particular $\mathcal{F} = \tau$. Los miembros de β se denominan **conjuntos de Borel** o **borelianos de** X y los abiertos de τ son los* **generadores** *de β.*

Definición 3 *Sea X un espacio topológico y sea E un subconjunto de X. Se dice que E es **de clase** F_σ si es unión numerable de conjuntos cerrados. Si E es intersección numerable de conjuntos abiertos se dice que es **de clase** G_δ.*

Observación 1 *1) Los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados de un espacio topológico X son borelianos.*
2) Los conjuntos de clase F_σ y los conjuntos de clase G_δ son borelianos.

3) Un caso de particular interés es el del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$. El álgebra de Borel β de $\mathbb{R}$ admite diversas familias de generadores, tales como la familia de todos los intervalos abiertos, la de todos los intervalos cerrados, y otras.
4) En el del sistema de números reales extendido $\bar{\mathbb{R}}$, la topología se define considerando como **abiertos generadores** *a los intervalos*

$$(a, b), \ [-\infty, b), \ (a, +\infty]$$

y a toda unión de intervalos de este tipo. El álgebra de Borel $\bar{\beta}$ de $\bar{\mathbb{R}}$ se denomina ***álgebra de Borel extendida****.*
5) El álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$, admite diferentes familias de generadores, entre ellas la de todos los productos de intervalos abiertos o de intervalos cerrados, y otras.

2. Aplicaciones entre espacios medibles.

2.1. Funciones medibles.

Definición 4 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles. Se dice que $f : X \to Y$ es una* ***función (o aplicación) medible*** *si la pre-imagen de todo conjunto Φ_Y-medible es Φ_X-medible, esto es, si*

$$f^{-1}(B) \in \Phi_X \quad \forall B \in \Phi_Y$$

Observación 2 *1) Obsérvese la analogía que existe entre el concepto de función medible entre espacios medibles, y el de función continua entre espacios topológicos.*
2) Si (X, Φ_X) es un espacio medible e Y es un espacio topológico, se entenderá que una función es medible cuando lo sea al considerar a Y como el espacio medible (Y, β_Y), donde β_Y es el álgebra de Borel de Y.
3) ***Funciones medibles Borel.*** *Si X e Y son espacios topológicos, considerados como espacios medibles con sus respectivas álgebras de Borel β_X, β_Y entonces si $f : X \to Y$ es una función medible se denomina* ***función medible Borel****.*

Proposición 2 *Sean $(X, \Phi_X), (Y, \Phi_Y), (Z, \Phi_Z)$ tres espacios medibles y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones medibles. Entonces la función compuesta $g \circ f : X \to Z$ es medible.*

dem: Sea $B \in \Phi_Z$, queremos ver que $(g \circ f)^{-1}(B) \in \Phi_X$. Como g es medible, $g^{-1}(B) \in \Phi_Y$. Ahora por ser f medible, resulta $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \Phi_X$. Por lo tanto $g \circ f$ es medible. □

Proposición 3 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea $f : X \to Y$. Sea*

$$f^{-1}(\Phi_Y) = \{f^{-1}(B) : B \in \Phi_Y\}$$

Entonces:
a) $f^{-1}(\Phi_Y)$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.
b) f es medible si y sólo si $f^{-1}(\Phi_Y) \subset \Phi_X$.
Más aún, $f^{-1}(\Phi_Y)$ es la menor σ-álgebra de subconjuntos de X para la cual $f : X \to Y$ es medible cuando sobre Y se considera la σ-álgebra Φ_Y.

dem: a) $\sigma 1$) Para $Y \in \Phi_Y, \ X = f^{-1}(Y)$ luego $X \in f^{-1}(\Phi_Y)$.
$\sigma 2$) Sea $A \in f^{-1}(\Phi_Y) \Rightarrow A = f^{-1}(B), B \in \Phi_Y \Rightarrow \mathcal{C}A = \mathcal{C}f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathcal{C}B)$, con $\mathcal{C}B \in \Phi_Y \Rightarrow \mathcal{C}A \in f^{-1}(\Phi_Y)$
$\sigma 3$) Sea $\{A_n\}_1^\infty \subset f^{-1}(\Phi_Y) \Rightarrow A_n = f^{-1}(B_n)$, $B_n \in \Phi_Y \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$

con $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Phi_Y \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\Phi_Y)$.
Por lo tanto $f^{-1}(\Phi_Y)$ es una σ-álgebra en X.
b) inmediato. $\square$

Proposición 4 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea $f : X \to Y$. Sea $\mathcal{G}$ un sistema de generadores de Φ_Y. Entonces f es medible si y sólo si $f^{-1}(G) \in \Phi_X \ \ \forall G \in \mathcal{G}$.*

dem: $\Rightarrow$) f medible $\Rightarrow f^{-1}(\Phi_Y) \subset \Phi_X \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Phi_X \ \forall G \in \mathcal{G}$.
$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{A} = \{B \in \Phi_Y : f^{-1}(B) \in \Phi_X\}$. Será f medible si probamos que $\mathcal{A} = \Phi_Y$. Por hipótesis $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra de Y.
$\sigma1$) $f^{-1}(Y) = X \in \Phi_X$ luego $Y \in \mathcal{A}$.
$\sigma2$) Sea $B \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \Phi_X \Rightarrow \complement f^{-1}(B) = f^{-1}(\complement B) \in \Phi_X \Rightarrow \complement B \in \mathcal{A}$.
$\sigma3$) Sean $\{B_n\}_1^{\infty} \subset \mathcal{A}$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow f^{-1}(B_n) \in \Phi_X \ \forall n \Rightarrow f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \Phi_X \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.
Por lo tanto, como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en Y y $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ entonces $\Phi_Y \subset \mathcal{A}$, pues Φ_Y es la menor σ-álgebra en Y que contiene a $\mathcal{G}$. Además por definición es $\mathcal{A} \subset \Phi_Y$. Luego $\mathcal{A} = \Phi_Y$ y entonces f es medible. $\square$

Corolario 1 *Las funciones continuas entre espacios topológicos son medibles Borel.*

dem: f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \tau_X \ \forall B \in \tau_Y$. Si β_Y es generada por τ_Y resulta $\forall B \in \tau_Y \subset \beta_Y$, $f^{-1}(B) \in \tau_X \subset \beta_X$ entonces f es medible. $\square$

Definición 5 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea $A \subset X$. Diremos que $f_A : A \to Y$ la **restricción de f al conjunto A es medible** si lo es como función de (A, Φ_A) en (Y, Φ_Y).*

Proposición 5 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea $f : X \to Y$. Entonces:*
a) Si f es medible, la restricción f_A a cualquier subconjunto A es medible.
b) Si para algún $A \in \Phi_X$, las restricciones f_A y f_{CA} son ambas medibles, entonces f es medible.

dem: a) Sea $f : X \to Y$ medible. Sea $f_A : (A, \Phi_A) \to (Y, \Phi_Y)$. Sea $B \in \Phi_Y$, $f_A^{-1}(B) = \{x \in A : f_A(x) \in B\} = \{x \in A : f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}(B) \in \Phi_A$ pues $f^{-1}(B) \in \Phi_X$ pues f medible, luego f_A medible.
b) Supongamos existe $A \in \Phi_X$ tal que f_A y f_{CA} son medibles. Sea $B \in \Phi_Y$,
$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in A : f(x) \in B\} \cup \{x \in \complement A : f(x) \in B\} = \underbrace{f_A^{-1}(B)}_{\in \Phi_A} \cup \underbrace{f_{CA}^{-1}(B)}_{\in \Phi_{CA}} =$
$(\underbrace{A}_{\in \Phi_X} \cap \underbrace{E_1}_{\in \Phi_X}) \cup (\underbrace{\complement A}_{\in \Phi_X} \cap \underbrace{E_2}_{\in \Phi_X}) \in \Phi_X$. Luego f es medible. $\square$

Proposición 6 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea $f : X \to Y$ tal que $f(X) \subset Z \in \Phi_Y$. Sea $\tilde{f} : X \to Z$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$. Entonces $f : (X, \Phi_X) \to (Y, \Phi_Y)$ medible si y sólo si $\tilde{f} : (X, \Phi_X) \to (Z, \Phi_Z)$ es medible, donde $\Phi_Z = \{Z \cap F : F \in \Phi_Y\}$.*

dem: $\Rightarrow$) Sea $B \in \Phi_Z$ entonces $B = Z \cap F$ con $F \in \Phi_Y$, luego $\tilde{f}^{-1}(B) = \{x \in X : \tilde{f}(x) \in B\} = \{x \in X : f(x) \in B\} = f^{-1}(B) = \underbrace{f^{-1}(Z)}_{\in \Phi_X} \cap \underbrace{f^{-1}(F)}_{\in \Phi_X} \in \Phi_X$ por ser f medible y luego resulta $\tilde{f}$ medible.

$\Leftarrow$) Sea $B \in \Phi_Y$,
$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \underset{f(X)\subset Z}{=} \{x \in X : f(x) \in B \cap Z\} = \{x \in X : \tilde{f}(x) \in B \cap Z\} = \tilde{f}^{-1}(\underbrace{B \cap Z}_{\in \Phi_Z}) \in \Phi_X$, luego f es medible. $\square$

2.2. Funciones medibles a valores reales.

Definición 6 *Sea (X, Φ_X) un espacio medible. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es Φ_X-medible si es medible como función (X, Φ_X) en $(\mathbb{R}, \beta)$, siendo β el álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.*

Proposición 7 *(X, Φ_X) un espacio medible y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces f es Φ_X-medible si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*
a) $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Phi_X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
b) $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \Phi_X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
c) $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \Phi_X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
d) $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \Phi_X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

dem: Probaremos que f es medible sii a) $A_\alpha \in \Phi_X$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Notemos que $A_\alpha = f^{-1}(\alpha, \infty)$
$\Rightarrow$) f medible y $(\alpha, \infty) \in \beta$ luego $A_\alpha = f^{-1}(\alpha, \infty) \in \Phi_X$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $A_\alpha \in \Phi_X$. f será medible si $f^{-1}(B) \in \Phi_X$ $\forall B \in \beta$, pero por proposición 4, bastará mostrar que $f^{-1}(U) \in \Phi_X$ $\forall U$ abierto de $\mathbb{R}$. Además cada U abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de I_n intervalos abiertos disjuntos ($\mathbb{R}$ es N_2 y T_2), luego $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n)$. Como Φ_X es σ-álgebra bastará mostrar que $f^{-1}(I) \in \Phi_X$ $\forall$ I intervalo abierto de $\mathbb{R}$.
i) Si $I = (\alpha, \infty)$, $f^{-1}(I) = f^{-1}(\alpha, \infty) = A_\alpha \in \Phi_X$ por hipótesis.
ii) Si $I = (-\infty, \beta) = \mathbb{R} - [\beta,\infty) = \mathbb{R} \cap \mathcal{C}[\beta,\infty)$. Como $[\beta, \infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\beta - \frac{1}{n}, \infty)$ será

$$\begin{aligned} f^{-1}(I) &= f^{-1}(-\infty, \beta) = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap f^{-1}(\mathcal{C}[\beta,\infty)) \\ &= \underbrace{f^{-1}(\mathbb{R})}_{=X\in\Phi_X} \cap \mathcal{C} f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\beta - \tfrac{1}{n}, \infty)\Big) \\ &= X \cap \mathcal{C} \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(\beta - \tfrac{1}{n}, \infty)}_{\in\Phi_X} \in \Phi_X \end{aligned}$$

iii) Si $I = (\alpha, \beta) = (\alpha, \infty) \cap (-\infty, \beta)$, luego $f^{-1}(I) = f^{-1}(\alpha, \beta) = \underbrace{f^{-1}(\alpha, \infty)}_{\in\Phi_X} \cap \underbrace{f^{-1}(-\infty, \beta)}_{\in\Phi_X} \in \Phi_X$.
Por lo tanto $f^{-1}(I) \in \Phi_X$ $\forall I$, luego f es medible.
Veamos ahora las equivalencias entre a,b,c,d.
(a$\Leftrightarrow$b) $B_\alpha = \mathcal{C} A_\alpha$ $\forall \alpha$ luego $B_\alpha \in \Phi_X \Leftrightarrow \mathcal{C} A_\alpha \in \Phi_X \underset{\sigma 2}{\Leftrightarrow} A_\alpha \in \Phi_X$.
(c$\Leftrightarrow$d) $D_\alpha = \mathcal{C} C_\alpha$ $\forall \alpha$ análogo $D_\alpha \in \Phi_X \underset{\sigma 2}{\Leftrightarrow} C_\alpha \in \Phi_X$.
(a$\Rightarrow$c) $A_\alpha = f^{-1}(\alpha, \infty) \in \Phi_X$ $\forall \alpha$ luego

$$C_\alpha = f^{-1}[\alpha, \infty) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha - \tfrac{1}{n}, \infty)\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(\alpha - \tfrac{1}{n}, \infty)}_{=A_{\alpha-1/n}\in\Phi_X} \in \Phi_X.$$

(d$\Rightarrow$b) $D_\alpha = f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \Phi_X$ $\forall \alpha$ luego

$$B_\alpha = f^{-1}(-\infty, \alpha] = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, \alpha + \tfrac{1}{n})\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(-\infty, \alpha + \tfrac{1}{n})}_{=D_{\alpha+1/n}\in\Phi_X} \in \Phi_X$$

Por lo tanto a⇔b, a⇒c, c⇔d y d⇒b, esto es son todas equivalentes. □

Ejemplo 2 *1) Las funciones constantes son medibles. Si* $f(x) = c\ \forall x \in X$ *sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si* $\alpha \geq c$, $A_\alpha = \{x : f(x) > \alpha \geq c\} = \emptyset \in \Phi_X$, *si* $\alpha < c$, $A_\alpha = X \in \Phi_X$, *luego* f *es medible.*

2) La función característica de un conjunto medible es medible. Sea (X, Φ_X) *y* $E \in \Phi_X$, *definimos*

$$f(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha &< 0 \Rightarrow A_\alpha = X \in \Phi_X \\ 0 &\leq \alpha < 1 \Rightarrow A_\alpha = E \in \Phi_X \\ \alpha &\geq 1 \Rightarrow A_\alpha = \emptyset \in \Phi_X \end{aligned}$$

3) Si X es un espacio topológico, las funciones medibles Borel $f : X \to \mathbb{R}$ *se denominan* ***funciones de Borel****. Las funciones continuas son funciones de Borel. Las funciones monótonas son funciones de Borel, supongamos* f *monótona creciente,* $f(x) < f(y)$ *si* $x < y$. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$, *consideramos* A_α, *si existe* $\hat{x}$ *tal que* $f(\hat{x}) = \alpha$, *luego como* f *es creciente* $A_\alpha = (\hat{x}, \infty) \in \Phi_X$, *si no existe* x *tal que* $f(x) > \alpha$, $A_\alpha = \emptyset \in \Phi_X$. *Si* $A_\alpha \neq \emptyset$ *pero no existe* x *tal que* $f(x) = \alpha$, *sea* $\hat{x} = \text{ínf}\{x : f(x) > \alpha\}$ *luego* $A_\alpha = [\hat{x}, \infty) \in \Phi_X$ *por* $\sigma 2$.

Proposición 8 *Sea* (X, Φ) *un espacio medible. Sean* $f : X \to \mathbb{R}$ *y* $g : X \to \mathbb{R}$ *funciones medibles y sea* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces las funciones* cf, $f + g$, f^2, fg *y* $|f|$ *son también medibles.*

dem: · cf es medible. Si $c = 0$, $cf = 0$ es medible por ser constante. Si $c > 0$, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha(cf) = \{x : cf(x) > \alpha\} = A_{\frac{\alpha}{c}}(f) \in \Phi_X$ por ser f medible. Si $c < 0$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha(cf) = \{x : f(x) < \frac{\alpha}{c}\} = D_{\frac{\alpha}{c}}(f) \in \Phi_X$ pues f es medible. Entonces cf es medible.

· $f + g$ es medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha(f + g) = \{x : f(x) + g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha - g(x)\}$, en este caso observemos que $f(x) > \alpha - g(x) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) > r > \alpha - g(x)$, luego $A_\alpha(f + g) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(\{x : f(x) > r\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r\}) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A_r(f) \cap A_{\alpha-r}(g)) \in \Phi_X$ pues f, g medibles.

· f^2 es medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha(f^2) = \{x : f^2(x) > \alpha\} = X \in \Phi_X$ si $\alpha < 0$. Y si $\alpha \geq 0$, $A_\alpha(f^2) = A_{\sqrt{\alpha}}(f) \cup D_{-\sqrt{\alpha}}(f) \in \Phi_X$ pues f medible.

· fg es medible. $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ luego es medible por lo ya probado.

· $|f|$ es medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha(|f|) = \{x : |f(x)| > \alpha\} = A_\alpha(f) \cup D_{-\alpha}(f) \in \Phi_X$ pues f es medible. □

Definición 7 *Sea X un conjunto y sean* $f : X \to \mathbb{R}$ *y* $g : X \to \mathbb{R}$. *Definimos las funciones* $\text{máx}(f, g)$ *y* $\text{mín}(f, g)$ *como*

$$\begin{aligned} \text{máx}(f, g)(x) &= \text{máx}(f(x), g(x)) \\ \text{mín}(f, g)(x) &= \text{mín}(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

En particular, definimos la ***parte positiva de*** f *y la* ***parte negativa de*** f *como las funciones*

$$f^+ = \text{máx}(f, 0)$$
$$f^- = \text{máx}(-f, 0)$$

Lema 3 *Sea X un conjunto y sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$. Entonces*

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \\ \min(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{aligned}$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f) \qquad f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$$
$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-$$

dem: ejercicio de la práctica 2.

Proposición 9 *Sea (X,Φ) un espacio medible. Entonces:*
a) $f : X \to \mathbb{R}$ es medible si y sólo si f^+ y f^- son medibles.
b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ son medibles entonces $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son medibles.

dem: a) $\Rightarrow$) f medible$\Rightarrow$ $|f|$ medible$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(|f| \pm f)$ medible$\Rightarrow$ f^+, f^- medibles.
$\Leftarrow$) Si f^+, f^- medibles $\Rightarrow$ $f = f^+ - f^-$ es medible.
b) Si f, g son medibles$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(f+g\pm|f-g|)$ son medibles$\Rightarrow$ $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son medibles. □

2.3. Funciones medibles a valores reales extendidos $\bar{\mathbb{R}}$.

Definición 8 *Sea (X,Φ) un espacio medible. Se dice que una función $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ es Φ-**medible** si es medible como función de (X,Φ) en $(\bar{\mathbb{R}},\bar{\beta})$, siendo $\bar{\beta}$ el álgebra de Borel extendida.*

Notación: Utilizaremos la notación $\mathcal{M}(X,\Phi)$ para indicar la familia de todas las funciones $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ que son Φ-medibles.

Nota 1 *Si (X,Φ) es un espacio medible, toda función f definida sobre X, a valores reales, puede considerarse también como una función a valores reales extendidos, que por cierto no asume los valores $+\infty$, $-\infty$. Teniendo en cuenta que la σ-álgebra inducida sobre $\mathbb{R}$ por $\bar{\beta}$ es β, de la proposición 6 se concluye que f será medible como función a valores reales si y sólo si, lo es como función a valores reales extendidos.*

Proposición 10 *Sea (X,Φ) un espacio medible y sea $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Entonces $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

$$\begin{cases} f^{-1}(\alpha,\beta) \in \Phi \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ f^{-1}(+\infty) \in \Phi, \ \ f^{-1}(-\infty) \in \Phi \end{cases} \tag{4}$$

dem: $\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. Notemos que el álgebra de Borel extendida $\bar{\beta}$ es generada por la familia (α,β) con $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha,+\infty]$ y $[-\infty,\beta)$. Como f medible $\forall \alpha,\beta$, $f^{-1}(\alpha,\beta) \in \Phi$, $f^{-1}(\alpha,+\infty] \in \Phi$ y $f^{-1}[-\infty,\beta) \in \Phi$. Notemos además que $f^{-1}(+\infty) = \{x : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) > n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(n,+\infty]}_{\in\Phi} \in \Phi$. Análogamente $f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}[-\infty,-n) \in \Phi$. Luego se cumplen las condiciones dadas en (4).
$\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen (4), veamos que $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$, bastará mostrar que $f^{-1}(\alpha,\beta) \in \Phi$, $f^{-1}(\alpha,+\infty] \in \Phi$ y $f^{-1}[-\infty,\beta) \in \Phi$. Pero $f^{-1}(\alpha,\beta) \in \Phi$ por (4) . Y

además $f^{-1}(\alpha,+\infty] = f^{-1}(\alpha,+\infty) \cup \underbrace{f^{-1}(+\infty)}_{\in\Phi\,(4)}$ y $f^{-1}(\alpha,+\infty) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(\alpha,\alpha+n)}_{\in\Phi} \in \Phi$, luego $f^{-1}(\alpha,+\infty] \in \Phi$, análogamente se prueba que $f^{-1}[-\infty,\beta) \in \Phi$ y entonces $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. □

Proposición 11 *Sea* (X,Φ) *un espacio medible y sea* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$*. Entonces* $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ *si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

a) $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Phi \;\; \forall\alpha \in \mathbb{R}$.
b) $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \le \alpha\} \in \Phi \;\; \forall\alpha \in \mathbb{R}$.
c) $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \ge \alpha\} \in \Phi \;\; \forall\alpha \in \mathbb{R}$.
d) $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \Phi \;\; \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

dem: Veamos $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ sii $A_\alpha \in \Phi \;\; \forall\alpha \in \mathbb{R}$. Las equivalencias a,b,c,d son válidas.

$\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que $A_\alpha = f^{-1}(\alpha,+\infty] \in \Phi$ pues $(\alpha,+\infty] \in \bar{\beta}$ $\forall\alpha$ y f medible.

$\Leftarrow$) Supongamos $A_\alpha \in \Phi\ \forall\alpha$. Mostraremos que f verifica (4).

Sean $\alpha < \beta$, $f^{-1}(\alpha,\beta) = f^{-1}((\alpha,+\infty] \cap [-\infty,\beta)) = \underbrace{f^{-1}(\alpha,+\infty]}_{A_\alpha\in\Phi} \cap \underbrace{f^{-1}[-\infty,\beta)}_{\in\Phi} \in \Phi$ pues $f^{-1}[-\infty,\beta) = D_\beta \in \Phi$; $(D_\beta \in \Phi \Leftrightarrow A_\beta \in \Phi)$.

$f^{-1}(+\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(n,+\infty]}_{A_n\in\Phi} \in \Phi$ y $f^{-1}(-\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}[-\infty,-n)}_{D_{-n}\in\Phi} \in \Phi$. Por lo tanto f es medible. □

Proposición 12 *Sea* (X,Φ) *un espacio medible y sea* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$*. Entonces* $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ *si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

a) $A = f^{-1}(+\infty) \in \Phi$, $B = f^{-1}(-\infty) \in \Phi$.
b) la función $f_1 : X \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases}$ *es medible.*

dem: $\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$, entonces por proposición 10, $A, B \in \Phi$ es decir vale a), veamos que cumple b). Observemos que $f_1|_{C(A\cup B)} = f|_{C(A\cup B)}$ es medible pues f es medible y $C(A \cup B) \in \Phi$. Y $f_1|_{A\cup B} = 0|_{A\cup B}$ es medible pues la función constante 0 es medible y $A \cup B \in \Phi$. Luego f_1 medible, por proposición 5 b).

$\Leftarrow$) Supongamos que f cumple a,b) tenemos entonces $A, B \in \Phi$. Además $f|_{C(A\cup B)} = f_1|_{C(A\cup B)}$ es medible por serlo f_1.

$f|_A = (+\infty)|_A$ es medible por serlo la función constante $+\infty$ y $f|_B = (-\infty)|_B$ es medible por ser medible la constante $-\infty$, luego $f|_{A\cup B}$ es medible. Por lo tanto f medible, por proposición 5 b). □

Definición 9 *Sea X un conjunto. Sean* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *y* $c \in \mathbb{R}$*. Se definen las funciones* cf, $f+g$, fg *y* $|f|$ *de la siguiente manera:*

$\cdot$ $(cf)(x) = cf(x)$ *con la convención* $0(\pm\infty) = 0$.
$\cdot$ $(f+g)(x) = \begin{cases} f(x)+g(x) & \text{si } x \notin E_1 \cup E_2 \\ 0 & \text{si } x \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$ *donde* $E_1 = \{x : f(x) = -\infty,\ g(x) = +\infty\}$ *y* $E_2 = \{x : f(x) = +\infty,\ g(x) = -\infty\}$.
$\cdot$ $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *con la convención* $0(\pm\infty) = 0$.
$\cdot$ $|f|(x) = |f(x)|$

Proposición 13 *Sea* (X,Φ) *un espacio medible. Sean* $f, g \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ *y* $c \in \mathbb{R}$*. Entonces las funciones* cf, $f+g$, fg *y* $|f|$ *pertenecen a* $\mathcal{M}(X,\Phi)$.

dem: Se deja como ejercicio demostrar que $cf,\ f+g,\ |f| \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. Luego demostraremos que $fg \in \mathcal{M}(X,\Phi)$.

Definición 10 *Sea X un conjunto y sea $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Definimos las funciones **parte positiva de** f y la **parte negativa de** f como las funciones*

$$f^+ = \text{máx}(f,0)$$
$$f^- = \text{máx}(-f,0)$$

respectivamente, con la convención de que

$$\text{máx}(+\infty,0) = +\infty \qquad \text{máx}(-\infty,0) = 0$$

Proposición 14 *Sea (X,Φ) un espacio medible y sea $f : X \to \bar{\mathbb{R}},\ f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. Entonces $f^+ \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ y $f^- \in \mathcal{M}(X,\Phi)$.*

dem: ejercicio.

Proposición 15 *Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{M}(X,\Phi)$. Entonces las funciones $f = \inf\limits_n f_n$, $F = \sup\limits_n f_n$, $f^* = \underline{\lim} f_n$ y $F^* = \overline{\lim} f_n$ pertenecen a $\mathcal{M}(X,\Phi)$.*

dem: · Si $f = \inf f_n$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha(f) = \{x : f(x) < \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) < \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{D_\alpha(f_n)}_{\in\Phi} \in \Phi$ pues cada $f_n \in \mathcal{M}(X,\Phi)$, luego $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$.
· Si $F = \sup f_n$, será $A_\alpha(F) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_\alpha(f_n)}_{\in\Phi} \in \Phi$ pues cada $f_n \in \mathcal{M}(X,\Phi)$, luego $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$.
· Si $f^* = \underline{\lim} f_n = \sup\limits_n(\underbrace{\inf\limits_{k>n} f_k}_{\in\mathcal{M}(X,\Phi)\text{ p/c } n}) \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ por lo anterior. Análogamente $F^* = \overline{\lim} f_n = \inf\limits_n(\underbrace{\sup\limits_{k>n} f_k}_{\in\mathcal{M}(X,\Phi)\text{ p/c } n}) \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. □

Corolario 2 *Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{M}(X,\Phi)$. Supongamos que, para cada $x \in X$, existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, finito, $+\infty$ o $-\infty$. Entonces la función $f = \lim f_n$ pertenece a $\mathcal{M}(X,\Phi)$. Convendremos en decir que la sucesión (f_n) **converge puntualmente** a la función límite $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Y decimos que $\mathcal{M}(X,\Phi)$ es cerrada con respecto a la convergencia puntual.*

dem: notemos que si existe $\lim f_n$ se tiene que $\underline{\lim} f_n = \overline{\lim} f_n$. □

dem: Demostraremos ahora que si $f,g \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ entonces la función $fg \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las **funciones truncadas**

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \le n \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases} \qquad g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } |g(x)| \le n \\ n & \text{si } g(x) > n \\ -n & \text{si } g(x) < -n \end{cases}$$

Cada f_n y g_n son medibles a valores reales, luego es medible $f_n g_n$. Además $\lim f_n = f$ y $\lim g_n = g$ entonces fg es medible por ser $fg = \lim f_n g_n = \lim f_n \lim g_n$. □

Mostraremos ahora que toda función no negativa en $\mathcal{M}(X,\Phi)$ es el límite puntual de una sucesión monótona creciente (ϕ_n) de funciones en $\mathcal{M}(X,\Phi)$. Además, cada ϕ_n puede ser elegida no negativa y tal que asuma solamente un número finito de valores reales.

Lema 4 *Si f es una función no negativa en $\mathcal{M}(X,\Phi)$, existe una sucesión (ϕ_n) en $\mathcal{M}(X,\Phi)$ tal que:*

a. $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

c. Cada ϕ_n asume sólo un número finito de valores reales, $\forall n \in \mathbb{N}$.

dem: Sea $f \in \mathcal{M}(X,\Phi)$ tal que $f \geq 0$. Definimos los conjuntos, para $n \in \mathbb{N}$ y $m = 0, 1, ..., 2^n n-1$

$$E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\} = C_n(f) \qquad D_n(f) = \{x \in X : f(x) < n\}$$

$$E_{\frac{m}{2^n}} = \left\{x \in X : \frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n}\right\} = C_{\frac{m}{2^n}}(f) \cap D_{\frac{m+1}{2^n}}(f)$$

Observemos que $X = \bigcup\limits_{m=0}^{2^n n-1} E_{\frac{m}{2^n}} \cup E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{m}{2^n} & \text{si } x \in E_{\frac{m}{2^n}}, \quad m = 0, 1, ..., 2^n n - 1 \\ n & \text{si } x \in E_n \end{cases}$$

1º: Veamos que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X,\Phi)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos $A_\alpha(\phi_n) = \left\{x \in X : \phi_n(x) > \alpha\right\}$.

– Si $\alpha \geq 0$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m}{2^n} \leq \alpha < \frac{m+1}{2^n}$ y

$$\begin{aligned} A_\alpha(\phi_n) &= \left\{x \in X : \phi_n(x) = \tfrac{m+k}{2^n},\ k = 1, ..., 2^n n - m\right\} = \bigcup_{k=1}^{2^n n-m} E_{\frac{m+k}{2^n}} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{2^n n-m-1} E_{\frac{m+k}{2^n}} \cup E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n n-m-1} f^{-1}[\tfrac{m+k}{2^n}, \tfrac{m+k+1}{2^n}) \cup f^{-1}[n, +\infty] = \\ &= f^{-1}[\tfrac{m+1}{2^n}, n) \cup f^{-1}[n, +\infty] = f^{-1}[\tfrac{m+1}{2^n}, +\infty) \cup f^{-1}(+\infty) \in \Phi \end{aligned}$$

– Si $\alpha < 0$ entonces $A_\alpha(\phi_n) = X \in \Phi$ pues $\phi_n(x) = \frac{m_0}{2^n} \geq 0 > \alpha$ para algún $m_0 = 0, 1, ..., 2^n n$.

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta $\phi_n \in \mathcal{M}(X,\Phi)$.

2º: Veamos que se verifican los items a,b,c.

a. Por definición $\phi_n(x) = \frac{m_0}{2^n} \geq 0$ para algún $m_0 = 0, 1, ..., 2^n n$. Sea $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, si $f(x) < n$ existe $m \in \{0, 1, ..., 2^n n - 1\}$ tal que

$$\phi_n(x) = \tfrac{m}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{m+1}{2^n}$$

luego

$$\tfrac{2m}{2^{n+1}} \leq f(x) < \tfrac{2m+2}{2^{n+1}}$$

de donde
$$\tfrac{2m}{2^{n+1}} \le f(x) < \tfrac{2m+1}{2^{n+1}} \qquad \text{o} \qquad \tfrac{2m+1}{2^{n+1}} \le f(x) < \tfrac{2m+2}{2^{n+1}}$$
y así
$$\phi_{n+1}(x) = \tfrac{2m}{2^{n+1}} = \phi_n(x) \qquad \text{o} \qquad \phi_{n+1}(x) = \tfrac{2m+1}{2^{n+1}} = \tfrac{2m}{2^{n+1}} + \tfrac{1}{2^{n+1}} > \tfrac{2m}{2^{n+1}} = \phi_n(x)$$
resultando $0 \le \phi_n(x) \le \phi_{n+1}(x)\ \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$.

b. Para ver $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$, observemos que
$$0 \le \phi_n(x) \le \phi_{n+1}(x),\ \forall x\ \forall n \qquad (1)$$
Luego, dado $x \in E_{\frac{m}{2^n}}$ para algún $m \in \{0, 1, ..., 2^n n - 1\}$, se tiene que
$$\phi_n(x) = \tfrac{m}{2^n} \le f(x) < \tfrac{m+1}{2^n}$$
y por (1) tenemos
$$\tfrac{m}{2^n} = \phi_n(x) \le \phi_{n+1}(x) \le f(x) < \tfrac{m+1}{2^n}$$
luego
$$\frac{m}{2^n} \le \phi_{n+1}(x) < \tfrac{m+1}{2^n} \le n < n+1$$
entonces $\phi_{n+1}(x) = \frac{\hat{m}}{2^{n+1}}$ para algún $\hat{m} \in \{0, 1, ..., 2^{n+1}(n+1) - 1\}$. Entonces $x \in E_{\frac{\hat{m}}{2^{n+1}}}$ y así
$$\tfrac{\hat{m}}{2^{n+1}} \le f(x) < \tfrac{\hat{m}+1}{2^{n+1}} \qquad (2)$$
Además, $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, $x \in E_{\frac{m_0}{2^n}}$ para algún $m_0 \in \{0, 1, ..., 2^n n - 1\}$. En consecuencia, dado $x \in X$ se tiene que:

i. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{\frac{m_0}{2^n}}$ para algún $m_0 \in \{0, 1, ..., 2^n n - 1\}$, entonces: $x \in E_{\frac{m_n}{2^n}}$, $m_n \in \{0, 1, ..., 2^n n - 1\}$ y
$$\phi_n(x) = \tfrac{m_n}{2^n} \le f(x) < \tfrac{m_n+1}{2^{n+1}}$$
por (2) tenemos
$$\tfrac{m_{n+1}}{2^{n+1}} = \phi_{n+1}(x) \le f(x) < \tfrac{m_{n+1}+1}{2^{n+1}}$$
entonces
$$\tfrac{m_{n+k}}{2^{n+k}} = \phi_{n+k}(x) \le f(x) < \tfrac{m_{n+k}+1}{2^{n+k}}$$
para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $0 \le f(x) - \phi_{n+k}(x) < \frac{1}{2^{n+k}}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f(x) - \phi_n(x)\right| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ si $n \ge n_0$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$.

ii. Si no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{\frac{m_0}{2^n}}$ para algún $m_0 \in \{0, 1, ..., 2^n n - 1\}$, entonces: $x \in E_n$ (con $m_0 = 2^n n$), para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\phi_n(x) = n \le f(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = +\infty \le f(x)$.

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

c. Por defínción ϕ_n asume un número finito de valores, pues dado n, $\phi_n(X) \subset \{\frac{m}{2^n} : m = 0, 1, ..., 2^n n\}$ y así $\operatorname{card}(\phi_n(X)) = \sharp(\phi_n(X)) \le 2^n n + 1 < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Con lo queda demostrado a,b,c. $\square$

2.4. Funciones medibles a valores complejos.

Definición 11 *Sea (X, Φ) un espacio medible. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{C}$ es **Φ-medible** si es medible como función del espacio medible (X, Φ) en $(\mathbb{C}, \beta)$ siendo β el álgebra de Borel de $\mathbb{C}$.*

Proposición 16 *Sea (X, Φ) un espacio medible y sea $f : X \to \mathbb{C}$. Entonces f es Φ-medible si, y sólo si $f^{-1}(Q) \in \Phi \ \ \forall Q$ rectángulo abierto de $\mathbb{C}$.*

dem: Se puede probar que todo abierto de $\mathbb{C}$ es unión numerable de rectángulos abiertos de $\mathbb{C}$.

Proposición 17 *Sea (X, Φ) un espacio medible y sea $f : X \to \mathbb{C}$. Entonces f es Φ-medible si, y sólo si las funciones $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son Φ-medibles.*

Proposición 18 *Sea (X, Φ) un espacio medible y sean $f : X \to \mathbb{C}$, $g : X \to \mathbb{C}$ medibles, sea $c \in \mathbb{C}$. Entonces las funciones cf, $f + g$, fg y $|f|$ son medibles.*

Proposición 19 *Sea (X, Φ) un espacio medible y sea $f : X \to \mathbb{C}$ función Φ-medible. Entonces existe una función $\alpha : X \to \mathbb{C}$, Φ-medible tal que $|\alpha| = 1$ y $f = |f|\alpha$.*

dem: Definimos $\alpha : X \to \mathbb{C}$ por

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

entonces $|\alpha(x)| = 1 \ \forall x$ y $f(x) = |f(x)|\alpha(x) \ \forall x$. Además α es Φ-medible. □

Proposición 20 *Sea (X, Φ) un espacio medible. Sea (f_n) una sucesión de funciones Φ-medibles, definidas sobre X a valores en $\mathbb{C}$, que converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$. Entonces f es Φ-medible.*

Parte IV

Medidas.

1. Medidas positivas.

Definición 1 *Sea (X,Φ) un espacio medible. Una **medida positiva**, o simplemente una **medida** sobre (X,Φ), es una función de conjuntos $\mu : \Phi \to \bar{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:*

$\mu 1)$ $\mu(\emptyset) = 0$.

$\mu 2)$ $\mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \Phi$.

$\mu 3)$ *si (E_n) es una sucesión disjunta en Φ, entonces* $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

*La propiedad $\mu 3)$ se denomina **σ-aditividad** de la medida.*

Definición 2 *Sea μ una medida sobre el espacio medible (X,Φ). Si $\mu(X) < \infty$ se dice que es una **medida finita**. Si existe una sucesión (E_n) de conjuntos en X tal que*

$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *y* $\mu(E_n) < \infty \ \forall n$ *se dice que μ es una **medida $\sigma-$finita**.*

Ejemplo 1 *1) Sea X un conjunto no vacío y sea Φ una $\sigma-$álgebra sobre X. Las funciones de conjuntos*

$$\begin{array}{ll} \mu_1 : \Phi \to \bar{\mathbb{R}} & \mu_2 : \Phi \to \bar{\mathbb{R}} \\ E \to \mu_1(E) = 0 & E \to \mu_2(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset \\ +\infty & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases} \end{array}$$

son medidas sobre (X,Φ).

2) Sea (X,Φ) un espacio medible y sea x_0 un punto fijo de X. La función de conjuntos

$$\begin{array}{l} \mu : \Phi \to \bar{\mathbb{R}} \\ E \to \mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E \\ 0 & \text{si } x_0 \notin E \end{cases} \end{array}$$

*es una medida sobre (X,Φ). Se denomina **medida unitaria concentrada en** x_0.*

3) Sea $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ y sea μ la función de conjunto

$$\begin{array}{l} \mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \bar{\mathbb{R}} \\ E \to \mu(E) = \begin{cases} |E| & \text{si } |E| < \infty \\ +\infty & \text{si } |E| = \infty \end{cases} \end{array}$$

*es una medida sobre el espacio medible $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Se denomina **medida cuenta puntos** en $\mathbb{N}$. No es una medida finita pues $\mu(\mathbb{N}) = +\infty$, pero sí es $\sigma-$finita, basta tomar $(E_n)_{n=1}^{\infty} = (\{n\})_1^{\infty}$, será $\mu(\{n\}) = 1 < \infty \ \forall n$ y $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\}$.*

*4) Si $X = \mathbb{R}$ y β es la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, veremos más adelante que existe una única medida definida sobre β, que coincide con la longitud sobre los intervalos, esto es que $\mu(a,b) = b - a$ y $\mu(-\infty,b) = +\infty = \mu(a,+\infty) = \mu(\mathbb{R}) = +\infty$. Esta medida se denomina **medida de Lebesgue** sobre $(\mathbb{R},\beta)$. No es una medida finita, pero sí es $\sigma-$finita, pues podemos considerar en $\mathbb{R}$ la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-n,n)\}_1^{\infty}$, será $\mu(-n,n) = 2n < \infty \ \forall n$ y $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n,n)$.*

5) Si $X = \mathbb{R}$ y β es el $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente, *continua por derecha, se demuestra que existe una única medida sobre* $(\mathbb{R}, \beta)$, $m_f : \beta \to \bar{\mathbb{R}}$ *tal que* $m_f(a,b) = f(b) - f(a)$. *Esta medida se denomina* ***medida de Lebesgue-Stieltjes generada por*** f ***sobre*** $(\mathbb{R}, \beta)$. *La medida de Lebesgue es el caso particular de la medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a la función* $f(x) = x$.

Proposición 1 *Sea* μ *una medida definida sobre un espacio medible* (X, Φ). *Entonces:*

a) **Monotonía:** *Si* $E, F \in \Phi$ *tales que* $E \subset F$, *resulta* $\mu(E) \leq \mu(F)$
Si además, $\mu(E) < +\infty$ *resulta*

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$$

b) σ**-subaditividad:** *Si* $(E_n)_1^\infty$ *es una sucesión de conjuntos en* Φ, *resulta* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

dem: a) Sean $E, F \in \Phi$, $E \subset F$, luego $F - E \in \Phi$ y $F = E \cup (F - E) \Rightarrow \mu(F) = \mu(E) + \underbrace{\mu(F-E)}_{\geq 0} \geq \mu(E)$.
Si $\mu(E) < \infty$ se tiene que $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. Si $\mu(E) = +\infty$ también sería $\mu(F) = +\infty$ y no necesariamente $\mu(F - E) = 0$, por ejemplo $F = \mathbb{N}$ y $E = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$.
b) Sea $(E_n)_1^\infty \subset \Phi$, queremos ver que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Definimos los conjuntos

$$A_1 = E_1, \;\; A_2 = E_2 - E_1, \;\; A_3 = E_3 - (E_1 \cup E_2), \ldots, \; A_n = E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$$

Así definidos resulta que
· $A_n \in \Phi \; \forall n \in \mathbb{N}$
· $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$, pues si $m < n$, $A_n = E_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n-1} \mathcal{C}E_k) \subset \mathcal{C}E_k \; \forall k = 1, \ldots, n-1$ y $A_n \subset E_n \; \forall n$, luego $A_n \subset \mathcal{C}E_m \subset \mathcal{C}A_m$.
· $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, en efecto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ trivial, ahora si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ sea $n_0 = \text{mín}\{n : x \in E_n\}$ luego $x \in E_{n_0}$ y $x \in \mathcal{C}E_k$ con $k < n_0$, o sea $x \in A_{n_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
· $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \underset{\mu 3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \underset{A_n \subset E_n}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.
Luego se verifica b). □

Proposición 2 *Sea* μ *una medida definida sobre un espacio medible* (X, Φ). *Entonces:*

a) Si (E_n) *es una sucesión creciente en* Φ, *resulta* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$.

b) Si (F_n) *es una sucesión decreciente en* Φ, *tal que* $\mu(F_1) < \infty$ *resulta* $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n)$.

dem: a) Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión creciente de conjuntos en Φ. Si para algún n_0 es $\mu(E_{n_0}) = +\infty$ la igualdad $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$ es trivial.
Supongamos $\mu(E_n) < \infty$ y $E_n \subset E_{n+1} \;\; \forall n$. Definimos los conjuntos

$$A_1 = E_1, \;\; A_2 = E_2 - E_1, \ldots, A_n = E_n - E_{n-1}$$

tenemos entonces que $(A_n)_1^\infty \subset \Phi$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Además como $\mu(E_n) < \infty$, $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) \; \forall n$ (si definimos $E_0 = \emptyset$). Por lo tanto

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \underset{\mu 3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) - \mu(E_{k-1}) =$
$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) - \underbrace{\mu(E_0)}_{=0}$.
b) Sea $(F_n)_1^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos en Φ, tal que $\mu(F_1) < \infty$. Definimos

$$E_1 = \emptyset, \quad E_2 = F_1 - F_2, \quad E_3 = F_1 - F_3, \ldots., E_n = F_1 - F_n$$

tenemos que $(E_n)_1^{\infty} \subset \Phi$, $E_n \subset E_{n+1}\ \forall n$, luego por a) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ (*).
Ahora $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_1 - F_n) = \bigcup_{n=2}^{\infty}(F_1 - F_n) = \bigcup_{n=2}^{\infty}(F_1 \cap \mathcal{C}F_n) = F_1 \cap \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{C}F_n = F_1 \cap \mathcal{C} \bigcap_{n=2}^{\infty} F_n =$
$F_1 - \bigcap_{n=2}^{\infty} F_n$.
Como $F_n \subset F_1\ \forall n$ y $\mu(F_1) < \infty$, es $\mu(F_n) < \infty\ \forall n$ y $\bigcap_{n=2}^{\infty} F_n \subset F_n \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=2}^{\infty} F_n) < \infty$. Tenemos que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(F_1) - \mu(\bigcap_{n=2}^{\infty} F_n)$$

y también $\mu(E_n) = \mu(F_1) - \underbrace{\mu(F_n)}_{<\infty}\ \forall n$. Volviendo a (*) y reemplazando tenemos

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(F_1) - \mu(\bigcap_{n=2}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_1) - \mu(F_n)$$

y como $\bigcap_{n=2}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(\bigcap_{n=2}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

es decir vale b). □

2. Espacios con medida.

Definición 3 *Un **espacio con medida** es una terna (X, Φ, μ) constituida por un conjunto X, una $\sigma-$álgebra Φ de subconjuntos de X y una medida μ definida sobre Φ.*

Definición 4 ***"casi todo punto"**. Un conjunto de **medida nula** es, obviamente, un conjunto $N \in \Phi$ medible tal que $\mu(N) = 0$. Existe una terminología que se utiliza habitualmente, y que emplearemos de ahora en adelante. Si (X, Φ, μ) es un espacio con medida, diremos que cierta proposición es válida **μ-casi todo punto** (μ-ctp) en (X, Φ, μ), si existe un conjunto N de medida nula tal que la proposición es válida sobre $\mathcal{C}N$.*

Ejemplo 2 *1) Si f y g son funciones definidas sobre X, decimos que $f = g$ μ-ctp en X sii existe $N \in \Phi$, $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathcal{C}N$.*
2) Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre X en $\mathbb{R}$. Diremos que $f_n \to f$ μ-ctp sii existe $N \in \Phi$, $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \ \forall x \in \mathcal{C}N$.

Definición 5 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida. Si para todo $E \in \Phi$ con $\mu(E) = 0$, se verifica que todo subconjunto A de E pertenece a Φ, diremos que μ es una **medida completa**. Esto es, una medida μ es completa si todos los subconjuntos de conjuntos de medida nula son medibles y por tanto también de medida nula.*

El siguiente teorema asegura que toda medida puede ser extendida a una medida completa.

Teorema 1 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida. Entonces la familia*

$$\Phi' = \{E' = E \cup N : E \in \Phi,\ N \subset F,\ F \in \Phi,\ \mu(F) = 0\}$$

es una σ-álgebra de subconjuntos de X y la función de conjunto $\mu' : \Phi' \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por $\mu'(E') = \mu(E)$, es una medida completa. Además $\Phi \subset \Phi'$ y $\mu'(E) = \mu(E)\ \forall E \in \Phi$.

dem: 1º) Veamos que Φ' es una $\sigma-$álgebra.

$\sigma 1)$ $X \in \Phi'$ pues $X = X \cup \emptyset$ con $X \in \Phi$ y $\emptyset \subset \emptyset \in \Phi$, $\mu(\emptyset) = 0$.

$\sigma 2)$ Si $E' \in \Phi'$ entonces $CE' \in \Phi'$?. Sea $E' = E \cup N$, con $E \in \Phi,\ N \subset F,\ F \in \Phi,\ \mu(F) = 0$. Ahora bien, $CE' = (CE' \cap F) \cup (CE' \cap CF) = (CE' \cap F) \cup (CE \cap CN \cap CF) \underset{N\subset F \Rightarrow CF \subset CN}{=}$ $\underbrace{(CE' \cap F)}_{\subset F} \cup \underbrace{(CE \cap CF)}_{C(E\cup F)\in\Phi} \in \Phi'$.

$\sigma 3)$ Si $(E'_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Phi'$, con $E'_n = E_n \cup N_n$, con $E_n \in \Phi,\ N_n \subset F_n,\ F_n \in \Phi,\ \mu(F_n) = 0$. Veamos $\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup N_n) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{\in\Phi} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = 0$ luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n \in \Phi'$.

2º) Veamos que $\mu' : \Phi' \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por $\mu'(E') = \mu(E)$ si $E' = E \cup N$ es una medida completa.

a) Está bien definida, en efecto sean $E'_1 = E_1 \cup N_1$, con $E_1 \in \Phi,\ N_1 \subset F_1,\ F_1 \in \Phi,\ \mu(F_1) = 0$ y $E'_1 = E_2 \cup N_2$, con $E_2 \in \Phi,\ N_2 \subset F_2,\ F_2 \in \Phi,\ \mu(F_2) = 0$, entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ pues si

$$E_1 \subset E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2 \subset E_2 \cup F_2$$

y

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup F_2) \leq \mu(E_2) + \underbrace{\mu(F_2)}_{=0}$$

Análogamente $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$.

b) Es una medida.

$\mu 1)$ $\emptyset = \underbrace{\emptyset}_{\in\Phi} \cup \emptyset$ y $\emptyset \subset \emptyset \in \Phi$, $\mu(\emptyset) = 0$, luego $\mu'(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

$\mu 2)$ $\mu'(E') = \mu(E) \geq 0\ \forall E' = E \cup N$.

$\mu 3)$ Si $(E'_n)_1^{\infty} \subset \Phi'$ es una familia disjunta, con $E'_n = E_n \cup N_n$, con $E_n \in \Phi,\ N_n \subset F_n,\ F_n \in \Phi,\ \mu(F_n) = 0$, será $\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{\in\Phi} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = 0$, luego $\mu'(\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \underset{(E_n)_1^{\infty}\text{ disj}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(E'_n)$.

c) Veamos que es completa. Sea $H' \in \Phi'$ con $\mu'(H') = 0$ y sea $E' \subset H'$ veamos que $E' \in \Phi'$.

Observemos que $E' = \underbrace{\emptyset}_{\in\Phi} \cup E'$. Además $E' \subset H' = \underbrace{H}_{\in\Phi} \cup N$ y $N \subset F \in \Phi$ y $\mu(F) = 0$, entonces $E' \subset H' = H \cup N \subset H \cup F \in \Phi$ y $\mu(H \cup F) \leq \mu(H) + \mu(F) = \mu(H) = \mu'(H') = 0$ por hipótesis. Luego $E' = \emptyset \cup E'$, con $\emptyset \in \Phi$ y $E' \subset H \cup F \in \Phi$ y $\mu(H \cup F) = 0$, por tanto $E' \in \Phi'$.

3º) Finalmente, se cumple que $\Phi \subset \Phi'$ y $\mu'(E) = \mu(E)\ \forall E \in \Phi$. En efecto, sea $E \in \Phi$ entonces $E = E \cup \emptyset$, con $E \in \Phi$ y $\emptyset \subset \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$ entonces $E \in \Phi'$ y $\mu'(E) = \mu(E)$. □

Definición 6 *Diremos que el espacio (X, Φ', μ') es la **completación** del espacio con medida (X, Φ, μ).*

3. Aplicaciones entre espacios con medida.

Definición 7 *Se dice que una aplicación entre espacios con medida, o entre un espacio con medida y un espacio medible, es* ***medible****, si lo es como aplicación entre los espacios medibles subyacentes.*

Proposición 3 *Sea* (X, Φ, μ) *un espacio con medida completa y sea* (Y, Φ_Y) *un espacio medible. Si* $f : X \to Y$ *es una aplicación medible y* $g : X \to Y$ *es tal que* $f = g$ $\mu-$*ctp en* X*, entonces* g *es medible.*

dem: Sea $f : X \to Y$ medible y $f = g$, μ-ctp entonces existe $N \subset X$ tal que $\mu(N) = 0$ y $f = g$ en $\mathcal{C}N$. La función g será medible si $g^{-1}(B) \in \Phi$ $\forall B \in \Phi_Y$. Sea $B \in \Phi_Y$, tenemos

$$g^{-1}(B) = (g^{-1}(B) \cap N) \cup (g^{-1}(B) \cap \mathcal{C}N)$$

Ahora: i) $g^{-1}(B) \cap N \subset N$ y $\mu(N) = 0 \Rightarrow g^{-1}(B) \cap N \in \Phi$ por ser μ medida completa. ii) $g^{-1}(B) \cap \mathcal{C}N = \{x \in \mathcal{C}N : g(x) \in B\} = \{x \in \mathcal{C}N : f(x) \in B\} = f^{-1}(B) \cap \mathcal{C}N \in \Phi$ pues f medible y $\mathcal{C}N \in \Phi$. Luego $g^{-1}(B) \in \Phi$. □

4. Medidas con signo.

Definición 8 *Sea* (X, Φ) *un espacio medible. Una* ***medida con signo*** *o* ***carga*** *es una función de conjuntos definida sobre X a valores reales,* $\lambda : \Phi \to \mathbb{R}$ *tal que*

$\lambda 1$*)* $\lambda(\emptyset) = 0$.

$\lambda 2$*)* λ *es* σ*-aditiva, es decir para toda sucesión* $(E_n)_1^\infty \subset \Phi$ *disjunta resulta* $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.

Observemos que el primer miembro en $\lambda 2$) es independiente del orden en que se consideren los conjuntos y $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ es un número real finito, por lo tanto la serie del segundo miembro debe ser incondicionalmente convergente (converge para cualquier ordenamiento y al mismo número), lo que equivale que es absolutamente convergente.

Proposición 4 *Si* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *son medidas con signo sobre* (X, Φ) *y* $c_1, ..., c_n$ *son números reales, entonces* $c_1\lambda_1 + ... + c_n\lambda_n$ *es una medida con signo sobre* (X, Φ).

dem: ejercicio.

5. Generación de medidas.

5.1. Medidas exteriores.

Definición 9 *Sea X un conjunto no vacío. Una* ***medida exterior*** *sobre X es una función de conjuntos* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$*, con las siguientes propiedades:*

μ^*1*)* $\mu^*(\emptyset) = 0$.

μ^*2*)* $\mu^*(E) \geq 0$ $\forall E \subset X$.

μ^*3*)* μ^* *es* σ*-subaditiva, es decir para toda sucesión* $(E_n)_1^\infty \subset \mathcal{P}(X)$ *resulta* $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

μ^*4*)* μ^* *es monótona, esto es, si* $E \subset F \subset X$*, resulta* $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

Veremos ahora cómo puede generarse una medida exterior.

Definición 10 *Se dice que una familia de subconjuntos K de X es una* ***clase cubridora por sucesiones*** *si:*

i) $\emptyset \in K$.

ii) $\forall A \subset X$, *existe una sucesión* $(E_n)_1^\infty$ *en* K *tal que* $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Ejemplo 3 *1) En* $\mathbb{R}$, *la familia* $K = \{I : I \text{ intervalo abierto}\} \cup \{\emptyset\}$ *es clase cubridora.*

2) En $\mathbb{R}^n$, *la familia* $K = \{\prod_{i=1}^{n} I_i : I_i \text{ intervalo abierto}\} \cup \{\emptyset\}$ *es clase cubridora.*

Proposición 5 *Sean X un conjunto, K una clase cubridora por sucesiones de X y $\lambda : K \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $\lambda(\emptyset) = 0$ y $\lambda(E) \geq 0 \ \ \forall E \in K$. Entonces la función de conjunto $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ definida para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ por*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) : (E_n)_1^\infty \subset K,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$$

es una medida exterior sobre X.

dem: Veamos que es una medida exterior, para ello:

$\mu^*2)$ $\mu^*(A) \geq 0$ pues si $(E_n)_1^\infty \subset K,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \geq 0$.

$\mu^*1)$ $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) = 0$ ya que $\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset \subset K$.

$\mu^*4)$ μ^* monótona: sean $A \subset B$, es claro que todo cubrimiento por sucesiones de B lo es de A, luego

$$K_B = \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) : (E_n)_1^\infty \subset K,\ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} \subset K_A = \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) : (E_n)_1^\infty \subset K,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$$

y entonces $\mu^*(A) = \text{ínf}\, K_A \leq \text{ínf}\, K_B = \mu^*(B)$.

$\mu^*3)$ μ^* es σ-subaditiva: sea $(A_n)_1^\infty \subset \mathcal{P}(X)$. i) Si $\mu^*(A_n) = +\infty$ para algún n, es trivial. ii) Si $\mu^*(A_n) < +\infty\ \forall n$. Sea $\varepsilon > 0$, para cada n existe una sucesión $(E_{n_j})_{j=1}^\infty \subset K$ tal que $A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n_j}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_{n_j}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (por definición de ínfimo). Consideramos la sucesión $(E_{n_j})_{n,j=1}^\infty$ tendremos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,j=1}^{\infty} E_{n_j}$$

y resulta

$$\sum_{n,j=1}^{\infty} \lambda(E_{n_j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

De la definición de $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, sigue también que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Entonces μ^* es una medida exterior. □

5.2. Medida inducida por una medida exterior.

Una medida exterior tiene la ventaja de estar definida sobre la familia de todos los subconjuntos de un conjunto X, pero tiene la gran desventaja de no ser, en general, $\sigma-$aditiva. Veremos que es posible restringir μ^* a una $\sigma-$álgebra suficientemente grande de subconjuntos de X, sobre la cual μ^* tendrá la propiedad de $\sigma-$aditividad y más aún, μ^* restringida a esa $\sigma-$álgebra resultará completa. La condición que distinguirá a los subconjuntos seleccionados es debida a Carathéodory.

Definición 11 *Sea X un conjunto y sea μ^* una medida exterior sobre X. Diremos que un subconjunto E de X es μ^*-**medible** si, para cada subconjunto A de X resulta (***condición de Carathéodory***)*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE) \tag{5}$$

Observación 1 *1) La condición que define a un conjunto μ^*-medible indica una propiedad de aditividad de μ^*. En términos imprecisos podríamos decir que un conjunto E es μ^*-medible si él y su complemento están suficientemente "separados" como para que dividan a cualquier conjunto A aditivamente para μ^*.*
2) Teniendo en cuenta la subaditividad de μ^*, la condición de ser μ^*-medible es equivalente a probar que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE)$.

Teorema 2 *(Carathéodory) Sea X un conjunto y sea μ^* una medida exterior sobre X. Entonces la familia a^* de todos los conjuntos μ^*-medibles es una $\sigma-$álgebra y la restricción de μ^* a a^* es una medida completa.*

Haremos la prueba en varias etapas.

Lema 1 *Si $\mu^*(E) = 0$ entonces $E \in a^*$.*

dem: Sean $E \subset X$ tal que $\mu^*(E) = 0$ y $A \subset X$, entonces $A \cap E \subset E \Rightarrow \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ y $\mu^*(A \cap CE) \leq \mu^*(A)$ luego $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE) \leq \mu^*(A)$ y entonces $E \in a^*$. □

Lema 2 *a^* es un álgebra de subconjuntos de X.*

dem: En efecto, $\sigma2)$ si $E \in a^*$, por (5) resulta $CE \in a^*$. $\sigma1)$ $\emptyset \in a^*$ pues (lema 1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ y entonces $X = C\emptyset \in a^*$. $\sigma3)$ Veamos que si $E_1, E_2 \in a^* \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in a^*$. Sean $E_1, E_2 \in a^*$ y $A \subset X$. Puesto que $E_1 \in a^*$ y $A \cap (E_1 \cup E_2) \subset X$, se tiene por (5) que

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap CE_1) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2 \cap CE_1) \end{aligned} \tag{6}$$

Por otro lado

$$\mu^*(A \cap C(E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap CE_1 \cap CE_2) \tag{7}$$

Entonces de (6) y (7) resulta

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap C(E_1 \cup E_2)) &= \mu^*(A \cap E_1) + \\ &+ \underbrace{\mu^*(A \cap E_2 \cap CE_1) + \mu^*(A \cap CE_1 \cap CE_2)}_{\mu^*(A \cap CE_1) \quad \text{pues} \quad E_2 \in a^*} \\ &\underset{E_1 \in a^*}{=} \mu^*(A) \end{aligned}$$

queda probado que $(E_1 \cup E_2) \in a^*$. □

Lema 3 *Sean $E_1, ..., E_n$ conjuntos de a^* disjuntos dos a dos y sea A un subconjunto cualquiera de X. Entonces*
$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

dem: Lo demostraremos para $n = 2$. Sean $E_1, E_2 \in a^*$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $A \subset X$. Como $E_1 \in a^*$ tenemos por (6)

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2 \cap CE_1) \tag{8}$$

Ahora como $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ tendremos

$$\mu^*(A \cap (E_2 \cap E_1)) = 0 \tag{9}$$

Sumando (8) y (9) será

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \underbrace{\mu^*(A \cap E_2 \cap CE_1) + \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1)}_{\mu^*(A \cap E_2)}$$

y entonces hemos probado que

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2)$$

La prueba se completa haciendo inducción sobre n. □

Lema 4 *Si $(E_n)_1^\infty$ es una sucesión de conjuntos en a^* disjuntos dos a dos, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in a^*$.*

dem: Sean $(E_n)_1^\infty$ disjuntos 2 a 2 en a^* y sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Definimos $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in a^*$ (por lema 2), luego si $A \subset X$, para cada n tenemos

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap CF_n) \\ &= \mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k) + \mu^*(A \cap CF_n) \\ &\underset{\text{lema 3}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap CF_n) \\ &\underset{CF_n \supset CE}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap CE) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, se obtiene

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap CE) \tag{10}$$

Además siendo μ^* $\sigma-$subaditiva y $A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap E_n$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) \geq \mu^*(A \cap E)$, de donde
$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE)$$

esto prueba que $E \in a^*$. □

dem: Demostración del teorema.

1º) a^* es σ-álgebra por ser álgebra (lema 2) y ser cerrada por uniones numerables de conjuntos disjuntos 2 a 2.

2º) $\mu^*|_{a^*} = \mu$ es un medida.

$\mu 1)$ $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$.

$\mu 2)$ $\mu(E) = \mu^*(E) \geq 0\ \forall E \in a^*$.

$\mu 3)$ Si $(E_n)_1^\infty$ en a^* disjuntos 2 a 2, sea $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces por lema 4, $E \in a^*$. Por σ-subaditividad

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

o sea

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Ahora usando (10) con $A = E$ tenemos

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{E \cap E_n}_{E_n}) + \mu^*(\underbrace{E \cap CE}_{\emptyset}) \Rightarrow \mu(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

De donde

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

3º) $\mu^*|_{a^*} = \mu$ es completa. Sea $E \in a^*$, con $\mu(E) = \mu^*(E) = 0$ y $F \subset E$, entonces

$$\mu^*(F) \leq \mu^*(E) = 0 \Rightarrow \mu^*(F) = 0 \underset{\text{lema } 1}{\Rightarrow} F \in a^*$$

entonces μ es completa. □

Definición 12 *Sea X un conjunto y sea μ^* una medida exterior sobre X. La medida completa definida por*

$$\begin{aligned} \mu :\ & a^* \to \bar{\mathbb{R}} \\ & E \to \mu(E) = \mu^*(E) \end{aligned}$$

*se denomina **medida inducida por la medida exterior** .*

6. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

6.1. Conjuntos medibles Lebesgue.

Definición 13 *Sea K la clase cubridora por sucesiones en $\mathbb{R}$, constituida por el conjunto vacío y la familia de todos los intervalos abiertos. Sea l la función **longitud** definida sobre K de la siguiente manera:*

$$l(\emptyset) = 0, \quad l(a,b) = b - a, \quad l(I) = +\infty \quad \text{si } I \text{ no es acotado}$$

*Llamaremos **medida exterior de Lebesgue en** $\mathbb{R}$ a la función de conjunto:*

$$\begin{aligned} m^* \quad &: \quad \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}} \\ A \quad &\to \quad m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : (I_n)_1^\infty \subset K,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \end{aligned}$$

Definición 14 *Llamaremos* ***conjunto medible Lebesgue en*** $\mathbb{R}$ *a todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que sea* m^**−medible según la condición Carathéodory. Si* $\mathcal{M}$ *indica la* σ*−álgebra de los subconjuntos medibles Lebesgue de* $\mathbb{R}$*, la medida completa* m *inducida sobre* $\mathcal{M}$ *por la medida exterior* m^* *se denomina* ***medida de Lebesgue sobre*** $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4 *1) Todo conjunto formado por un único punto es medible Lebesgue y tiene medida nula. 2) Todo conjunto numerable es medible Lebesgue y tiene medida nula. En particular, el conjunto de números racionales es medible, con medida nula.*

En efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ es un cubrimiento de $\{x_0\}$ por lo tanto $m^*(\{x_0\}) \leq 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, luego $m^*(\{x_0\}) = 0 \Rightarrow \{x_0\}$ es medible y $m(\{x_0\}) = 0$.
Sea ahora $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$, cada $\{x_n\} \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es σ-álgebra $\Rightarrow E \in \mathcal{M}$ y $m(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{m(\{x_n\})}_{=0} = 0$.

Proposición 6 *La medida exterior de un intervalo es su longitud.*

dem: Consideremos primero el caso $I = [a, b]$ (cerrado y acotado). Para cada $\varepsilon > 0$, el intervalo $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ cubre a I y por tanto $m^*([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, luego $m^*([a, b]) \leq b - a < \infty$ (1). Sea $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(I_n)_1^{\infty} \subset K$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*([a, b]) + \varepsilon$ y $[a, b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ observemos que los I_n son todos acotados. Aplicando el teorema de Heine-Borel, existirá una subfamilia finita de $(I_n)_1^{\infty}$ que cubre a $[a, b]$ (compacto), sea entonces $[a, b] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_{n_j}$. Tendremos $\sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j}) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*([a, b]) + \varepsilon$.
Mostraremos que $\sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j}) > b - a$.
Notemos que $a \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_{n_j}$ de modo que existirá un $I_{n_{j_1}} = (a_1, b_1)$ tal que $a_1 < a < b_1$. Si fuese $b \leq b_1$ tendríamos $a_1 < a < b \leq b_1$ y entonces $b - a < b_1 - a_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j})$ ya estaría.
Si $b > b_1$, serán $a_1 < a < b_1 < b$ y luego $b_1 \in [a, b]$ existiendo un intervalo $I_{n_{j_2}}$ tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$ es decir $a_2 < b_1 < b_2$. Si fuese $b \leq b_2$ tendríamos $a_1 < a < b_1 < b \leq b_2$ y entonces $b - a < b_2 - a_1 = (b_2 - a_2) + \underbrace{(a_2 - b_1)}_{<0} + (b_1 - a_1) \leq \sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j})$ ya estaría. Si $b > b_2$ se continua el razonamiento y al cabo de un número finito de pasos se obtiene un intervalo (a_n, b_n) de la familia tal que $a_k < b < b_k$, para cada $i = 1, .., k$ es $a_i < b_{i-1} < b_i$. Con $b - a < b_k - a_1 = (b_k - a_n) + \underbrace{(a_n - b_{n-1})}_{<0} + (b_{n-1} - a_{n-1}) + ... + (b_2 - a_2) + \underbrace{(a_2 - b_1)}_{<0} + (b_1 - a_1) \leq \sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j})$.
Luego $b - a < \sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j}) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*([a, b]) + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, luego $m^*([a, b]) \geq b - a$ y (1) tenemos $m^*([a, b]) = b - a$.
Si I fuese cualquier intervalo acotado (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$. Como $I \subset [a, b]$ resulta $m^*(I) \leq m^*([a, b]) = b - a$ (2). Sea $\varepsilon > 0$, tenemos $[a + \varepsilon, b] \subset (a, b] \Rightarrow m^*([a + \varepsilon, b]) \leq m^*((a, b]) \Rightarrow$

$b - a - \varepsilon \leq m^*((a,b]) \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow m^*((a,b]) \geq b - a$ (3). De (2) y (3) es $m^*(I) = b - a$.
Si I fuese no acotado, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $[a,b] \subset I$ tal que $b - a = k$ luego $m^*(I) \geq m^*([a,b]) = b - a = k \ \forall k \in \mathbb{N}$ luego $m^*(I) = +\infty = l(I)$. □

Teorema 3 *Todo intervalo es medible Lebesgue y su medida de Lebesgue es igual a su longitud. Además, la medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathcal{M}$ que coincide con la longitud sobre los intervalos. Los conjuntos de Borel son medibles Lebesgue, esto es, $\beta \subset \mathcal{M}$.*

dem: 1º) Todo intervalo del tipo $(a,+\infty)$ es medible Lebesgue. Debemos probar que $(a,+\infty)$ verifica la condición de Caratheodory, esto es, para todo $A \subset \mathbb{R}$ resulta

$$m^*(A \cap (a,+\infty)) + m^*(A \cap \mathcal{C}(a,+\infty)) \leq m^*(A) \tag{11}$$

Sean $A_1 = A \cap (a,+\infty)$ y $A_2 = A \cap \mathcal{C}(a,+\infty) = A \cap (-\infty, a]$. Si fuese $m^*(A) = +\infty$ se verifica trivialmente (11). Supongamos que $m^*(A) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_1^\infty \subset K$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon$. Observemos que $A_1 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(I_n \cap (a,+\infty)) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I'_n$ y $A_2 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(I_n \cap (-\infty,a]) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I''_n$ donde I'_n y I''_n son, o bien $\emptyset$ o son intervalos. Luego por proposición anterior,

$$m^*(A_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I'_n) \qquad \text{y} \qquad m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I''_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I''_n)$$

y cada una de estas últimas series son convergentes pues $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I'_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I''_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq \underbrace{m^*(A)}_{<\infty} + \varepsilon$ y además como $I'_n \cup I''_n = I_n$ y $I'_n \cap I''_n = \emptyset$ es $l(I_n) = l(I'_n) + l(I''_n)$. Resultando así

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(l(I'_n) + l(I''_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

de donde sigue que $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$ y entonces $(a,+\infty)$ es medible Lebesgue. Cualquier otro tipo intervalo será medible Lebesgue pues, observemos que como estamos en una σ-álgebra
- $(-\infty,a] = \mathcal{C}(a,+\infty)$
- $(a,b] = (a,+\infty) - (b,+\infty)$
- $(a,b) = (a,b] - \{b\}$
- $\mathbb{R} = (-\infty,a] \cup (a,+\infty)$ etc.

2º) La medida de un intervalo es su longitud. Es inmediato pues $m(I) = m^*(I) = l(I)$.
3º) Veamos que es la única, esto es si μ es otra medida sobre $\mathcal{M}$ tal que $\mu(I) = l(I) \ \forall I$ intervalo, entonces $\mu = m$ o sea $\mu(E) = m(E) \ \forall E \in \mathcal{M}$. Sea $E \in \mathcal{M}$, sea $(I_n)_1^\infty \subset K$ tal que $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ como μ es σ-subaditiva y monótona $\mu(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n)$. De la definición de $m^*(E)$ sigue que $\mu(E) \leq m^*(E)$. Pero $m^*(E) = m(E)$, resultando

$$\mu(E) \leq m(E) \tag{12}$$

Sea $J_n = [-n,n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que, por ser μ $\sigma-$aditiva, $\mu(J_n) = \mu(J_n \cap E) + \mu(J_n \cap \mathcal{C}E)$ y $m(J_n) = m(J_n \cap E) + m(J_n \cap \mathcal{C}E)$. Ahora como $\mu(J_n) = l(J_n) = m(J_n)$ resulta

$$\mu(J_n \cap E) + \mu(J_n \cap \mathcal{C}E) = m(J_n \cap E) + m(J_n \cap \mathcal{C}E) \tag{13}$$

De (12) sigue que $\mu(J_n \cap \mathcal{C}E) \le m(J_n \cap \mathcal{C}E)$ luego por (13) deberá ser $\mu(J_n \cap E) \ge m(J_n \cap E)$ y nuevamente (12) será

$$\mu(J_n \cap E) = m(J_n \cap E)$$

Como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap J_n)$ siendo esta unión creciente, por lo tanto será

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap J_n) = \lim_{n\to\infty} m(E \cap J_n) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

4º) La familia de los intervalos abiertos genera a β y como están contenidos en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es σ-álgebra resulta $\beta \subset \mathcal{M}$. □

Corolario 1 *La medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ es $\sigma-$finita.*

dem: $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n]$ y $m[-n, n] = 2n < \infty$. □

Teorema 4 *La medida de Lebesgue es invariante por traslación, esto es, si $E \in \mathcal{M}$ es un conjunto medible y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $E + \alpha$ es medible y $m(E + \alpha) = m(E)$.*

dem: 1º) Veamos que m^* es invariante por traslación. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $(I_n)_1^{\infty} \subset K$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y sea $I'_n = I_n + \alpha$, es claro que $A + \alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$ y que $l(I'_n) = l(I_n)$, entonces $m^*(A+\alpha) \le \sum_{n=1}^{\infty} l(I'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$. De la definición de $m^*(A)$ se tiene que $m^*(A+\alpha) \le m^*(A)$. Ahora $A = (A + \alpha) - \alpha$ por lo anterior $m^*(A) = m^*((A + \alpha) - \alpha) \le m^*(A + \alpha)$, luego $m^*(A + \alpha) = m^*(A)$.

2º) Mostraremos que si $E \in \mathcal{M}$ entonces $E + \alpha \in \mathcal{M}$. Para ello debemos probar que $\forall A \subset \mathbb{R}$ es

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E + \alpha)) + m^*(A \cap \mathcal{C}(E + \alpha))$$

Tenemos

$A \cap (E+\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } x \in E+\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } x-\alpha \in E\} = \{z+\alpha \in \mathbb{R} : z+\alpha \in A \text{ y } z \in E\} = \{z + \alpha \in \mathbb{R} : z \in A - \alpha \text{ y } z \in E\} = (A - \alpha) \cap E + \alpha$.

$A \cap \mathcal{C}(E + \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } x \notin E + \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } x - \alpha \notin E\} = \{z + \alpha \in \mathbb{R} : z + \alpha \in A \text{ y } z \in \mathcal{C}E\} = \{z + \alpha \in \mathbb{R} : z \in A - \alpha \text{ y } z \in \mathcal{C}E\} = (A - \alpha) \cap \mathcal{C}E + \alpha$.

Entonces $m^*(A \cap (E+\alpha)) + m^*(A \cap \mathcal{C}(E+\alpha)) = m^*((A-\alpha) \cap E+\alpha) + m^*((A-\alpha) \cap \mathcal{C}E+\alpha) \underset{1^{\text{o}})}{=} m^*((A - \alpha) \cap E) + m^*((A - \alpha) \cap \mathcal{C}E) \underset{E\in\mathcal{M}}{=} m^*(A - \alpha) \underset{1^{\text{o}})}{=} m^*(A)$

luego $E + \alpha \in M$.

3º) $m(E + \alpha) = m(E)$ es inmediato pues $m = m^*|_{\mathcal{M}}$. □

Teorema 5 *Un conjunto E es medible Lebesgue si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen un conjunto abierto O y un conjunto cerrado F, tales que $F \subset E \subset O$ y $m(O - F) < \varepsilon$.*

dem: $\Rightarrow$) Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue.

1º) Consideramos E acotado, existe una intervalo $I = [a, b]$ tal que $E \subset I$, en tal caso $m(E) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. De la definición de medida de Lebesgue sigue que existe $(I_n)_1^{\infty} \subset K$ tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, entonces $E \subset O$ y O es abierto.

Luego $m(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Además como O es abierto (medible) y $E \subset O$ es $m(O - E) = m(O) - m(E) < \frac{\varepsilon}{2}$ (pues son $<\infty$).
Sea ahora, $A = I - E = I \cap \mathcal{C}E$, A es medible Lebesgue, por lo anterior existirá un abierto G tal que $A \subset G$ y $m(G) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $F = I - G$, F es cerrado y además $F = I \cap \mathcal{C}G \underset{A\subset G}{\subset} I \cap \mathcal{C}A = I \cap (\mathcal{C}I \cup E) = I \cap E = E$. Por otro parte $E - F = E \cap \mathcal{C}F = E \cap (\mathcal{C}I \cup G) \underset{E\subset I}{=} E \cap G \underset{E\subset \mathcal{C}A}{\subset} G - A$. Se concluye que $m(E - F) \leq m(G - A)$ y como son finitas es

$$m(E) - m(F) \leq m(G) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalmente $F \subset E \subset O$, F cerrado, O abierto y como $O - E = O \cap \mathcal{C}E$, $E - F = E \cap \mathcal{C}F$ son disjuntos entonces

$$m(O - F) = m(O - E) + m(E - F) < \varepsilon$$

2º) Sea E medible no acotado. Sea $\varepsilon > 0$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n - 1 \leq |x| < n\} = (-n, -(n-1)] \cup [n-1, n)$ y los conjuntos $E_n = A_n \cap E$ que resultan medibles y acotados, por lo anterior, para cada n existen O_n abierto y F_n cerrado tales que $F_n \subset E_n \subset O_n$ y $m(O_n - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Sea $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ abierto y $E \subset O$ y sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F \subset E$, veremos luego que F es cerrado. Además $O - F = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \cap \mathcal{C} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(O_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}F_n \right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \cap \mathcal{C}F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n - F_n)$. Luego

$$m(O - F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n - F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Veamos que F es cerrado, sea $x \in \bar{F}$ y $(x_j) \subset F$ tal que $x_j \to x$. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ existirá un N tal que $x \in A_N$ en tal caso podemos afirmar que $x \in A_{N-1} \cup A_N$ para garantizar que existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subset A_{N-1} \cup A_N$. Como $x_j \to x$ existirá j_0 tal que $x_j \in (x - \delta, x + \delta)$ $\forall j \geq j_0$ y por tanto $x_j \in A_{N-1} \cup A_N$ $\forall j \geq j_0$ (*).
Mostraremos que $x_j \in F_{N-1} \cup F_N$ $\forall j \geq j_0$. Por el absurdo, suponemos que no, esto es existe $n \geq j_0$ tal que $x_n \notin F_{N-1}$ y $x_n \notin F_N$. Notemos que $x_n \in F_n$ para algún $n \neq N-1$, $n \neq N$ pues $(x_j) \subset F = \bigcup_n F_n$. Entonces $x_n \in F_n \subset E_n$ y $x_n \in A_{N-1} \cup A_N$ por (*) entonces $x_n \in E_n \cap (A_{N-1} \cup A_N) \neq \emptyset$. Pero $E_n \cap (A_{N-1} \cup A_N) \underset{E_n \subset A_n}{\subset} A_n \cap (A_{N-1} \cup A_N) = \emptyset$ pues los A_n son disjuntos (absurdo).
Por lo tanto, $x_j \in F_{N-1} \cup F_N$ $\forall j \geq j_0$ y como $F_{N-1} \cup F_N$ es cerrado, resulta $x \in F_{N-1} \cup F_N \subset F$. Luego F cerrado.
$\Leftarrow$) Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existen O abierto y F cerrado, con $F \subset E \subset O$ y $m(O - F) < \varepsilon$. Será E medible Lebesgue, si para todo $A \subset \mathbb{R}$ probamos que

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathcal{C}E) \leq m^*(A)$$

Si $m^*(A) = \infty$ es trivial, si $m^*(A) < \infty$, sea $\varepsilon > 0$, tenemos que $A \cap E = (A \cap F) \cup (A \cap (E - F))$ entonces

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &\leq m^*(A \cap F) + m^*(A \cap (E - F)) \underset{A\cap(E-F)\subset E-F}{\leq} m^*(A \cap F) + m^*(E - F) \\ &\underset{E\subset O}{\leq} m^*(A \cap F) + m^*(O - F) < m^*(A \cap F) + \varepsilon \end{aligned}$$

y
$$m^*(A \cap CE) \underset{F \subset E}{\leq} m^*(A \cap CF)$$
Como F es cerrado y por tanto medible (por ser boreliano) sigue que
$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap CE) \leq m^*(A \cap F) + \varepsilon + m^*(A \cap CF) = m^*(A) + \varepsilon$$
para todo $\varepsilon > 0$ luego
$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap CE) \leq m^*(A)$$
resultando E medible. □

Teorema 6 *La medida de Lebesgue es* **regular***, esto es, tiene la propiedad de que para todo conjunto medible E, resulta*
$$m(E) = \text{ínf}\,\{m(O) : O \text{ abierto}, E \subset O\} = \sup\,\{m(K) : K \text{ compacto}, K \subset E\}$$

dem: 1º) Sea O abierto tal que $E \subset O$, entonces $m(E) \leq m(O)$, luego $m(E)$ es cota inferior del conjunto $\{m(O) : O$ abierto y $E \subset O\}$ (1).
Si $m(E) = +\infty$ será $m(O) = +\infty$ para todo O abierto tal que $E \subset O$ luego $m(E) = \text{ínf}\{m(O) : O$ abierto y $E \subset O\}$.
Si $m(E) < \infty$, sea $\varepsilon > 0$, existe $(I_n)_1^\infty$ en la clase cubridora tal que $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m(E) + \varepsilon$, sea $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ resulta O abierto, $E \subset O$ y $m(O) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m(E) + \varepsilon$ (2). De (1) y (2) es
$$m(E) = \text{ínf}\{m(O) : O \text{ abierto y } E \subset O\}$$

2º) Sea K compacto tal que $K \subset E$, entonces $m(K) \leq m(E)$.
i) Si E acotado, $m(E) < \infty$ luego $m(E)$ es cota superior del conjunto $\{m(K) : K$ compacto y $K \subset E\}$ (3). Sea $\varepsilon > 0$, por teorema anterior existen O abierto y F cerrado tales que $F \subset E \subset O$ y $m(O - F) < \varepsilon$, entonces $m(E - F) < \varepsilon \Rightarrow m(E) - m(F) < \varepsilon \Rightarrow m(F) > m(E) - \varepsilon$ (4). Ahora F es compacto pues es cerrado y $F \subset E$ que es acotado. Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$ existe un compacto F tal que $F \subset E$ y vale (4). De (3) y (4) es
$$m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}$$
ii) Si E no es acotado, podría ser $m(E) = +\infty$ o $m(E) < \infty$ (por ejemplo $m(\mathbb{N}) = 0$).
a) Así, si $m(E) = +\infty$ debemos mostrar que $\forall M > 0$ existe $K \subset E$ compacto tal que $m(K) > M$. Como antes definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x : n - 1 \leq |x| < n\}$, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_n A_n$ y $E_n = A_n \cap E$ que resultan medibles y acotados y $E = \bigcup\limits_n E_n$ (son disjuntos dos a dos) por tanto $m(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n) = +\infty$ (serie divergente) luego $\forall M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{N} m(E_n) > M + 1$. Para cada E_n acotado (por i) existe K_n compacto $K_n \subset E_n$ (disjuntos dos a dos) tal que $m(K_n) > m(E_n) - \frac{1}{N}$. Sea $K = \bigcup\limits_{n=1}^{N} K_n$ compacto (cerrado y acotado), $K \subset E$ y entonces
$$m(K) = \sum_{n=1}^{N} m(K_n) > \sum_{n=1}^{N} m(E_n) - \tfrac{N}{N} > M$$

b) Si $m(E) < \infty$ y no acotado, claramente $m(E)$ es cota superior del conjunto $\{m(K) : K$ compacto y $K \subset E\}$ (5). Sea $\varepsilon > 0$, ponemos $E_n = A_n \cap E$ (disjuntos 2 a 2) y $E = \bigcup_n E_n$, tenemos $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$ (serie convergente) existe N tal que $\sum_{n=1}^{N} m(E_n) > m(E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Además, por i) para cada n, existe K_n compacto $K_n \subset E_n$ (disjuntos dos a dos) tal que $m(K_n) > m(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Sea $K = \bigcup_{n=1}^{N} K_n$ compacto (cerrado y acotado), $K \subset E$ y entonces

$$m(K) = \sum_{n=1}^{N} m(K_n) > \sum_{n=1}^{N} m(E_n) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} > m(E) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = m(E) - \varepsilon$$

Luego $\forall \varepsilon > 0$, existe K compacto, $K \subset E$ y $m(K) > m(E) - \varepsilon$ (6). De (5) y (6) resulta $m(E) = \sup\{m(K) : K$ compacto y $K \subset E\}$. □

6.2. La clase de los conjuntos medibles Lebesgue.

Nota 1 *El Teorema 3 establece que todo conjunto de Borel es medible Lebesgue, es decir que $\beta \subset \mathcal{M}$. Luego veremos que la inclusión es estricta, esto es, que existen conjuntos medibles Lebesgue que no son borelianos. Mostraremos también que existen conjuntos en $\mathbb{R}$ que no son medibles Lebesgue. Tendremos así que*

$$\beta \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Comenzamos mostrando la existencia de conjuntos no medibles.

Teorema 7 *Existen en $\mathbb{R}$ conjuntos no medibles Lebesgue.*

dem: Definimos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$$

Sea E_x la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}$. Dadas E_{x_1} y E_{x_2} se verifica que

$$E_{x_1} = E_{x_2} \quad \text{o} \quad E_{x_1} \cap E_{x_2} = \emptyset \quad \text{y} \quad \mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} E_x$$

Notemos que $E_0 = \mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : y = x + r, r \in \mathbb{Q}\}$. Notemos además que en cada clase E_x existen números reales positivos tan pequeños como se quiera. En efecto, sea E_x y $\varepsilon > 0$ veamos que existe $y \in E_x$ tal que $0 < y < \varepsilon$. Como $y = x + r$, $r \in \mathbb{Q}$ bastaría elegir $r \in \mathbb{Q}$ tal que $-x < r < -x + \varepsilon$. Ahora de cada clase E_x elegimos un número μ tal que $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ de modo que si $E_{x_1} = E_{x_2}$ los elementos μ_1 y μ_2 elegidos en ellos coincidan.
Sea F el conjunto de los números μ así elegidos. Mostraremos que F no es medible. Supongamos que lo fuese. Para cada $k = 2, 3, ...$ definimos $F_k = F + \frac{1}{k}$. Cada F_k es medible, siendo $m(F_k) = m(F)$. Además $F_k \cap F_j = \emptyset$ si $k \neq j$ y $F_k \subset [0, 1]$ $\forall k$. Entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ tendremos (pues son disjuntos)

$$F_2 \cup F_3 \cup ... \cup F_{N+1} \subset [0, 1]$$

Se concluye que

$$m\Big(\bigcup_{k=2}^{N+1} F_k\Big) = \sum_{k=2}^{N+1} \underbrace{m(F_k)}_{=m(F)} \leq m[0, 1] = 1 \Rightarrow N m(F) \leq 1 \ \ \forall N \tag{14}$$

entonces $m(F) = 0$. Ahora, para cada $r \in \mathbb{Q}$ definamos $G_r = F + r$, G_r es medible y $m(G_r) = m(F) = 0$. Además $G_r \cap G_s = \emptyset$ si $r \neq s$ y $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} G_r = \mathbb{R}$, pues si $x \in \mathbb{R}$ y racional, sea $x = r_0 \in \mathbb{Q}$ entonces $r_0 \in E_0$, sea $\mu_0 \in \mathbb{Q}$ el elemento elegido de E_0 para formar F. Tenemos $r_0 = \mu_0 + (r_0 - \mu_0) \in F + \underbrace{(r_0 - \mu_0)}_{\in\mathbb{Q}} = G_{r_0-\mu_0}$. Si $x \in \mathbb{I}$, $x \in E_x$, sea $\mu_x \in E_x$ el elegido para integrar F. Notemos que $x \sim \mu_x$ y por tanto $x - \mu_x = s \in \mathbb{Q}$. Sigue que $x = \mu_x + s \in F + s = G_s$ con $s = x - \mu_x$. Se obtiene entonces que

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} G_r = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{r\in\mathbb{Q}} m(G_r) = 0 = m(\mathbb{R}) \qquad \text{contradicción}$$

Se concluye que F es no medible Lebesgue. □

Corolario 2 *Todo conjunto medible Lebesgue de medida positiva contiene un subconjunto no medible.*

Lema 5 *Sea F el conjunto no medible construido en la prueba del teorema de existencia de conjuntos no medibles Lebesgue, y sea E un conjunto medible Lebesgue tal que $E \subset F$. Entonces necesariamente debe ser $m(E) = 0$.*

dem: Para $k = 2, 3, \ldots$ definimos $E_k = E + \frac{1}{k}$ y $F_k = F + \frac{1}{k}$, cada E_k es medible y $m(E_k) = m(E)$. Además como $E \subset F$ resulta $E_k \subset F_k$ y siendo los F_k disjuntos, serán también disjuntos los E_k. Como cada $F_k \subset [0, 1]$ será $E_k \subset [0, 1]$. Dado cualquier $N \in \mathbb{N}$, se tendrá $E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_{N+1} \subset [0, 1]$ entonces $\sum_{k=2}^{N+1} m(E_k) \leq 1 \Rightarrow Nm(E) \leq 1 \;\; \forall N \Rightarrow m(E) = 0$.
□

Lema 6 *Sea E un conjunto medible Lebesgue tal que $E \subset [0, 1]$ y $m(E) > 0$. Entonces existe un conjunto no medible P tal que $P \subset E$.*

dem: Sea F el conjunto no medible del teorema anterior y para cada $r \in \mathbb{Q}$ sea $G_r = F + r$, G_r no es medible y $G_r \cap G_s = \emptyset$ si $r \neq s$ y $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} G_r = \mathbb{R}$. Descomponemos E en la forma, $E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (E \cap G_r)$ (1). Veremos que al menos uno de los $E \cap G_r$ es no medible. Supongamos que todos fuesen medibles. Observemos que $E \cap G_r = E \cap (F + r) = (E - r) \cap F + r$ pues $x \in E \cap (F + r) \Leftrightarrow x \in E$ y $x = \mu + r$, $\mu \in F \Leftrightarrow x - r \in (E - r) \cap F \Leftrightarrow x \in (E - r) \cap F + r$. Tenemos entonces que $(E \cap G_r) - r = (E - r) \cap F \subset F$. Como $E \cap G_r - r$ es medible (trasladado de medible) aplicando el lema anterior concluimos que $m(E \cap G_r - r) = 0 \Rightarrow m(E \cap G_r) = 0 \; \forall r \in \mathbb{Q}$ y entonces $m(E) = 0$ contradicción. □

dem: del corolario 2. Sea E medible, $m(E) > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $m(E \cap [k_0, k_0 + 1]) > 0$. Sea $\tilde{E} = (E \cap [k_0, k_0 + 1]) - k_0$ que resulta medible y $m(\tilde{E}) = m(E \cap [k_0, k_0 + 1]) > 0$ y $\tilde{E} \subset [0, 1]$. Existe por lema 6, $\tilde{P} \subset \tilde{E}$, $\tilde{P}$ no medible, pero tomando $P = \tilde{P} + k_0$ se tendrá P no medible, $P \subset E \cap [k_0, k_0 + 1] \subset E$. □

Mostraremos ahora la existencia de conjuntos medibles Lebesgue que no son borelianos. Utilizaremos la denominada función de Cantor.

La función de Cantor.

El conjunto de Cantor se define como la intersección de F_n donde cada F_n es la unión de intervalos cerrados disjuntos (definidos en la unidad 1). El complemento de F_n respecto al intervalo $[0,1]$ es la unión de intervalos abiertos $J_{n,i}$ para $i = 1, ..., 2^n - 1$. Por ejemplo, $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y $J_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $F_2 = [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]$ y $J_{2,1} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $J_{2,2} = (\frac{3}{9}, \frac{6}{9})$, $J_{2,3} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. En cada etapa, hay 2^n intervalos cerrados y $2^n - 1$ intervalos abiertos disjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\phi_n(0) = 0$, $\phi_n(1) = 1$ y sobre el intervalo $J_{n,i}$ para $i = 1, ..., 2^n - 1$ la función continua ϕ_n poniendo $\phi_n(x) = \dfrac{i}{2^n}$ si $x \in J_{n,i}$ y la completamos seccionalmente lineal y continua. Nótese que son crecientes y además $|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}$ $\forall x \in [0,1]$ (1). Veamos que la sucesión (ϕ_n) es uniformemente convergente sobre $[0,1]$ a una función continua ϕ. Si $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x)$, ϕ es constante sobre cada $J_{n,i}$. En efecto, $\phi_n = \phi_1 + (\phi_2 - \phi_1) + (\phi_3 - \phi_2) + ... + (\phi_n - \phi_{n-1})$. ϕ_n es la $n-$ésima suma parcial de la serie $\phi_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (\phi_k - \phi_{k-1})$ siendo esta serie uniformemente convergente sobre $[0,1]$ en virtud de (1). Además ϕ es continua y creciente, se conoce como la **función de Cantor**. Es claro que es monótona creciente y su restricción a cualquiera de los intervalos es constante.

Teorema 8 *Existen conjuntos medibles Lebesgue que no son borelianos.* ($\beta \subsetneq \mathcal{M}$).

Lema 7 *Si f es una función continua y estrictamente creciente con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $\mathbb{R}$, la imagen por f de todo conjunto de Borel es un conjunto de Borel.*

dem: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y sobreyectiva (observemos que es biyectiva). Sea $D = \{E \in \beta : f(E) \in \beta\}$. Veremos que D es una σ-álgebra y que contiene a los intervalos.
1º) D es $\sigma-$álgebra.
$- f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in D$.
$- E \in D \Rightarrow CE \in D$ pues si $E \in D \Rightarrow f(E) \in \beta \Rightarrow Cf(E) \in \beta$ y como f es sobre, resulta $f(CE) \in \beta \Rightarrow CE \in D$
$- (E_n)_1^\infty \subset D \Rightarrow f(E_n) \in \beta\ \forall n \Rightarrow \bigcup\limits_n f(E_n) = f(\bigcup\limits_n E_n) \in \beta \Rightarrow \bigcup\limits_n E_n \in D$.
2º) D contiene a los intervalos. Si I es un intervalo, como f continua $\Rightarrow f(I)$ es un intervalo$\Rightarrow f(I) \in \beta$ luego $I \in D$.
Concluimos que si $\mathcal{I}$ es la familia de todos los intervalos, tendremos $\mathcal{I} \subset D$ y D es σ-álgebra, sigue que $\beta \subset D$ pues $\mathcal{I}$ es un sistema de generadores de β. □

dem: del teorema 8. Sea ϕ la función de Cantor. Extendemos ϕ a toda la recta poniendo

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \phi(x) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Resulta ϕ continua en $\mathbb{R}$, creciente y constante sobre cada $J_{n,i}$. Definimos la función $f(x) = x + \phi(x)$, será f continua en $\mathbb{R}$, estrictamente creciente y su recorrido es $\mathbb{R}$, luego f transforma conjuntos de Borel en conjuntos de Borel. Sea K un conjunto de Cantor, K es medible, $K \in \mathcal{M}$ y $m(K) = 0$. Tenemos $[0,1] = K \cup (CK \cap [0,1])$ y resulta $f([0,1]) = f(K) \cup f(CK \cap [0,1])$ (unión disjunta). Notemos que como f es estrictamente creciente, $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,2]$. Ahora

$$m(f([0,1])) = m([0,2]) = 2 = m(f(K)) + m(f(CK \cap [0,1])) \quad (*)$$

Veamos que $m(f(CK \cap [0,1])) = 1$. Tenemos que $CK \cap [0,1] = \bigcup_n I_n$ con $(I_n)_1^\infty$ intervalos abiertos disjuntos y por tanto $f(CK \cap [0,1]) = f(\bigcup_n I_n) = \bigcup_n f(I_n)$, donde los $(f(I_n))_1^\infty$ son intervalos abiertos disjuntos. Luego

$$m(f(CK \cap [0,1])) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f(I_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} l(f(I_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$$

pues $I_n = J_{n,i}$ para algún i y así si $I_n = (a,b)$, $f(I_n) = (f(a), f(b)) = (a+\phi(a), b+\phi(b)) \underset{\phi \text{ cte}}{=} (a+\phi(a), b+\phi(a))$. Pero

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = m(CK \cap [0,1])$$

Volviendo a (*) se tiene que $m(f(K)) = 1 > 0$. De acuerdo con el corolario existe un conjunto no medible A tal que $A \subset f(K)$. Tendremos que $f^{-1}(A) \subset K$ y puesto que $m(K) = 0$, resultará $f^{-1}(A)$ medible Lebesgue por ser completa la medida de Lebesgue. Veamos que $f^{-1}(A)$ no es boreliano, si suponemos que $f^{-1}(A) \in \beta$ tendríamos que $A = f(f^{-1}(A)) \in \beta$ pero esto es falso pues $A \notin \mathcal{M}$ y $\beta \subset \mathcal{M}$. Conclusión $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ y $f^{-1}(A) \notin \beta$. □

Teorema 9 *La σ-álgebra $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$ es la completación del álgebra de Borel con respecto a la medida de Lebesgue m. Explícitamente, todo conjunto medible Lebesgue E es de la forma $E = B \cup N$, donde B es un conjunto de Borel y N es un conjunto para el cual existe un boreliano B_1 tal que $N \subset B_1$ y $m(B_1) = 0$ siendo $m(E) = m(B)$.*

dem: Sea $E \in \mathcal{M}$. Mostraremos que existen $B \in \beta$, $\tilde{B} \in \beta$ tal que $B \subset E \subset \tilde{B}$ y $m(E - B) = m(\tilde{B} - E) = 0$.

Consideremos primero $m(E) < \infty$. Existe una sucesión creciente de compactos (K_n) y una sucesión decreciente de abiertos de medida finita (O_n) tales que $K_n \subset E \subset O_n$ $\forall n$ y $\lim_{n\to\infty} m(K_n) = m(E) = \lim_{n\to\infty} m(O_n)$.

(De un teorema anterior existen (A_n) abiertos y (B_n) compactos tales que $m(E) < m(A_n) < m(E) + \frac{1}{n}$ y $m(E) > m(B_n) > m(E) - \frac{1}{n}$ y podemos considerar $O_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$, $K_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$).

Sean $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ y $\tilde{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, $B \in \beta$, $\tilde{B} \in \beta$ y $B \subset E \subset \tilde{B}$. Además (por proposición 2) $m(B) = \lim_{n\to\infty} m(K_n) = m(E) = \lim_{n\to\infty} m(O_n) = m(\tilde{B}) \Rightarrow m((E - B) = m(\tilde{B} - E) = 0$.

Consideremos ahora el caso $m(E) = +\infty$. Sea (I_n) una sucesión de intervalos acotados disjuntos tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{R}$. Sea $E_n = E \cap I_n$, entonces $m(E_n) < \infty$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Por lo anterior para cada n existen borelianos $B_n \in \beta$, $\tilde{B}_n \in \beta$ tal que $B_n \subset E_n \subset \tilde{B}_n$ y $m(E_n - B_n) = m(\tilde{B}_n - E_n) = 0$. Sean $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $\tilde{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$, resultan $B, \tilde{B} \in \beta$ y $B \subset E \subset \tilde{B}$. Ahora $E - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} CB_n}_{\subset CB_n}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n - B_n)$, luego

$m(E - B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n - B_n) = 0$. Análogamente $m(\tilde{B} - E) = 0$.

Conclusión si $E \in \mathcal{M}$, existen $B \in \beta$, $\tilde{B} \in \beta$ tal que $B \subset E \subset \tilde{B}$ y $m(E - B) = m(\tilde{B} - E) = 0$. Ahora $E = B \cup (E - B) = B \cup N$, siendo $N = E - B \subset \tilde{B} - B = B_1 \in \beta$ entonces $N \subset B_1 \in \beta$. Además $m(B_1) = m(\tilde{B} - B) = m(\tilde{B} - E) + m(E - B) = 0$. O sea que $E = B \cup N$ con $B \in \beta$, $N \subset B_1 \in \beta$, $m(B_1) = 0$. En particular $m(E) = m(B)$. □

6.3. La clase de las funciones medibles Lebesgue

Definición 15 *Sea E un conjunto medible Lebesgue en* $\mathbb{R}$. *Se dice que una* **función** $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ **es medible Lebesgue** *y notamos* $\mathcal{L}$, *si es medible cuando se considera sobre E la* σ*-álgebra inducida por la álgebra* $\mathcal{M}$ *(o* $\mathcal{M}_E$*), y sobre* $\bar{\mathbb{R}}$ *la* σ*-álgebra de Borel extendida.*

Ejemplo 5 *1) Toda función medible Borel es medible Lebesgue.*

2) Toda función continua es medible Lebesgue.

3) La función característica de un conjunto medible Lebesgue es medible Lebesgue.

4) Toda función escalonada es medible Lebesgue.

5) Si $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ *es medible, o sea* $f \in \mathcal{L}$ *y* $g : E \to \bar{\mathbb{R}}$ *es tal que* $g(x) = f(x)$ *pctp en* E, *entonces g también es medible Lebesgue.*

6) Si (f_n) *es una sucesión de funciones medibles Lebesgue sobre un conjunto* $E \in \mathcal{M}$, *y esta sucesión converge pctp sobre E a una función* f, *entonces* f *es también medible Lebesgue.*

Nota 2 *La sucesión* (x^n) *converge puntualmente a la función nula sobre el intervalo [0,1) , pero la convergencia no es uniforme. Sin embargo, para cualquier número* $0 < a < 1$, *la sucesión es uniformemente convergente a* $f = 0$ *sobre el intervalo* $[0, a]$.
El teorema de Egoroff, que veremos a continuación, extiende este principio de un modo general a sucesiones de funciones medibles.

Teorema 10 *(Egoroff) Sea* $E \in \mathcal{M}$ *de medida finita, y sea* (f_n) *una sucesión de funciones medibles Lebesgue, a valores reales, definidas sobre E. Supongamos que esta sucesión converge puntualmente pctp sobre E a una función* f *a valores reales. Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$, *existe un subconjunto* E_ε *de E tal que* $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$ *y la sucesión converge uniformemente a* f *sobre* E_ε.

dem: Sea $\varepsilon > 0$, sea $A = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$, por hipótesis $E - A$ es medible y $m(E - A) = 0$. A resulta también medible, además $x \in A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall \sigma > 0$ existe $n_\sigma \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \sigma$ $\forall n \geq n_\sigma \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall n \geq n_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{n=n_k}^{\infty} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{j=n}^{\infty} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \tfrac{1}{k}\}}_{E_{k,n}} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n}$. Luego $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n}$. Los $E_{k,n}$ son medibles (f es medible por ser la medida completa). Tenemos $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} \subset E$ (1). Puesto que $m(E - A) = 0$ y son conjuntos de medida

finita se tiene que $m(A) = m(E)$ (2). De (1) y (2) sigue que $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n}) = m(E)$ (3). Ahora $E_{k,n} = \bigcap_{j=n}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\} \subset \bigcap_{j=n+1}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\} = E_{k,n+1}$ $\forall n$ luego $E - E_{k,n} \supset E - E_{k,n+1}$ $\forall n$.
De donde $m(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E - E_{k,n})) = \lim\limits_{n\to\infty} m(E - E_{k,n})$.
Además, $m(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E - E_{k,n})) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E \cap \mathcal{C}E_{k,n})) = m(E \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}E_{k,n})) = m(E \cap \mathcal{C}\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n}) = m(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n}) \underset{(3)}{=} 0$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} m(E - E_{k,n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Ahora por (4), para $\varepsilon > 0$ dado y para cada $k \in \mathbb{N}$ existirá $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $m(E - E_{k,n}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ $\forall n \geq n_k$.
Sea $E_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,n_k}$, E_ε es medible Lebesgue y $E_\varepsilon \subset E$. Veamos que $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre E_ε. En efecto, $m(E - E_\varepsilon) = m(E - \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,n_k}) = m(E \cap \mathcal{C}\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,n_k}) = m(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}E_{k,n_k}) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap \mathcal{C}E_{k,n_k}) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E - E_{k,n_k})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E - E_{k,n_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.
Sea $x \in E_\varepsilon \Rightarrow x \in E_{k,n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, sea $\sigma > 0$, sea $k_\sigma \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_\sigma} < \sigma$ y sea $n_{k_\sigma} = N_\sigma \in \mathbb{N}$. Si $x \in E_{k_\sigma, N_\sigma} \Rightarrow |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k_\sigma} < \sigma$ $\forall j \geq N_\sigma$. Conclusión dado $\sigma > 0$ existe N_σ (independiente de $x \in E_\varepsilon$) tal que $|f_j(x) - f(x)| < \sigma$ $\forall j \geq N_\sigma$ $\forall x \in E_\varepsilon$. Luego $f_n \to f$ uniformemente sobre E_ε. □

El próximo teorema establece la relación que existe entre la propiedad de medibilidad de una función y su continuidad. Se demuestra que se puede restringir una función medible a un subconjunto de medida arbitrariamente próxima a la del dominio original, y sobre el cual la función dada sea continua.

Teorema 11 *(Lusin) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ medible Lebesgue y sea f una función medible Lebesgue definida sobre E, a valores reales. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto cerrado F_ε de E, tal que $m(E - F_\varepsilon) < \varepsilon$ y f es continua sobre F_ε.*

dem: 1º) Consideremos el caso que f sea una **función simple medible** sobre E. Esto es, $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ donde los E_j son medibles y disjuntos 2 a 2, los $(a_j)_1^N$ son todos distintos (y no nulos). Así $E_j = \{x \in E : f(x) = a_j\}$ para $j = 1, .., N$, $E_j \subset E$ $\forall j \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{N} E_j \subset E$. Sea $E_{N+1} = E - \bigcup_{j=1}^{N} E_j$. Observemos que f es constante sobre cada E_j. Sea $\varepsilon > 0$, para cada $j = 1, .., N+1$ existe un cerrado $F_j \subset E_j$ tal que $m(E_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{N+1}$. Sea $F = \bigcup_{j=1}^{N+1} F_j$, F es cerrado, $F \subset E$ y $m(E - F) = \sum_{j=1}^{N+1} m(E_j - F_j) < \varepsilon$. Y f es constante sobre cada F_j, lo cual implica que f es continua sobre cada F_j, los F_j son cerrados disjuntos 2 a 2, entonces

f es continua sobre F.
2º) Sea f medible sobre E. Existe una sucesión (f_n) de funciones simples que converge puntualmente a f. ($f = f^+ - f^-$, $\phi_n \nearrow f^+$, $\Phi_n \nearrow f^-$, $f_n = \phi_n - \Phi_n \to f$). Por la primera parte para cada f_n existe un cerrado $A_n \subset E$ tal que $m(E - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y f_n continua sobre A_n. Sea $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, A es cerrado, $A \subset E$, todas las f_n son continuas sobre A. Además $m(E-A) = m(E - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = m(E \cap C \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = m(E \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} CA_n) = m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E \cap CA_n) = m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E - A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E - A_n) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad (1)$
Sean $B_k = A \cap \{x \in \mathbb{R} : k-1 \leq |x| < k\}$ conjuntos medibles, de medida finita, disjuntos 2 a 2 y tales que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Además $f_n \to f|_{B_k}$ puntualmente sobre B_k. Aplicando el teorema de Egoroff, existirá un conjunto medible $C_k \subset B_k$ tal que $m(B_k - C_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre C_k. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $F_k \subset C_k$, F_k cerrado tal que $m(C_k - F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Sea $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, notemos que los F_k son cerrados y $F_k \subset B_k \subset \{x \in \mathbb{R} : k-1 \leq |x| < k\}$ entonces F cerrado y $f_n \to f$ uniformemente sobre F_k. Sigue que f será continua sobre cada F_k. Nuevamente como los F_k son cerrados disjuntos, f resulta continua sobre $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Además $E - F = (E - A) \cup (A - F)$ y luego $m(E - F) \leq m(E - A) + m(A - F) < \varepsilon + m(A - F)$ por (1). Ahora
$A - F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \cap C \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(B_k \cap C \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(B_k \cap \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} CF_k) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(B_k \cap CF_k) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(B_k - F_k)$, luego $m(A - F) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(B_k - F_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}(m(B_k - C_k) + m(C_k - F_k)) < \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) = \varepsilon$. □

Teorema 12 *Sea E un subconjunto medible Lebesgue y sea f una función medible Lebesgue definida sobre E, a valores reales. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua g definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Además, si $|f(x)| \leq M$ sobre E, g puede ser elegida tal que $|g(x)| \leq M$ sobre $\mathbb{R}$.*

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 8 *Sea f una función continua definida sobre un subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}$. Entonces existe una función continua g definida sobre $\mathbb{R}$ que es una extensión de f. Además, si $|f(x)| \leq M$ sobre F, g puede ser elegida tal que $|g(x)| \leq M$ sobre $\mathbb{R}$.*

dem: del teorema. Sea $E \subset \mathbb{R}$, E medible Lebesgue y sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible Lebesgue. Sea $\varepsilon > 0$, por teorema Lusin existe un cerrado $F \subset E$ tal que f es continua en F y $m(E - F) < \varepsilon$. Por el lema, existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x) = f(x)$ en F. Entonces $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset E - F$ (1). Notemos que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = \{x \in E : |f(x) - g(x)| > 0\}$ y f y g son medibles luego $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es medible Lebesgue y por (1) $m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) \leq m(E - F) < \varepsilon$. Además del lema, sigue también que si $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in E$, se puede obtener g tal que $|g(x)| \leq M$ $\forall x \in E$. □

dem: del lema ejercicio.

El principio establecido en el teorema de Lusin puede ser formulado de una manera que nos recuerda el teorema de aproximación de Weierstrass.

Teorema 13 *(Fréchet) Sea E un conjunto medible Lebesgue y sea f una función medible Lebesgue definida sobre E, a valores reales. Entonces existe una sucesión de funciones continuas (g_n) sobre $\mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ pctp $x \in E$.*

dem: Aplicaremos el teorema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $m(\{x \in E : g_n(x) \neq f(x)\}) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Veamos que $g_n \to f$ pctp en E. Observemos que $\{x \in E : \exists k \in \mathbb{N} \ / \ g_n(x) = f(x) \ \forall n \geq k\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} \{x \in E : g_n(x) = f(x)\}$. Por lo tanto, $D = C_E\{x \in E : \exists k \in \mathbb{N} \ / \ g_n(x) = f(x) \ \forall n \geq k\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x \in E : g_n(x) \neq f(x)\}$. Luego para todo $k \in \mathbb{N}$, $D \subset \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x \in E : g_n(x) \neq f(x)\}$ y entonces

$$m(D) \leq m\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in E : g_n(x) \neq f(x)\}\Big) \leq \sum_{n=k}^{\infty} m(\{x \in E : g_n(x) \neq f(x)\}) < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^k} \quad \forall k$$

luego $m(D) = 0$. Por lo tanto $\forall x \in E - D$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(x) = f(x)$ $\forall n \geq k$ y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ $\forall x \in E - D$ con $m(D) = 0$ luego $g_n \to f$ puntualmente pctp en E.
□

Parte V

Integración.

§1. Integración abstracta.

Consideraremos (X, Φ, μ) un espacio con medida.

1. La integral.

1.1. La integral de funciones simples.

Definición 1 *Se denomina* ***función simple*** *a toda función que asume solamente un número finito de valores reales.*

Proposición 1 *Una función simple medible φ, puede ser representada en la forma, $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, donde los a_j son números reales y los E_j son conjuntos $\Phi-$medibles. Entre estas representaciones existe una en la que los coeficientes a_j son distintos y los conjuntos E_j son disjuntos dos a dos. A tal representación la denominaremos* ***representación normal*** *de φ.*

dem: Sean $\{a_1, ..., a_n\}$ los valores que asume φ y sea $E_j = \{x \in X : \varphi(x) = a_j\}$, como φ es $\Phi-$medible es $E_j \in \Phi$ y como $a_i \neq a_j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Además resulta $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$ $\forall x \in X$. □

Notación: $\mathcal{M}^+(X, \Phi)$ familia de funciones medibles sobre X a valores reales extendidos, no negativos.

Definición 2 *Si φ es una función simple en $\mathcal{M}^+(X, \Phi)$ con la representación normal $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ definimos la* ***integral de*** *φ* ***con respecto a*** *μ como el número real extendido*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

Si $E \in \Phi$, definimos la ***integral de*** *φ* ***con respecto a*** *μ* ***sobre*** *E, como el número real extendido*

$$\int_E \varphi d\mu = \int \varphi \chi_E d\mu$$

Observación 1 *1) En la definición utilizamos la convención $0.\infty = 0$ (si $\mu(E_j) = \infty$ para algún j), en particular $\int 0 d\mu = 0\mu(X) = 0$, tanto si $\mu(X)$ es finito o es $+\infty$.*

2) Notemos que si φ es una función simple en $\mathcal{M}^+(X, \Phi)$ también $\varphi\chi_E$ es una función simple en $\mathcal{M}^+(X, \Phi)$. En efecto si $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, $\varphi\chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}$.

3) Observemos que en la definición de $\int \varphi d\mu$ no se presenta el caso $(-\infty)(+\infty)$ pues φ es a valores no negativos.

Proposición 2 *Sea φ una función simple en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$, supongamos que puede representarse por $\varphi=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}$ con E_j disjuntos 2 a 2, pero los a_j no necesariamente distintos. Entonces*

$$\int\varphi d\mu=\sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)$$

dem: Sea c uno de los valores asumidos por φ y sea $A_c=\{x\in X:\varphi(x)=c\}=\bigcup_{a_j=c}E_j$. Sean $c_1,...,c_m$ los valores distintos asumidos por φ. La representación normal de φ será $\varphi=\sum_{k=1}^{m}c_k\chi_{A_{c_k}}$, resulta que $\int\varphi d\mu=\sum_{k=1}^{m}c_k\mu(A_{c_k})$. Ahora $\mu(A_{c_k})=\sum_{a_j=c_k}\mu(E_j)$, pues los E_j son disjuntos, entonces $\int\varphi d\mu=\sum_{k=1}^{m}c_k\mu(A_{c_k})=\sum_{k=1}^{m}c_k(\sum_{a_j=c_k}\mu(E_j))=\sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)$. □

Proposición 3 *a) Si φ,ν son funciones simples en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y $c\in\mathbb{R}_0^+$, entonces valen las* ***propiedades de linealidad****:*

$$\begin{aligned}\int c\varphi d\mu &= c\int\varphi d\mu\\ \int(\varphi+\nu)d\mu &= \int\varphi d\mu+\int\nu d\mu\end{aligned}$$

b) Si φ es una función simple en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$, la función de conjunto

$$\begin{array}{ccl}\lambda & : & \Phi\to\bar{\mathbb{R}}\\ E & \to & \lambda(E)=\int_E\varphi d\mu\end{array}$$

es una medida.

dem: a) Si $c=0$, $\int 0\varphi d\mu=0=0\int\varphi d\mu$. Si $c>0$, sea la representación normal de $\varphi=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}$, entonces $c\varphi$ es simple en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y su representación normal es $c\varphi=\sum_{j=1}^{n}ca_j\chi_{E_j}$ luego $\int c\varphi d\mu=\sum_{j=1}^{n}ca_j\mu(E_j)=c\sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)=c\int\varphi d\mu$.

Sean $\varphi=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}$ y $\nu=\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{F_k}$ funciones simples en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ dadas por su representación normal, entonces $\varphi+\nu=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}+\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{F_k}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\chi_{E_j\cap F_k}$. Notemos que si $(j_1,k_1)\neq(j_2,k_2)$ se tiene que $\left(E_{j_1}\cap F_{k_1}\right)\cap\left(E_{j_2}\cap F_{k_2}\right)=\emptyset$. Luego aplicando la proposición anterior (pues $\{E_j\cap F_k\}_{j,k}$ son disjuntos) resulta $\int(\varphi+\nu)d\mu=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(E_j\cap F_k)$ (1).

Notemos que $X=\bigcup_{j=1}^{n}E_j=\bigcup_{k=1}^{m}F_k$, por lo tanto $E_j=E_j\cap X=\bigcup_{k=1}^{m}(E_j\cap F_k)$ luego $\mu(E_j)=\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k)$, análogamente $F_k=F_k\cap X=\bigcup_{j=1}^{n}(F_k\cap E_j)$ y $\mu(F_k)=\sum_{j=1}^{n}\mu(F_k\cap E_j)$

(pues $\{E_j \cap F_k\}_k$ y $\{F_k \cap E_j\}_j$ son disjuntos).
Volviendo a (1) tenemos

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \nu) d\mu &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)}_{\mu(E_j)} + \sum_{k=1}^{m} b_k \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)}_{\mu(F_k)} = \\
&= \int \varphi d\mu + \int \nu d\mu
\end{aligned}$$

b) Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ (con su representación normal) simple en $\mathcal{M}^+(X, \Phi)$. Sea $E \in \Phi$, tenemos $\lambda(E) = \int_E \varphi d\mu = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j)$ (2).
Consideremos la función de conjunto

$$\begin{aligned}
\mu_j \ &: \ \Phi \to \bar{\mathbb{R}} \\
E \ &\to \ \mu_j(E) = \mu(E \cap E_j)
\end{aligned}$$

– μ_j está bien definida, $E \cap E_j \in \Phi \ \forall E \in \Phi$.
– μ_j es una medida: i) $\mu_j(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E_j) = \mu(\emptyset) = 0$. ii) $\mu_j(E) = \mu(E \cap E_j) \geq 0$. iii) Si $(F_n) \subset \Phi$ son disjuntos, $\mu_j(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F_n \cap E_j\right)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(F_n \cap E_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(F_n)$ ($\{F_n \cap E_j\}_n$ son disjuntos).
Volviendo a (2), tenemos $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E)$ o sea $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j$ donde $a_j \geq 0$ y μ_j es una medida $\forall j$. Se concluye que λ es una medida. □

1.2. La integral de funciones medibles no negativas.

Definición 3 *Si $f \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$ definimos la **integral de f con respecto a** μ como el número real extendido*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ simple medible, } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

*Si $E \in \Phi$, definimos la **integral de f con respecto a** μ **sobre** E, como el número real extendido*

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

Observación 2 *1) Escribimos brevemente*

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simple}}} \int \varphi d\mu$$

2) Si $f \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$ y $E \in \Phi$ notemos que $f \chi_E \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$.

Proposición 4 *(**Comparación**) a) Si $f \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$, $g \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$ y $f \leq g$ entonces*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

b) Si $f \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$ y $E, F \in \Phi$, $E \subset F$ entonces

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

dem: a) $\{\int \varphi d\mu : \varphi$ simple medible, $0 \leq \varphi \leq f\} \subset \{\int \nu d\mu : \nu$ simple medible, $0 \leq \nu \leq g\}$ y por tanto $\int f d\mu = \sup\limits_{\substack{0\leq\varphi\leq f \\ \varphi \text{ simple}}} \int \varphi d\mu \leq \sup\limits_{\substack{0\leq\nu\leq g \\ \nu \text{ simple}}} \int \nu d\mu = \int g d\mu$.

b) Si $E \subset F \Rightarrow \chi_E \leq \chi_F$ y $f \in \mathcal{M}^+(X,\Phi) \Rightarrow f\chi_E \leq f\chi_F$ por a) será $\int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$. □

Teorema 1 *(convergencia monótona o de Beppo Levi) Sea $(f_n)_1^\infty$ una sucesión monótona creciente de funciones en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ que converge puntualmente a f entonces*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

dem: Observemos que $f \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y por tanto está definida $\int f d\mu$. Por otra parte, siendo (f_n) creciente y $f_n \to f$ puntualmente, tenemos por proposición anterior a) que $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu \;\; \forall n$. Se concluye que existe

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f d\mu \qquad (1)$$

Sea φ simple medible tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Consideremos para cada n el conjunto $A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$, $A_n \in \Phi \; \forall n$ (pues f_n, φ son medibles). La sucesión (A_n) es creciente y $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, pues si $x \in X$, observemos que $\alpha\varphi(x) < f(x)$, puesto que $f_n \nearrow f$ existirá n tal que $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$ luego existe n tal que $x \in A_n$ y entonces $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Consideremos la medida positiva λ definida por la función simple $\varphi \geq 0$, por $\lambda(E) = \int_E \varphi d\mu$, para $E \in \Phi$. Concluimos que será

$$\lambda(X) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Tenemos que en cada A_n es $\alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \Rightarrow \alpha\varphi\chi_{A_n} \leq f_n\chi_{A_n} \Rightarrow \int \alpha\varphi\chi_{A_n} d\mu \leq \int f_n\chi_{A_n} d\mu \Rightarrow \int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu$.

Tomando límites

$$\alpha \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \alpha\lambda(X) \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

por tanto

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Hemos fijado φ y $0 < \alpha < 1$. Dejemos fija φ y hacemos $\alpha \to 1$, resulta

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Tomando supremo entre φ simples tales que $0 \leq \varphi \leq f$ tenemos

$$\sup_{\substack{0\leq\varphi\leq f \\ \varphi \text{ simple}}} \int \varphi d\mu = \int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta $\int f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. □

Proposición 5 (**Linealidad**) *a) Si $f \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y $c \in \mathbb{R}_0^+$, entonces $cf \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y $\int cfd\mu = c\int fd\mu$.*

b) Si $f,g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ entonces $f+g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y $\int(f+g)d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$.

dem: a) Es obvio que $cf \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$. Veamos $\int cfd\mu = c\int fd\mu$. Si $c=0$ trivial. Sean $c>0$ y (φ_n) una sucesión creciente de funciones simples medibles que converge a f (existe por lema 4 de la unidad 3) entonces $(c\varphi_n)$ tiene esa propiedad y $c\varphi_n \to cf$ por teorema de Beppo Levi y proposición 3 tenemos

$$\int cfd\mu = \lim_{n\to\infty}\int c\varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} c\int \varphi_n d\mu = c\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n d\mu = c\int fd\mu$$

b) Es claro que $f+g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$. Sean $(\varphi_n),(\nu_n)$ sucesiones crecientes de funciones simples medibles que convergen a f y g respectivamente entonces $(\varphi_n+\nu_n) \nearrow f+g$ y entonces tenemos

$\int(f+g)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int(\varphi_n+\nu_n)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\varphi_n d\mu + \lim_{n\to\infty}\int\nu_n d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$ □

Teorema 2 *(Lema de Fatou) Si $(f_n)_1^\infty$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ entonces*

$$\int \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim}\int f_n d\mu$$

dem: Observemos que $f = \underline{\lim} f_n$ es una función en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ pues $f = \underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k\ge n} f_k$, para cada n, sea $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$, $g_n \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$. Además (g_n) es una sucesión creciente que converge puntualmente a f, por teorema de Beppo Levi se obtiene

$$\int fd\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \qquad (1)$$

Ahora para cada n, resulta $g_n \le f_k\ \forall k\ge n$ y por tanto $\int g_n d\mu \le \int f_k d\mu\ \ \forall k \ge n$ y luego para cada n resulta

$$\int g_n d\mu \le \inf_{k\ge n}\int f_k d\mu \qquad (2)$$

Observemos que ambos miembros en (2) son sucesiones crecientes resultando

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \le \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}\int f_k d\mu = \sup_n \inf_{k\ge n}\int f_k d\mu = \underline{\lim}\int f_n d\mu \qquad (3)$$

De (1) y (3) se obtiene que $\int fd\mu = \int \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim}\int f_n d\mu$. □

Proposición 6 *Sea $f \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ entonces la función de conjunto*

$$\begin{array}{ccc} \lambda & : & \Phi \to \bar{\mathbb{R}} \\ E & \to & \lambda(E) = \int_E fd\mu \end{array}$$

es una medida. Para cada $g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ se tiene

$$\int gd\lambda = \int gfd\mu$$

dem: i) Veamos que λ es una medida. λ está bien definida. Además $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f\chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$. Si $E \in \Phi$, como $\emptyset \subset E$ tenemos $\int_{\emptyset} f d\mu \leq \int_E f d\mu \Rightarrow 0 \leq \lambda(E)$. Si $(E_n) \subset \Phi$ y son disjuntos dos a dos, sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, observemos que $\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ y por tanto $\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f\chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.

ii) Supongamos primero $g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ es simple no negativa y cuya representación normal es $g = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}$. Entonces $\int g d\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda(E_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{E_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int f\chi_{E_j} d\mu =$

$= \int \sum_{j=1}^{n} a_j f\chi_{E_j} d\mu = \int f(\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}) d\mu = \int fg d\mu$.

Sea ahora $g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$. Sea (φ_n) una sucesión creciente de funciones simples no negativas que converge puntualmente a g. Para cada n ya vimos que vale

$$\int \varphi_n d\lambda = \int \varphi_n f d\mu \qquad (1)$$

Notemos que $(\varphi_n f)$ es una sucesión creciente en $\mathcal{M}^+(X,\Phi)$ que converge a gf luego tomando límite en (1)

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n f d\mu$$

tenemos por Beppo Levi que $\int g d\lambda = \int gf d\mu$. □

Nota 1 *El hecho de que sea $\int g d\lambda = \int gf d\mu \ \forall g \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ se expresa poniendo $d\lambda = f d\mu$.*
Se plantea la siguiente pregunta, dado un espacio con medida (X,Φ,μ) y cierta medida λ sobre la $\sigma-$álgebra Φ ¿existirá una función $f \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ tal que $d\lambda = f d\mu$? La respuesta a esta pregunta la dará el teorema de Radon-Nikodym.

2. Funciones integrables.

2.1. Funciones integrables a valores reales.

Notación. Notamos con $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X,\Phi)$ a la familia de funciones $\Phi-$medibles a valores reales (no extendido) y con $\mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(X,\Phi)$ a la familia de funciones $\Phi-$ medibles a valores reales no negativos.

Observación 3 *Dada una función f definimos $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$, $f^- = \text{máx}\{-f, 0\}$ resultando entonces las igualdades: $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ y $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.*

Definición 4 *Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X,\Phi)$, diremos que f **es integrable** (o **sumable**) **con respecto a** μ **en** $\mathbb{R}$ si las integrales $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ son ambas finitas en cuyo caso definimos la **integral de** f **con respecto a** μ **en** $\mathbb{R}$ como el número real:*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

*Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X,\Phi)$ y $E \in \Phi$, si $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ son ambas finitas, decimos que f **es integrable sobre** E **con respecto a** μ y definimos **integral de** f **sobre** E **con respecto a** μ como el número real:*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \int f\chi_E d\mu$$

Notación. Notamos con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ a la familia de todas las funciones integrables de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \Phi)$. Si $f = f^+ - f^-$, entonces $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}$.

Proposición 7 *Sea $f \in \mathcal{L}$ y sean f_1, f_2 funciones en $\mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(X, \Phi)$ e integrables tales que $f = f_1 - f_2$ entonces*

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$$

dem: Tenemos que $\forall x \in X$

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f_1(x) + f^-(x) = f^+(x) + f_2(x) \qquad (1)$$

por proposición anterior es

$$\int f_1 d\mu + \int f^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu \qquad (2)$$

todas las integrales en (2) son finitas luego

$$\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f d\mu$$ □

Proposición 8 *Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \Phi)$. Entonces $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$. En tal caso*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int \left|f\right| d\mu$$

dem: Tenemos $f = f^+ - f^-$ y $\left|f\right| = f^+ + f^-$ luego $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L} \Rightarrow f^+ + f^- \in \mathcal{L}$ (pues $\int (f^+ + f^-) d\mu = \underbrace{\int f^+ d\mu}_{<\infty} + \underbrace{\int f^- d\mu}_{<\infty}) \Rightarrow \left|f\right| \in \mathcal{L}$. Por otro lado si $\left|f\right| \in \mathcal{L} \Rightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}$ (pues $f^+ \leq \left|f\right|$, $f^- \leq \left|f\right|$ y proposición 4 resulta $\int f^+ d\mu \leq \underbrace{\int \left|f\right| d\mu}_{<\infty}$ y $\int f^- d\mu \leq \underbrace{\int \left|f\right| d\mu}_{<\infty}) \Rightarrow f \in \mathcal{L}$.
Además $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ entonces $\left|\int f d\mu\right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int \left|f\right| d\mu$. □

Observación 4 *Para la integral de Riemann vale:*

$$f \text{ integrable Riemann en } [a, b] \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |f| \text{ integrable Riemann en } [a, b]$$

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [a, b] \end{cases}$$

verifica que $|f| = 1$ es integrable Riemann en $[a, b]$ pero f no es integrable Riemann en $[a, b]$.

Proposición 9 *Si $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \Phi)$ y g es integrable no negativa tal que $|f| \leq g$ entonces f es integrable y $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu$.*

dem: Por la monotonía de funciones medible no negativas se tiene que $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu < \infty \Rightarrow |f| \in \mathcal{L} \Rightarrow f \in \mathcal{L}$ y vale $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu$. □

Proposición 10 *(***linealidad de la integral***)*
a) Si $f \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f \in \mathcal{L}$ y $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.
b) Si $f, g \in \mathcal{L}$ entonces $f + g \in \mathcal{L}$ y $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

dem: a) $|\alpha f| = |\alpha||f|$ entonces $\int |\alpha f| d\mu = \int |\alpha||f| d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu < \infty$ pues $f \in \mathcal{L} \Rightarrow |\alpha f| \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}$. Veamos que $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, si $\alpha = 0$ trivial. Si $\alpha > 0$, como $f = f^+ - f^-$ será $\alpha f = (\alpha f)^+ - (\alpha f)^- = \alpha f^+ - \alpha f^-$ luego

$$\int \alpha f d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \int f d\mu$$

Ahora observemos que si $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}$, $-f = -f^+ + f^- = f^- - f^+ \in \mathcal{L}$ y vale

$$\int -f d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu = -(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu) = -\int f d\mu$$

Cuando $\alpha < 0$, $\alpha = -|\alpha|$ luego

$$\int \alpha f d\mu = \int -|\alpha| f d\mu = -\int |\alpha| f d\mu = -|\alpha| \int f d\mu = \alpha \int f d\mu$$

b) Sean $f = f^+ - f^-$ y $g = g^+ - g^-$ en $\mathcal{L}$. Como $|f + g| \leq |f| + |g|$ y $|f|, |g| \in \mathcal{L} \Rightarrow |f + g| \in \mathcal{L}$ $\Rightarrow f + g \in \mathcal{L}$ pues

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < \infty$$

Ahora $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, luego $\int (f + g) d\mu \underset{\text{prop 7}}{=} \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$. □

Corolario 1 *$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} I & : & \mathcal{L} \to \mathbb{R} \\ f & \to & I(f) = \int f d\mu \end{array}$$

es una función lineal.

Proposición 11 *(**Monotonía de la integral**) Si $f, g \in \mathcal{L}$ y $f \leq g$ entonces $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

dem: Observemos que $g - f \geq 0$ es medible e integrable luego es $\int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$ y además $\int (g - f) d\mu \geq 0$. □

Teorema 3 *(de Lebesgue o de la convergencia dominada) Sea $(f_n)_1^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ que converge puntualmente sobre X a una función f a valores reales. Supongamos que existe una función g integrable tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$f \in \mathcal{L} \;\text{ y }\; \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

dem: Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \to f$ se tiene que $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$. Como g integrable resulta $f \in \mathcal{L}$. De $-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $g - f_n \geq 0$ y $g + f_n \geq 0$ $\forall n$ luego por lema de Fatou, tenemos

$$\begin{array}{rcll} \int \underline{\lim}(g - f_n) d\mu & \leq & \underline{\lim} \int (g - f_n) d\mu & (1) \\ \int \underline{\lim}(g + f_n) d\mu & \leq & \underline{\lim} \int (g + f_n) d\mu & (2) \end{array}$$

Ahora

$$\int \underline{\lim}(g - f_n) d\mu = \int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$$

y
$$\underline{\lim} \int (g - f_n)d\mu = \underline{\lim}(\int g d\mu - \int f_n d\mu) = \int g d\mu - \overline{\lim} \int f_n d\mu$$
luego por (1) se tiene
$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu &\leq \int g d\mu - \overline{\lim} \int f_n d\mu \\ &\Downarrow \\ \overline{\lim} \int f_n d\mu &\leq \int f d\mu \qquad (3) \end{aligned}$$
Análogamente
$$\int \underline{\lim}(g + f_n)d\mu = \int (g + f)d\mu = \int g d\mu + \int f d\mu$$
y
$$\underline{\lim} \int (g + f_n)d\mu = \underline{\lim}(\int g d\mu + \int f_n d\mu) = \int g d\mu + \underline{\lim} \int f_n d\mu$$
luego por (2) se tiene
$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &\leq \int g d\mu + \underline{\lim} \int f_n d\mu \\ &\Downarrow \\ \int f d\mu &\leq \underline{\lim} \int f_n d\mu \qquad (4) \end{aligned}$$
De (3) y (4) sigue que
$$\overline{\lim} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu$$
entonces
$$\underline{\lim} \int f_n d\mu = \overline{\lim} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$
y por tanto existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. □

2.2. Funciones integrables a valores complejos.

Notación. Notamos con $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \Phi)$ a la familia de funciones $\Phi-$medibles a valores complejos.

Definición 5 *Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \Phi)$, diremos que f **es integrable** (o **sumable**) **con respecto a** μ **en** $\mathbb{C}$ si las integrales $\int \mathrm{Re}\, f d\mu$, $\int \mathrm{Im}\, f d\mu$ son ambas finitas en cuyo caso definimos la **integral de** f **con respecto a** μ **en** $\mathbb{C}$ como el número complejo:*
$$\int f d\mu = \int \mathrm{Re}\, f d\mu + i \int \mathrm{Im}\, f d\mu$$

*Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \Phi)$ y $E \in \Phi$, si $\int_E \mathrm{Re}\, f d\mu$, $\int_E \mathrm{Im}\, f d\mu$ son ambas finitas, decimos que f **es integrable sobre** E **con respecto a** μ y definimos **integral de** f **sobre** E **con respecto a** μ como el número complejo:*
$$\int_E f d\mu = \int_E \mathrm{Re}\, f d\mu + i \int_E \mathrm{Im}\, f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

Notación. Notamos con $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \Phi, \mu)$ a la familia de todas las funciones integrables de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \Phi)$.

Proposición 12 (**linealidad de la integral**)
a) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces $\alpha f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ y $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.
b) Si $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ entonces $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ y $\int (f + g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

dem: ejercicio. $\square$

Corolario 2 *$\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \Phi, \mu)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} I & : & \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \\ f & \to & I(f) = \int f d\mu \end{array}$$

es una función lineal.

Proposición 13 *Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \Phi)$. Entonces $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$. En tal caso*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int \left|f\right| d\mu$$

dem: Tenemos $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \operatorname{Re} f \in \mathcal{L}$ y $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |\operatorname{Re} f| \in \mathcal{L}$ y $|\operatorname{Im} f| \in \mathcal{L}$. Como $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ será

$$\int \left|f\right| d\mu \leq \int \left|\operatorname{Re} f\right| d\mu + \int \left|\operatorname{Im} f\right| d\mu < \infty \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

Supongamos ahora $|f| \in \mathcal{L}$. Como $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ y $|\operatorname{Im} f| \leq |f| \Rightarrow |\operatorname{Re} f| \in \mathcal{L}$ y $|\operatorname{Im} f| \in \mathcal{L} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$.
Veamos ahora que $\left|\int f d\mu\right| \leq \int \left|f\right| d\mu$. Si $\int f d\mu = 0$ trivial. Si $\int f d\mu \neq 0$, entonces existe θ tal que $\int f d\mu = \left|\int f d\mu\right| e^{i\theta}$. Sigue que $\mathbb{R} \ni \left|\int f d\mu\right| = e^{-i\theta} \int f d\mu = \int e^{-i\theta} f d\mu = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) d\mu$ y $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq |e^{-i\theta} f|$, luego $\left|\int f d\mu\right| = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) d\mu \leq \int \left|e^{-i\theta} f\right| d\mu = \int |f| d\mu$. $\square$

Teorema 4 *(de Lebesgue o de la convergencia dominada) Sea $(f_n)_1^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \Phi, \mu)$ que converge puntualmente sobre X a una función f a valores complejos. Supongamos que existe una función g integrable tal que $|f_n(x)| \leq g(x)\ \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \text{ y } \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

dem: Para cada n, $f_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \operatorname{Re} f_n \in \mathcal{L}$ y $\operatorname{Im} f_n \in \mathcal{L}$. Además $f_n \to f \Leftrightarrow \operatorname{Re} f_n \to \operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f_n \to \operatorname{Im} f$. Teniendo en cuenta que $|\operatorname{Re} f_n(x)| \leq |f_n(x)| \leq g(x)\ \forall x \in X$ y $|\operatorname{Im} f_n(x)| \leq |f_n(x)| \leq g(x)\ \forall x \in X$. Aplicamos el teorema de Lebesgue para funciones reales y obtenemos que $\operatorname{Re} f \in \mathcal{L}$, $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ y además

$$\int \operatorname{Re} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \operatorname{Re} f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int \operatorname{Im} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \operatorname{Im} f_n d\mu$$

Luego concluimos que

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \operatorname{Re} f_n d\mu + i \lim_{n\to\infty} \int \operatorname{Im} f_n d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int \operatorname{Re} f_n d\mu + i \int \operatorname{Im} f_n d\mu\right) = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \qquad \square$$

2.3. El rol de los conjuntos de medida nula.

Proposición 14 *Sea $f \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ entonces $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\mu-$pctp.*

dem: $\Rightarrow$) Supongamos $\int f d\mu = 0$. Sea $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$, mostraremos que $\mu(E) = 0$, esto significará que $f = 0$, μ-pctp. Observemos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Para cada n se tiene $0 = \int f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu = \int f\chi_{E_n} d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n)$. Es decir $\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq 0 \Rightarrow \mu(E_n) = 0\ \forall n$, luego $\mu(E) = 0$.
$\Leftarrow$) Supongamos $f = 0$, μ-pctp. Sea $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$ sabemos que $E \in \Phi$ y $\mu(E) = 0$. Consideremos la sucesión $f_n = n\chi_E\ \forall n$, observemos que si $x \in E$, $f_n(x) = n$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$, si $x \notin E$, $f_n(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Resulta así que $f(x) \leq \underline{\lim} f_n\ \forall x \in X$ por monotonía y aplicando lema de Fatou tenemos

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu = \underline{\lim} \int n\chi_E d\mu = \underline{\lim} n \underbrace{\mu(E)}_{=0} = 0$$

por lo tanto $\int f d\mu = 0$. □

Proposición 15 *Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X,\Phi)$ entonces*
a) $f = 0$, $\mu-$pctp$\Rightarrow \int f d\mu = 0$
b) $E \in \Phi$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$

dem: a) $f = 0$, $\mu-$pctp $\Rightarrow |f| = 0$ pctp en $\mathcal{M}^+ \Rightarrow \int |f| d\mu = 0$ y $|\int f| \leq \int |f| = 0 \Rightarrow \int f d\mu = 0$.
b) Observemos que $\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu$ y que $f\chi_E(x) = 0\ \forall x \notin E$ con $\mu(E) = 0$. Luego $f\chi_E = 0$, μ-pctp $\Rightarrow \int f\chi_E d\mu = \int_E f d\mu = 0$. □

Proposición 16 *Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ y sea $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X,\Phi)$ tal que $g = f$, μ-pctp entonces $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ y $\int g d\mu = \int f d\mu$.*

dem: Sea $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, entonces $N \in \Phi$ y $\mu(N) = 0$. Veamos que $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$. Tenemos que $|g| = |g|\chi_N + |g|\chi_{CN}$. Ahora (por proposición 14-15) $\int |g|\chi_N d\mu = 0$ pues $|g|\chi_N \in \mathcal{M}^+(X,\Phi)$ y $|g|\chi_N = 0$, μ-pctp. Entonces

$$\int |g| d\mu = \int |g|\chi_{CN} d\mu = \int |f|\chi_{CN} d\mu < \infty \Rightarrow g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$$

Veamos ahora que $\int g d\mu = \underbrace{\int g\chi_N d\mu}_{=0} + \int g\chi_{CN} d\mu = \int f\chi_{CN} d\mu =$

$= \underbrace{\int f\chi_N d\mu}_{=0} + \int f\chi_{CN} d\mu = \int f d\mu.$ □

Proposición 17 *Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ tal que $\int_E f d\mu = 0\ \forall E \in \Phi$ entonces $f = 0$, μ-pctp.*

dem: Como $\int_E f d\mu = \int_E \mathrm{Re}\, f d\mu + i \int_E \mathrm{Im}\, f d\mu = 0$, bastará mostrar el resultado para funciones integrables en $\mathbb{R}$. Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ tal que $\int_E f d\mu = 0\ \forall E \in \Phi$. Sean $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$ y $B = \{x \in X : f(x) < 0\}$ ambos en Φ. Sigue que $\int_A f d\mu = 0$ es decir $\int f^+ d\mu = 0 \Rightarrow f^+ = 0$, μ-pctp. Análogamente resulta $f^- = 0$, μ-pctp. Luego $f = 0$, μ-pctp. □

2.4. Funciones integrables definidas μ-pctp.

Observación 5 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida, sea $N \in \Phi$, $\mu(N) = 0$ y sea f una función definida y medible sobre CN. Sean $\tilde{f}$, $\hat{f}$ dos extensiones medibles de f a todo X. De acuerdo con la proposición anterior, $\tilde{f} \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{L}$ y en tal caso $\int \tilde{f} d\mu = \int \hat{f} d\mu$.*

Definición 6 *Sea f definida y medible sobre CN, donde $N \in \Phi$ y $\mu(N) = 0$. Sea $\tilde{f}$ la extensión por cero de f definida por*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in CN \\ 0 & \text{si } x \in N \end{cases}$$

*Diremos que f es **integrable** si $\tilde{f}$ es integrable y definimos la integral de f respecto de μ poniendo $\int f d\mu = \int \tilde{f} d\mu$. Si $E \in \Phi$, definimos $\int_E f d\mu = \int_E \tilde{f} d\mu$.*

Nota 2 *Para funciones integrables definidas μ-pctp se extienden resultados obtenidos para funciones integrables definidas en todo X. Se deja como ejercicio formular tales resultados con la correspondiente adaptación.*

3. Integrales que dependen de un parámetro.

Consideramos $F(\lambda) = \int f(x, \lambda) d\mu(x)$ por ejemplo la función Gamma $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

3.1. Continuidad de una integral con respecto a un parámetro.

Proposición 18 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y sea (Λ, d) un espacio métrico. Sea $f : X \times \Lambda \to \mathbb{C}$ una función compleja tal que:*

1) Para cada $\lambda \in \Lambda$, la función $x \to f(x, \lambda)$ es $\Phi-$medible.

2) Para cierto $\lambda_0 \in \Lambda$ y cada $x \in X$ existe $\lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x, \lambda) = h(x)$.

3) Existe una función $g(x)$ integrable sobre X, tal que $|f(x, \lambda)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Entonces está definida sobre Λ la función

$$F(\lambda) = \int f(x, \lambda) d\mu(x)$$

y existe

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} F(\lambda) = \int \lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x, \lambda) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x)$$

dem: Observemos que, para cada $\lambda \in \Lambda$, la función $x \to f(x, \lambda)$ es integrable pues está mayorada por g integrable. Luego está bien definida $F(\lambda) = \int f(x, \lambda) d\mu(x)$. Como (Λ, d) es N_1, para probar que existe $\lim_{\lambda \to \lambda_0} F(\lambda)$ bastará mostrar que $\forall (\lambda_n) \subset \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$ resulta $\lim_{n \to \infty} F(\lambda_n) = \int h(x) d\mu(x)$. Sea (λ_n) una tal sucesión y sea $F(\lambda_n) = \int f(x, \lambda_n) d\mu(x)$, ponemos $f_n(x) = f(x, \lambda_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, tenemos por 3) que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \forall n$ siendo g integrable sobre X, además por 2) (f_n) converge puntualmente a h sobre X, luego por teorema de la convergencia dominada, concluimos que h es integrable en X y $\int h(x) d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int f_n(x) d\mu\,(x) = \lim_{n \to \infty} F(\lambda_n)$. $\square$

Corolario 3 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y sea (Λ, d) un espacio métrico. Sea $f : X \times \Lambda \to \mathbb{C}$ una función compleja que cumple 1) y 3) y tal que*

2') Para cada $x \in X$, la función $\lambda \to f(x, \lambda)$ es continua.

Entonces está definida y es continua sobre Λ la función

$$F(\lambda) = \int f(x, \lambda) d\mu(x)$$

3.2. Derivabilidad de una integral con respecto a un parámetro.

Proposición 19 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y sea Λ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sea $f : X \times \Lambda \to \mathbb{C}$ una función compleja tal que:*
1) Para cada $\lambda \in \Lambda$, la función $x \to f(x, \lambda)$ es $\Phi-$medible.
2) Para cierto $\lambda_0 \in \Lambda$, la función $x \to f(x, \lambda_0)$ es integrable sobre X.
3) Existe $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ $\forall (x, \lambda) \in X \times \Lambda$.
4) Existe una función $g(x)$ integrable sobre X, tal que $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \Lambda$.
Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$ la función $x \to f(x, \lambda)$ es integrable y la función $F(\lambda) = \int f(x, \lambda) d\mu(x)$ es derivable sobre Λ siendo

$$F'(\lambda) = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) d\mu(x)$$

dem: Supongamos f a valores reales (extendemos luego a $\mathbb{C}$). Por 1) para cada λ, la función $x \to f(x, \lambda)$ es $\Phi-$medible, veamos que es integrable. Aplicando el TVM, para cada $x \in X$ y s entre λ y λ_0 se tiene

$$f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, s)(\lambda - \lambda_0)$$

Resulta entonces

$$\left|f(x, \lambda)\right| \leq \left|f(x, \lambda_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, s)\right| |\lambda - \lambda_0| \leq \left|f(x, \lambda_0)\right| + g(x) |\lambda - \lambda_0|$$

luego $x \to f(x, \lambda)$ es integrable por 2 y 4. Así está bien definida $F(\lambda) = \int f(x, \lambda) d\mu(x)$. Notemos que para cada λ, la función $x \to \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ es Φ-medible pues fijado λ, sea $(\lambda_n) \to \lambda$ ($\lambda_n \neq \lambda$ $\forall n$), será entonces $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x,\lambda_n)-f(x,\lambda)}{\lambda_n-\lambda}}_{\Phi-\text{medible } \forall n}$ y luego el límite es Φ-medible. Además por 4) es integrable, luego existe la integral $\int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) d\mu(x)$.
Veamos que F es derivable. Bastará mostrar que $\forall (\lambda_n) \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$ ($\lambda_n \neq \lambda$ $\forall n$) existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(\lambda_n)-F(\lambda)}{\lambda_n-\lambda}$.
Tenemos $\dfrac{F(\lambda_n) - F(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} = \dfrac{\int f(x, \lambda_n) d\mu(x) - \int f(x, \lambda) d\mu(x)}{\lambda_n - \lambda} =$
$= \int \dfrac{f(x, \lambda_n) - f(x, \lambda)}{\lambda_n - \lambda} d\mu(x) \underset{s_n \text{ entre } \lambda_n \text{ y } \lambda}{\overset{TVM}{=}} \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, s_n) d\mu(x)$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada concluimos que existe
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(\lambda_n) - F(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} = \lim\limits_{n\to\infty} \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, s_n) d\mu(x) = \int \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, s_n) d\mu(x) \underset{3)}{=} \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) d\mu(x)$. Por lo tanto existe $F'(\lambda) = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) d\mu(x)$. □

Ejemplo 1 $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$, $F'(\lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin x dx = e^{-\lambda x} \cos x|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos x dx = -1 + \lambda \left(e^{-\lambda x} \sin x|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin x dx\right) = -1 - \lambda^2 F'(\lambda) \Rightarrow F'(\lambda) = \frac{-1}{1+\lambda^2} \Rightarrow F(\lambda) = -\arctan \lambda + C$ *con* $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = C$.

4. Integración sobre espacios producto.

4.1. Medida producto.

Definición 7 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea $Z = X \times Y$. Se denomina* ***rectángulo medible*** *a todo subconjunto de Z de la forma $A \times B$ con $A \in \Phi_X$ y $B \in \Phi_Y$. Se denomina* ***espacio***

medible producto *al espacio* (Z, Φ_Z) *donde* Φ_Z *es la* σ*-álgebra generada por la familia de rectángulos medibles. Se nota* $\Phi_Z = \Phi_X \times \Phi_Y$*. Llamaremos* ***conjunto elemental*** *a todo conjunto que sea unión finita de rectángulos medibles. Y notamos* $\mathcal{Z}_0$ *familia de conjuntos elementales.*

Observación 6 Φ_Z *coincide con la* σ*-álgebra generada por* $\mathcal{Z}_0$*.* R *: familia de rectángulos medibles.* $\mathcal{A}$ *:* σ*-álgebra generada por* $\mathcal{Z}_0$*.* $R \subset \mathcal{A} \Rightarrow \Phi_Z \subset \mathcal{A}$*.* $\mathcal{Z}_0 \subset \Phi_Z \Rightarrow \mathcal{A} \subset \Phi_Z$*. Entonces* $\Phi_Z = \mathcal{A}$*.*

Teorema 5 *(Medida producto) Sean* (X, Φ_X, μ) *e* (Y, Φ_Y, γ) *espacios con medida. Entonces existe una medida* π *definida sobre la* σ*-álgebra* $\Phi_Z = \Phi_X \times \Phi_Y$ *tal que*

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\gamma(B) \ \ \forall A \in \Phi_X \ \forall B \in \Phi_Y \qquad (1)$$

Si las medidas μ *y* γ *son* $\sigma-$*finitas, existe una única medida* π *sobre* $\Phi_Z = \Phi_X \times \Phi_Y$ *que verifica (1).*

Lema 1 $\mathcal{Z}_0$ *es un álgebra de subconjunto de* Φ_Z*. Todo conjunto en* $\mathcal{Z}_0$ *es expresable como unión finita de rectángulos disjuntos.*

dem: ejercicio □

Lema 2 *Sea* $A \times B$ *un rectángulo medible tal que* $A \times B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$*, siendo los* $A_j \times B_j$ *rectángulos medibles mutuamente disjuntos. Entonces*

$$\mu(A)\gamma(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\gamma(B_j)$$

dem: ejercicio □

Lema 3 *Sea* $E \subset \mathcal{Z}_0$ *y sean* $E = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \times B_j = \bigcup_{k=1}^{M} \tilde{A}_k \times \tilde{B}_k$ *dos descomposiciones de* E *como unión finita de rectángulos medibles disjuntos dos a dos. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)\gamma(B_j) = \sum_{k=1}^{M} \mu(\tilde{A}_k)\gamma(\tilde{B}_k)$$

dem: ejercicio □

Lema 4 *La función de conjunto* π_0 *definida sobre el álgebra* $\mathcal{Z}_0$ *poniendo* $\pi_0(E) = \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)\gamma(B_j)$ *donde* $E = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \times B_j$ *es cualquier descomposición de* E *como unión finita de rectángulos medibles, es una medida sobre la álgebra* $\mathcal{Z}_0$*, lo que significa que:*

i) $\pi_0(\emptyset) = 0$.

ii) $\pi_0(E) \geq 0, \ \forall E \in \mathcal{Z}_0$.

iii) Si $(E_n)_1^{\infty}$ *es una sucesión disjunta en* $\mathcal{Z}_0$ *tal que* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{Z}_0$*, entonces* $\pi_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_0(E_n)$*.*

dem: ejercicio □

dem: del teorema. ejercicio □

Definición 8 *Sean (X, Φ_X, μ) e (Y, Φ_Y, γ) espacios con medida σ-finitas. La medida π sobre la $\sigma-$álgebra $\Phi_Z = \Phi_X \times \Phi_Y$ dada por el teorema anterior se denomina* ***medida producto*** *de las medidas μ, γ y se indica $\pi = \mu \times \gamma$. El espacio (Z, Φ_Z, π) se denomina* ***espacio con medida producto*** *de los espacios (X, Φ_X, μ) e (Y, Φ_Y, γ).*

Nota 3 *Aunque las medidas μ y γ sean ambas completas la medida producto π no es en general completa. En efecto: sean (X, Φ_X, μ) e (Y, Φ_Y, γ) con μ, γ completas. Sea $A \in \Phi_X$ tal que $\mu(A) = 0$. Sea $B \subset Y, B \notin \Phi_Y$ Entonces $A \times B \notin \Phi_Z$ (lo justificaremos luego). Tenemos entonces $\underset{\notin \Phi_Z}{A \times B} \subset \underset{\in \Phi_Z}{A \times Y} \in \Phi_Z$ y $\pi(A \times Y) = \mu(A)\gamma(Y) = 0$ luego π no es completa.*

Proposición 20 *Sea (Z, Φ_Z, π) el espacio producto de los espacios (X, Φ_X, μ) y (Y, Φ_Y, γ) con μ y γ, $\sigma-$finitas. Sea Φ_Z^* la σ-álgebra de los conjuntos π^*-medibles (verifican CC) definidos en el teorema anterior. Entonces Φ_Z^* es la completación de la σ-álgebra Φ_Z con respecto a la medida π.*

dem: ejercicio □

Definición 9 *Llamaremos* ***medida producto completa*** *a la medida π^* definida sobre la σ-álgebra Φ_Z^*.*

Nota 4 ***La medida de Lebesgue en*** *R^n. Sea m_1 la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, sabemos que m_1 es σ-finita y completa, denominaremos medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ a la completación m_2 de la medida producto $m_1 \times m_1$. Para definir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ procedemos inductivamente con respecto a n. Supuesta conocida la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{n-1}$, definimos la medida m_n en $\mathbb{R}^n$ como la completación de $m_{n-1} \times m_1$.*

4.2. Secciones de conjuntos y funciones medibles en espacios producto.

Definición 10 *a) Sea $E \subset Z = X \times Y$. Para cada $x \in X$ se denomina $x-$**sección de** E al subconjunto de Y definido por $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$. Análogamente, para cada $y \in Y$ se denomina $y-$**sección de** E al subconjunto de X definido por $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$.*
*b) Sea f una función definida sobre Z, con valores en $\bar{\mathbb{R}}$ o en $\mathbb{C}$. Para cada $x \in X$ se denomina $x-$**sección de** f a la función*

$$\begin{array}{rcl} f_x & : & Y \to \bar{\mathbb{R}}\ (\mathbb{C}) \\ y & \to & f_x(y) = f(x, y) \end{array}$$

*Análogamente, para cada $y \in Y$ se denomina $y-$**sección de** f a la función*

$$\begin{array}{rcl} f^y & : & X \to \bar{\mathbb{R}}\ (\mathbb{C}) \\ x & \to & f^y(x) = f(x, y) \end{array}$$

Proposición 21 *Sean (X, Φ_X) e (Y, Φ_Y) espacios medibles y sea (Z, Φ_Z) el espacio medible producto. Entonces:*
a) Si $E \in \Phi_Z$ se tiene que $E_x \in \Phi_Y$ y $E^y \in \Phi_X$, $\forall x \in X, \forall y \in Y$.
b) Si $f : Z \to \bar{\mathbb{R}}$ (o $\mathbb{C}$) es Φ_Z-medible, resulta que $f_x : Y \to \bar{\mathbb{R}}\ (\mathbb{C})$ es Φ_Y-medible $\forall x \in X$ y $f_y : X \to \bar{\mathbb{R}}\ (\mathbb{C})$ es Φ_X-medible $\forall y \in Y$.

dem: a) Definimos $\tilde{\Phi}_Z$, la familia de subconjuntos de Φ_Z, como $\tilde{\Phi}_Z = \{E \in \Phi_Z : E_x \in \Phi_Y \ \forall x \in X\}$. Mostraremos que $\tilde{\Phi}_Z$ es una σ-álgebra que contiene a los rectángulos medibles. Probado esto, se tendrá que $\Phi_Z \subset \tilde{\Phi}_Z$, por ser Φ_Z la σ-álgebra generada por lo rectángulos medibles, luego $\tilde{\Phi}_Z = \Phi_Z$.

1º) $\tilde{\Phi}_Z$ contiene a los rectángulos medibles. Sean $A \in \Phi_X$ y $B \in \Phi_Y$ consideremos el rectángulo $A \times B$. Tenemos que para $x \in X$,

$$(A \times B)_x = \{y \in Y : (x, y) \in A \times B\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A \\ B & \text{si } x \in A \end{cases}$$

entonces $(A \times B)_x \in \Phi_Y$, luego $A \times B \in \tilde{\Phi}_Z$ en particular $\tilde{\Phi}_Z \neq \emptyset$.

2º) $\tilde{\Phi}_Z$ es σ-álgebra. $Z \in \tilde{\Phi}_Z$ pues para cada $x \in X$, $Z_x = Y \in \Phi_Y$.

Sea $E \in \tilde{\Phi}_Z$ veremos que $\mathcal{C}E \in \tilde{\Phi}_Z$. Sea $x \in X$, observemos que $(\mathcal{C}E)_x = \{y \in Y : (x, y) \in \mathcal{C}E\} = \{y \in Y : (x, y) \notin E\} = \mathcal{C}\{y \in Y : (x, y) \in E\} = \mathcal{C}E_x$, entonces $E \in \tilde{\Phi}_Z \Rightarrow E_x \in \Phi_Y \ \forall x \in X \underset{\Phi_Y\ \sigma-\text{alg}}{\Rightarrow} \mathcal{C}E_x \in \Phi_Y \ \forall x \in X \Rightarrow (\mathcal{C}E)_x \in \Phi_Y \ \forall x \Rightarrow \mathcal{C}E \in \tilde{\Phi}_Z$. Sean $(E_n)_1^\infty \subset \tilde{\Phi}_Z$ y sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ mostraremos que $E \in \tilde{\Phi}_Z$. Sea $x \in X$, $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} = \{y \in Y : (x, y) \in E_n \text{ para algún } n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{y \in Y : (x, y) \in E_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$. Ahora como $E_n \in \tilde{\Phi}_Z \ \forall n \Rightarrow (E_n)_x \in \Phi_Y \ \forall n \forall x \underset{\Phi_Y\ \sigma-\text{alg}}{\Rightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x \in \Phi_Y \ \forall x \Rightarrow E_x = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x \in \Phi_Y$ $\forall x \Rightarrow E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \tilde{\Phi}_Z$. Por lo tanto $\tilde{\Phi}_Z$ es σ-álgebra.

Análogamente se prueba que $E^y \in \Phi_X \ \forall y \in Y$.

b) Sea $f : Z \to \bar{\mathbb{R}}$ una función Φ_Z-medible. Sea $x \in X$ y sea $f_x : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $y \to f_x(y) = f(x, y)$, veamos que es Φ_Y-medible, lo que equivale a probar que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} \in \Phi_Y$. Tenemos $\{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} = \{y \in Y : f(x, y) > \alpha\} = (\underbrace{\{(x, y) \in Z : f(x, y) > \alpha\}}_{\in \Phi_Z \text{ pues } f \text{ es } \Phi_Z-\text{medible}})_x \in \Phi_Y$ por a). Análogamente se prueba que f^y es Φ_X-medible.

□

Observación 7 *Si f_x y f^y son medibles $\forall x \in X$ y $\forall y \in Y$ entonces f es medible.*

4.3. El Teorema de Fubini.

Teorema 6 *(Tonelli o "Fubinito"). Sea (Z, Φ_Z, π) el espacio producto de los espacios (X, Φ_X, μ) y (Y, Φ_Y, γ) con μ y γ, $\sigma-$finitas. Sea F una función medible no negativa definida sobre Z con valores en $\bar{\mathbb{R}}$, $\Phi_Z = \Phi_X \times \Phi_Y$-medible. Entonces las funciones definidas por*

$$f(x) = \int_Y F_x d\gamma \qquad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

son respectivamente Φ_X-medible e Φ_Y-medible y además

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\gamma$$

En otros símbolos

$$\int_X \left(\int_Y F(x, y) d\gamma(y)\right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} F(x, y) d\mu \times \gamma = \int_Y \left(\int_X F(x, y) d\mu(x)\right) d\gamma(y)$$

Lema 5 *(sobre clases monótonas) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ coincide con la clase monótona generada por $\mathcal{A}$.*

dem: ejercicio en práctica 3. □

Lema 6 *Sea (Z, Φ_Z, π) el espacio producto de los espacios (X, Φ_X, μ) y (Y, Φ_Y, γ) con μ y γ, $\sigma-$finitas. Sea $E \in \Phi_Z$, entonces la función $f(x) = \gamma(E_x)$ es Φ_X-medible y la función $g(y) = \mu(E^y)$ es Φ_Y-medible. Además*

$$\int_X f d\mu = \int_Y g d\gamma = \pi(E)$$

dem: ejercicio. □

dem: del teorema de Tonelli. Sea $Z = X \times Y$, $\Phi_Z = \Phi_X \times \mathcal{Y}$, $\pi = \mu \times \gamma$. Sea $F \in \mathcal{M}^+(Z, \Phi_Z)$ queremos ver que $f(x) = \int_Y F_x d\gamma$ es Φ_X-medible y que $g(y) = \int_X F^y d\mu$ es Φ_Y-medible y además

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\gamma$$

1º) Supongamos que $F = \chi_E$ con $E \in \Phi_Z$. Tenemos $f(x) = \int_Y F_x d\gamma = \int_Y (\chi_E)_x d\gamma \underset{(1)}{=} \int_Y \chi_{E_x} d\gamma = \gamma(E_x)$. Veamos que vale (1)

$$(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \notin E \\ 1 & \text{si } (x, y) \in E \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin E_x \\ 1 & \text{si } y \in E_x \end{cases} = \chi_{E_x}(y).$$

Análogamente resulta $g(y) = \mu(E^y)$. De acuerdo con el lema 6 las funciones f, g son Φ_X-medible y Φ_Y-medible respectivamente y vale

$$\int_X f d\mu = \int_Z \chi_E d\pi = \pi(E) = \int_Y g d\gamma$$

2º) Sea ahora F una función simple medible no negativa. Supongamos $F = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ con $a_k \geq 0$ y E_k disjuntos 2 a 2. Ponemos $F_k = \chi_{E_k}$ luego serán $F = \sum_{k=1}^{N} a_k F_k$. y $f_k(x) = \int_Y (F_k)_x d\gamma$, $g_k(y) = \int_X (F_k)^y d\mu$ resultan medibles, por el 1º caso, y vale

$$\int_X f_k d\mu = \pi(E_k) = \int_Y g_k d\gamma$$

Multiplicando por a_k y sumando hasta N obtenemos (linealidad)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} a_k \int_X f_k d\mu &= \sum_{k=1}^{N} a_k \pi(E_k) = \sum_{k=1}^{N} a_k \int_Y g_k d\gamma \\ \int_X \sum_{k=1}^{N} a_k f_k d\mu &= \int_Z F d\pi = \int_Y \sum_{k=1}^{N} a_k g_k d\gamma \qquad (2) \end{aligned}$$

Observemos que $\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \int_Y (F_k)_x d\gamma = \int_Y \sum_{k=1}^{N} a_k (F_k)_x d\gamma = \int_Y \sum_{k=1}^{N} a_k F_k(x, y) d\gamma = \int_Y (\sum_{k=1}^{N} a_k F_k)_x(y) d\gamma = \int_Y F_x d\gamma = f(x)$. Análogamente $\sum_{k=1}^{N} a_k g_k = \int_X F^y d\mu = g(y)$. Resulta así que f, g son medibles y volviendo (2) tenemos

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\gamma$$

3º) Caso general, sea $F \in \mathcal{M}^+(Z, \Phi_Z)$, existe una sucesión $(F_n)_1^\infty$ de funciones simples medibles, no negativas, monótona creciente que converge puntualmente a F. Para cada n, sean $f_n(x) = \int_Y (F_n)_x d\gamma$ y $g_n(y) = \int_X (F_n)^y d\mu$ que por 2º) caso resultan medibles y vale

$$\int_X f_n d\mu = \int_Z F_n d\pi = \int_Y g_n d\gamma \qquad (3)$$

Ahora, $F_n \nearrow F \Rightarrow (F_n)_x \nearrow F_x$ por monotonía de la integral (Beppo Levi) tenemos que $f_n(x) = \int_Y (F_n)_x d\gamma \nearrow \int_Y F_x d\gamma = f$, además f es Φ_X-medible por serlo cada f_n. Análogamente $g_n \nearrow g$ y g es Φ_Y-medible. Ahora tomando límites en (3) y aplicando Beppo-Levi tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_Z F_n d\pi = \lim_{n\to\infty} \int_Y g_n d\gamma$$

y entonces $\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\gamma$. □

Teorema 7 *(Fubini) Sea (Z, Φ_Z, π) el espacio producto de los espacios (X, Φ_X, μ) y (Y, Φ_Y, γ) con μ y γ, $\sigma-$finitas. Sea F una función definida sobre Z, a valores reales o complejos. Supongamos que F es integrable con respecto a la medida π. Entonces están bien definidas pctp las funciones*

$$f(x) = \int_Y F_x d\gamma \qquad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

y son integrables sobre (X, Φ_X, μ) e (Y, Φ_Y, γ) respectivamente y además

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\gamma$$

En otros símbolos

$$\int_X \left(\int_Y F(x,y) d\gamma(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} F(x,y) d\mu \times \gamma = \int_Y \left(\int_X F(x,y) d\mu(x) \right) d\gamma(y)$$

dem: Consideremos el caso F a valores $\mathbb{R}$, siendo F integrable serán también integrables F^+ y F^-, le aplicamos el teorema de Tonelli. Sean

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \int_Y F_x^+ d\gamma \qquad & g^+(y) = \int_X (F^+)^y \, d\mu \\ f^-(x) &= \int_Y F_x^- d\gamma \qquad & g^-(y) = \int_X (F^-)^y \, d\mu \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema de Tonelli, las funciones f^+, f^- son Φ_X-medibles y las funciones g^+, g^- son Φ_Y-medibles y además

$$\begin{aligned} \int_X f^+ d\mu &= \int_Z F^+ d\pi = \int_Y g^+ d\gamma \qquad (1) \\ \int_X f^- d\mu &= \int_Z F^- d\pi = \int_Y g^- d\gamma \qquad (2) \end{aligned}$$

Observemos que $\int_Z F^+ d\pi < \infty$ y $\int_Z F^- d\pi < \infty$. Notemos también que f^+, f^-, g^+, g^- son integrables en sus respectivos espacios (por la obs). Luego restando miembro a miembro entre (1) y (2) y aplicando linealidad de la integral para funciones integrables tenemos

$$\int_X (f^+ - f^-) d\mu = \int_Z (F^+ - F^-) d\pi = \int_Y (g^+ - g^-) d\gamma \qquad (3)$$

De (1) y (2) siendo F^+, F^- integrables resulta que f^+, f^-, g^+, g^- son finitas pctp en sus respectivos espacios. Ahora

$$\begin{aligned} f^+(x) - f^-(x) &= \int_Y (F_x^+ - F_x^-) d\gamma = \int_Y F_x d\gamma = f(x) \qquad (4) \\ g^+(y) - g^-(y) &= \int_Y ((F^+)^y - (F^-)^y) d\gamma = \int_X F^y d\mu = g(y) \qquad (5) \end{aligned}$$

De (4) y (5) sigue f, g son finitas pctp en X, Y respectivamente. Además de (3) resulta que, $f \in \mathcal{L}$, $g \in \mathcal{L}$ y además $\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\gamma$. □

Nota 5 *El teorema de Fubini sigue siendo válido cuando se considera el espacio* (Z, Φ_Z^*, π^*) *obtenido por completación del espacio* (Z, Φ_Z, π) *pero no lo demostraremos.*

§2. La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Derivación e integración.

5. La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Definición 11 *Llamaremos* ***integral de Lebesgue de*** f ***medible sobre*** $\mathbb{R}$ *a la integral de* f *con respecto a la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$*, que notaremos*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \quad o \quad \int f(x)dx$$

Si E es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$*, definimos en forma análoga la integral de Lebesgue sobre E de* f *como*

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx$$

En particular, si E es un intervalo $[a, b]$*, pondremos*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int f(x)\chi_{[a,b]}(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Nota 6 *La definición de integral de una función medible no negativa, como así también el concepto de función integrable, tanto para funciones a valores reales como para funciones a valores complejos, fueron dados en §1.*

5.1. Comparación de la integral de Lebesgue sobre un intervalo con la integral de Riemann.

Condición de integrabilidad de Riemann.

Sea f una función acotada definida sobre $[a, b]$. Para cada partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ sean $s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ y $S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ la suma inferior y superior de Riemann de f correspondientes a P, donde para cada k, $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ y $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$. La condición de integrabilidad de Riemann, establece que: La función f es integrable Riemann en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

En tal caso, las sumas $s(f, P)$ y $S(f, P)$ tienen por límite común (cuando la norma de la partición tiende a cero) la **integral de Riemann de** f **sobre** $[a, b]$. Esto es, siendo la norma de P, $||P|| = \max \Delta x_k$, se tiene

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} S(f, P) = \lim_{||P|| \to 0} s(f, P)$$

Teorema 8 *Si la función acotada* f *es integrable Riemann sobre* $[a, b]$*, entonces* f *es integrable Lebesgue sobre* $[a, b]$ *y además*

$$(\mathrm{L}) \int_a^b f(x)dx = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)dx$$

dem: Sea f integrable Riemann sobre $[a,b]$ entonces f^+, f^- son integrables Riemann sobre $[a,b]$ y

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f^+(x)dx - (R)\int_a^b f^-(x)dx$$

Si demostramos el teorema para funciones no negativas, tendríamos que f^+, f^- resultan integrables Lebesgue y valiendo para cada una

$$(L)\int_a^b f^+(x)dx = (R)\int_a^b f^+(x)dx \quad \text{y} \quad (L)\int_a^b f^-(x)dx = (R)\int_a^b f^-(x)dx$$

tendríamos que

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f^+(x)dx - (L)\int_a^b f^-(x)dx = (R)\int_a^b f^+(x)dx - (R)\int_a^b f^-(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

Sea entonces f integrable Riemann no negativa. Observemos que $s(f,P)$ y $S(f,P)$ son las integrales Lebesgue de la funciones escalonadas inferior y superior respectivamente:

$$E_i(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{I_k}(x) \qquad E_s(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_{I_k}(x)$$

siendo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Además

$$E_i \le f \le E_s \quad \forall x$$

salvo un número finito de puntos. Por lo tanto para cada k existen funciones escalonadas ϕ_k, Φ_k tales que $\phi_k \le f \le \Phi_k$ (2) y $\int_a^b (\Phi_k - \phi_k)dx < \frac{1}{k}$. Consideremos las funciones medibles g, h definidas por

$$g(x) = \sup_k \phi_k \qquad h(x) = \inf_k \Phi_k$$

Se verifica que

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

salvo tal vez sobre un conjunto numerable. Además, para cada k, $0 \le h(x) - g(x) \le \Phi_k(x) - \phi_k(x)$, de donde resulta $0 \le \int_a^b (h-g)dx \le \int_a^b (\Phi_k - \phi_k)dx < \frac{1}{k}$ por lo tanto

$\int_a^b (h-g)dx = 0$, puesto que $h - g \ge 0$, concluimos que $h - g = 0$ pctp y en consecuencia $g = f = h$ pctp, de donde f es medible. Por la monotonía de la integral Lebesgue y de Riemann sigue de (2) que

$$(L)\int_a^b \phi_k(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \Phi_k(x)dx \qquad (3)$$

$$(R)\int_a^b \phi_k(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \Phi_k(x)dx \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que para ϕ simple es, $(L)\int \phi = (R)\int \phi$, luego de (3) y (4) resulta

$$\left|(L)\int_a^b f(x)dx - (R)\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \Phi_k(x)dx - \int_a^b \phi_k(x)dx < \frac{1}{k} \quad \forall k$$

se concluye que $(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$. □

5.2. La integral de Lebesgue y las integrales impropias de Riemann.

Definición 12 *Sea f una función definida sobre $[a, +\infty)$, integrable Riemann sobre $[a, b]$ para cada $b > a$. Si existe y es finito $\lim\limits_{b\to+\infty} (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)dx$ diremos que la **integral impropia de Riemann** $(\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx$ es **convergente** y pondremos*

$$(\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)dx$$

*Si la integral impropia $(\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ es convergente diremos que $(\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx$ es **absolutamente convergente**.*

Nota 7 *Toda integral impropia absolutamente convergente es convergente y además*

$$\left|(\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leq (\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$$

Teorema 9 *Si la integral impropia de Riemann $(\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx$ es absolutamente convergente entonces f es integrable Lebesgue en $[a, +\infty)$ y además*

$$(\mathrm{L}) \int_a^{+\infty} f(x)dx = (\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

dem: Para cada n, definimos la función

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a \leq x \leq a+n \\ 0 & \text{si } x > a+n \end{cases}$$

Puesto que cada f_n es medible sobre $[a, +\infty)$ y además $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$, concluimos que f es medible sobre $[a, +\infty)$. Además f es integrable Riemann sobre $[a, a+n]$, para cada n, por teorema anterior será f integrable Lebesgue en $[a, a+n]$, siendo

$$(\mathrm{L}) \int_a^{a+n} f(x)dx = (\mathrm{R}) \int_a^{a+n} f(x)dx$$

Asimismo, resulta

$$(\mathrm{L}) \int_a^{a+n} \left|f(x)\right| dx = (\mathrm{R}) \int_a^{a+n} \left|f(x)\right| dx$$

Aplicando el teorema Beppo-Levi obtenemos

$$(\mathrm{L}) \int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^{a+n} \left|f(x)\right| dx = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{R}) \int_a^{a+n} \left|f(x)\right| dx = (\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx < \infty$$

pues $\int_a^{a+n} \left|f(x)\right| dx = \int \left|f(x)\right| \chi_{[a,a+n]} dx$ y $\left|f\right| \chi_{[a,a+n]} \to \left|f\right| \chi_{[a,+\infty)}$, además $\left|f\right| \chi_{[a,a+n]} \leq \left|f\right| \chi_{[a,a+n+1]}$.
De donde concluimos que f es integrable Lebesgue sobre $[a, +\infty)$ ($f \in \mathcal{L} \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}$).
Ahora, como $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ $\forall x \geq a$, siendo f integrable Lebesgue, podemos aplicar el teorema de Lebesgue o de la convergencia dominada y obtener

$$(\mathrm{L}) \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\mathrm{R}) \int_a^{a+n} f(x)dx = (\mathrm{R}) \int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \square$$

6. Derivación e integración.

Se han visto en los cursos de Cálculo los denominados teoremas fundamentales del cálculo, que establecen la relación que existe entre derivación e integración:

1) Si f en continua en $[a, b]$ entonces es integrable (R) en $[a, b]$ y la integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

2) Si F tiene derivada continua en $[a, b]$ entonces $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$ (esto es se puede reconstruir F a partir de su derivada).

Se plantean las siguientes preguntas:
¿seguirá valiendo 1) para funciones integrables Lebesgue? Si f continua en $[a, b]$ e integrable (L) entonces $\int_a^b f(x)dx$ es derivable? Cuál es la clase más amplia posible para la que vale 2)?

6.1. El teorema de Lebesgue sobre derivabilidad de funciones monótonas.

Teorema 10 *Toda función monótona en $[a, b]$ es medible y acotada y por tanto es integrable Lebesgue en $[a, b]$.*

dem: Supongamos f creciente, veamos que es medible.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $A_\alpha = \{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$. Si $\alpha > f(b)$, $A_\alpha = \emptyset \in \beta$. Si $\alpha \leq f(a)$, $A_\alpha = [a, b] \in \beta$. Sea $f(a) < \alpha \leq f(b)$, si existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \alpha$, $A_\alpha = (x, b] \in \beta$, si no existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \alpha$, sea $i = \inf \underbrace{\{x : f(x) > \alpha\}}_{\neq\emptyset \text{ pues esta } b}$, como $i \in [a, b]$ tenemos dos posibilidades, $A_\alpha = [i, b] \in \beta$ si $f(i) > \alpha$ o $A_\alpha = (i, b] \in \beta$ si no. En todos los casos resulta f medible. Además $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ en $[a, b]$ luego f es acotada. Por tanto f^+, f^- son acotadas, existen $M^+, M^- \geq 0$ tales que $f^+ \leq M^+$ y $f^- \leq M^-$

$$\begin{aligned} \int_a^b f^+dx &\leq \int_a^b M^+dx = M^+(b - a) < \infty \\ \int_a^b f^-dx &\leq \int_a^b M^-dx = M^-(b - a) < \infty \end{aligned}$$

luego f integrable Lebesgue. □

Teorema 11 *Una función monótona en $[a, b]$ puede tener solamente discontinuidades de 1º especie (salto finito). El conjunto de puntos de discontinuidades es a lo sumo numerable.*

dem: Supongamos f creciente y sea $x_0 \in [a, b]$. Si (x_n) es una sucesión creciente en $[a, b]$ y $x_n \to x_0$, la sucesión $(f(x_n))$ será creciente y acotada superiormente por $f(x_0)$ de donde existe $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, esto es válido cualquiera sea la sucesión (x_n) de donde existe $f(x_0^-)$ (límite por izquierda), análogamente existe $f(x_0^+)$ (límite por derecha). Ambos límites laterales son finitos pues f acotada. Una función monótona puede ser discontinua, pero si tiene discontinuidades son sólo de 1º especie.

Sea D el conjunto de puntos de discontinuidades de f. Para cada n, sea

$$D_n = \{x \in [a, b] : f(x^+) - f(x^-) > \tfrac{1}{n}\}$$

tendremos que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Puesto que la suma de todos los saltos está acotada por $f(b) - f(a)$, se concluye que cada D_n debe ser finito, por tanto D es a lo sumo numerable. □

Veremos el estudio de la derivabilidad de funciones monótonas.

Definición 13 *Sea f definida en un entorno de x_0. Llamaremos* ***derivada superior*** *y* ***derivada inferior de f por derecha en*** *x_0, a los números reales extendidos*

$$D^+f(x_0) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad D_+f(x_0) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

y llamaremos ***derivada superior*** *y* ***derivada inferior de f por izquierda en*** *x_0, a los números reales extendidos*

$$D^-f(x_0) = \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad D_-f(x_0) = \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Observación: *Es claro que $D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0)$ y $D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0)$. Si $D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0) \neq \pm\infty$, diremos que f* ***es derivable en*** *x_0 y llamaremos derivada de f en x_0 al valor común, que notamos $f'(x_0)$ y que coincide con $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.*

Si f está definida en un semientorno de x_0, tienen sentido solamente las derivadas obtenidas incrementando hacia el lado que permite el semientorno.

Definición 14 *Sea $\mathcal{I}$ una familia de intervalos. Diremos que $\mathcal{I}$* ***cubre a*** *E* ***en el sentido de Vitali*** *si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x \in E$ existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ y $l(I) < \varepsilon$.*

Lema 7 *(Vitali) Sea E un conjunto de medida exterior finita y sea $\mathcal{I}$ una familia de intervalos que cubre a E en el sentido de Vitali. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una colección finita disjunta $\{I_1, ..., I_N\} \subset \mathcal{I}$ tal que (m^* exterior de Lebesgue)*

$$m^*(E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) < \varepsilon$$

dem: no la vemos. □

Teorema 12 *(Lebesgue) Sea f una función creciente sobre $[a, b]$. Entonces f es derivable pctp en $[a, b]$. La derivada f' es medible y*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

dem: Comenzaremos demostrando que

$$D_-f(x) = D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) \quad \text{pctx}$$

Bastará probar que

$$D^+f(x) \leq D_+f(x) \quad \text{pctp en } [a, b] \tag{15}$$

En efecto, si tomamos $f^*(x)=-f(-x)$; f^* será también una función creciente (f^* es la reflexión respecto del origen).
Además,

$$D^+f^*(x) = D^-f(-x) \quad y \quad D_-f^*(x) = D_+f(-x) \tag{16}$$

De (15) aplicada a f y a f^*, y de (16), sigue que

$$D^+f(x) \leq D_+f(x) \leq D^-f(x) = D^+f^*(-x) \leq D_-f^*(-x) = D_+f(x) \leq D^+f(x)$$

De modo que resultará

$$D_{-}f(x) = D^{+}f(x) = D_{+}f(x) = D^{-}f(x) \quad \text{pctp en } [a,b]$$

Consideremos entonces el conjunto medible

$$E = \{x \in [a,b] : D^{+}f(x) > D_{-}f(x)\}$$

Mostraremos que $m(E) = 0$, o lo que es equivalente que $m^{*}(E) = 0$. Observemos que

$$E = \bigcup_{\substack{u,v \in \mathbb{Q} \\ u>v}} E_{u,v}$$

donde $E_{u,v}$=$\{x \in [a,b] : D^{+}f(x) > u > v > D_{-}f(x)\}$. Bastará probar que $m*(E_{u,v}) = 0$. Sea $s = m^{*}(E_{u,v})$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{O}$ un abierto tal que

$$E_{u,v} \subset \mathcal{O} \quad \text{y} \quad m(\mathcal{O}) < s + \varepsilon$$

Consideremos un punto cualquiera $x \in E_{u,v}$. Puesto que

$$D_{-}f(x) = \underline{\lim}_{h \to 0^{+}} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

tenemos que $\forall \sigma > 0, \exists h < \sigma$ tal que $[x-h, x] \subset \mathcal{O}$ y $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} < v$. Esto es, la familia de intervalos

$$\{[x-h, x] \subset \mathcal{O} : f(x) - f(x-h) < vh\}$$

es un cubrimiento de Vitali del conjunto $E_{u,v}$.
Veamos que, aplicando el Lema de Vitali, podemos elegir una colección finita disjunta $I_1, ..., I_N$ cuyos interiores cubren un subconjunto A de $E_{u,v}$ tal que

$$m^{*}(A) > s - \varepsilon$$

En efecto, de acuerdo con el Lema de Vitali, existe una colección finita disjunta $I_1, ..., I_N$ tal que

$$m^{*}(E_{u,v} - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) < \varepsilon$$

Sea $A = E_{u,v} \bigcap \bigcup_{n=1}^{N} I_n^{\circ}$. Tendremos entonces que

$$E_{u,v} = A \bigcup (E_{u,v} - \bigcup_{n=1}^{N} I_n^{\circ})$$

y por lo tanto

$$s = m^{*}(E_{u,v}) \leq m^{*}(A) + m^{*}(E_{u,v} - \bigcup_{n=1}^{N} I_n^{\circ}) < m^{*}(A) + \varepsilon$$

de donde resulta

$$m^{*}(A) > s - \varepsilon$$

Para cada intervalo, $I_n = [x_n - h_n, x_n]$ tenemos

$$f(x_n) - f(x_n - h_n) < v\, h_n \quad n = 1, ..., N$$

Sumando sobre estos intervalos, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) < v \sum_{n=1}^{N} h_n < v\, m(O) < v(s+\varepsilon)$$

Sea ahora un punto cualquiera $y \in A$. De la definición de A, tendremos que $y \in I_n$ para algún $n = 1, ..., N$ y además $D^+ f(y) > u$. En consecuencia, $\forall \sigma > 0, \exists k, 0 < k < \sigma$, tal que $[y, y+k] \subset I_n^\circ$ para algún $n = 1, ..., N$ y

$$f(y+k) - f(y) > u\, k.$$

La familia de intervalos

$$\mathcal{J} = \{[y, y+k] : f(y+k) - f(y) > u\, k\}$$

es un cubrimiento de Vitali del conjunto A. Usando otra vez el Lema de Vitali, podemos seleccionar una colección finita $\{J_1, ..., J_M\}$ de tales intervalos que cubren a un subconjunto B de A, tal que

$$m^*(B) > s - 2\varepsilon$$

Para cada intervalo $J_i = [y_i, y_i + k_i]$ tenemos

$$f(y_i + k_i) - f(y_i) > u\, k_i$$

y sumando sobre estos intervalos obtenemos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \sum_{i=1}^{M} k_i > u(s - 2\varepsilon)$$

Cada intervalo J_i está contenido en algún intervalo I_n, y si sumamos sobre aquellos para los cuales $J_i \subset I_n$, obtenemos

$$\sum_{i:J_i \subset I_n} (f(y_i + k_i) - f(y_i)) \leq (f(x_n) - f(x_n + h_n))$$

y en consecuencia,

$$u(s - 2\varepsilon) < v(s+\varepsilon)$$

Puesto que esto vale para cada $\varepsilon > 0$, se concluye que

$$u\, s \leq v\, s$$

Siendo $u > v$, sigue que $s = 0$, esto es que $m^*(E_{u,v}) = 0$, con lo que queda demostrado que $m^*(E) = 0$. Hemos mostrado así que existe el límite

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{pctp en } [a, b]$$

aunque podría eventualmente, ser $\pm\infty$. f será derivable en los puntos en que g sea finita.
Sea $g_n = n\, [f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$ para $x \in [a, b]$ donde hemos extendido $f(x) = f(b)$ para $x \geq b$. Cada g_n es medible y $g_n \to g$ pctp, de modo que g es medible. Además, puesto que f es creciente, resulta $g_n \geq 0$. Aplicando el Lema de Fatou, obtenemos

$$\int_a^b g(x)dx \leq \underline{\lim} \int_a^b g_n(x)dx = \underline{\lim}\, n \int_a^b [f(x + \tfrac{1}{n}) - f(x)]dx \tag{17}$$

Observemos que, por ser f creciente en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$, de modo que en (17) podemos ver la integral como integral de Riemann. Ahora,

$$n\int_a^b [f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)]dx = n\int_a^b f(x+\tfrac{1}{n})dx - n\int_a^b f(x)dx =$$

$$= n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n\int_a^b f(x)dx = n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \leq$$

$$\leq n\, f(b+\tfrac{1}{n})\tfrac{1}{n} - n\, f(a)\tfrac{1}{n} = f(b+\tfrac{1}{n}) - f(a)$$

Volviendo a (17), obtenemos

$$\int_a^b g(x)dx \leq \underline{\lim}(f(b+\tfrac{1}{n}) - f(a)) = f(b) - f(a)$$

Esto muestra que g es integrable y en consecuencia finita pctp, lo que prueba que f es derivable pctp y $f' = g$ pctp. □

6.2. Funciones de variación acotada.

Definición 15 *Sea f una función definida en $[a,b]$. Si existe una constante M tal que, cualquiera sea la partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ del $[a,b]$ resulta*

$$SVA_P = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

*diremos que f es una función de **variación acotada en** $[a,b]$ (VA). Si f es VA, llamaremos **variación total de** f **en** $[a,b]$ que notamos $V_f[a,b]$ al supremo de las SVA sobre todas las particiones de $[a,b]$, esto es*

$$\mathrm{V}_f[a,b] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

siendo $\mathcal{P}[a,b]$ la familia de todas las particiones del intervalo $[a,b]$. Resulta que $\mathrm{V}_f[a,b] \leq M$.

Teorema 13 *i) Si f es monótona en $[a,b]$ es VA en $[a,b]$ y $V_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$.*
ii) Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), siendo f' acotada, f es VA en $[a,b]$ y $V_f[a,b] \leq \sup_{[a,b]} |f'(x)|(b-a)$.
iii) Si f es VA en $[a,b]$, f es acotada en $[a,b]$.

dem: i) Supongamos f creciente, si $P \in \mathcal{P}[a,b]$, será $f(x_k) - f(x_{k-1}) > 0$, luego $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(b) - f(a) = M \geq 0$, como P es arbitraria se tiene que f es VA y $\mathrm{V}_f[a,b] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup(f(b) - f(a)) = f(b) - f(a)$. Si f fuese decreciente tendríamos $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} -f(x_k) + f(x_{k-1}) = f(a) - f(b) = M \geq 0$, luego $\mathrm{V}_f[a,b] = f(a) - f(b)$. Por lo tanto, f monótona es $\mathrm{V}_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$.
ii) f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), siendo f' acotada, existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$. Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$, para cada $k = 1, ..., n$ si aplicamos TVM tenemos $|f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f'(c_k)|\Delta x_k$ para algún $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, será $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f'(c_k)|\Delta x_k \leq$

$M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a) = M''$. Luego f es VA. Pero esto es válido para toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$, donde M es cota superior de $|f'(x)|$ en $[a,b]$, en particular para el $\sup_{[a,b]} |f'(x)|$ tendremos que

$$\mathrm{V}_f[a,b] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| : P \in \mathcal{P}[a,b]\} \leq \sup_{[a,b]} |f'(x)|(b-a)$$

iii) f es VA en $[a,b]$. Supongamos que f no es acotada en $[a,b]$, $\forall n$, existirá $x_n \in [a,b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Tomamos la $P = \{a, x_n, b\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces $|f(a)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(b)| = |f(x_n) - f(a)| + |f(x_n) - f(b)| \geq |2f(x_n) - (f(a) + f(b))|$. Sea n tal que $|f(a) + f(b)| < n$ (es posible pues $|f(a) + f(b)| < \infty$) pues f es VA. Luego

$$2|f(x_n)| - |f(a) + f(b)| > 2n - n = n$$

y esto contradice que f es VA, por tanto f es acotada. $\square$

Ejemplo 2 *La función f definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua pero no VA. En efecto sea $P = \{0, \{\frac{1}{2k} : k = 1, \ldots n\}, 1\}$ entonces $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\frac{(-1)^k}{2k} - \frac{(-1)^{k-1}}{2(k-1)}| = \sum_{k=1}^{n} |(-1)^k \frac{k-1+k}{2k(k-1)}|$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k(k-1)}$ diverge.

Teorema 14 *Sean f, g funciones VA en $[a,b]$ entonces:*

i) $f+g$, $f-g$ y fg son VA en $[a,b]$ y $\mathrm{V}_{f\pm g}[a,b] \leq \mathrm{V}_f[a,b]+\mathrm{V}_g[a,b]$, $\mathrm{V}_{fg}[a,b] \leq A\mathrm{V}_f[a,b]+B\mathrm{V}_g[a,b]$ siendo $A = \sup_{[a,b]} |g(x)|$ y $B = \sup_{[a,b]} |f(x)|$.

ii) Si $|f(x)| \geq m > 0$ $\forall x \in [a,b]$, $\dfrac{1}{f}$ es VA en $[a,b]$ y $\mathrm{V}_{\frac{1}{f}}[a,b] \leq \frac{1}{m^2}\mathrm{V}_f[a,b]$.

dem: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$, por ser f, g VA en $[a,b]$ existen M, N tales que $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$ y $\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq N$.

i) Tenemos que $\sum_{k=1}^{n} |(f \pm g)(x_k) - (f \pm g)(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) \pm g(x_k) - f(x_{k-1}) \mp g(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M + N$, luego $f \pm g$ es VA. Además

$$\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |(f \pm g)(x_k) - (f \pm g)(x_{k-1})| \leq \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

entonces $\mathrm{V}_{f\pm g}[a,b] \leq \mathrm{V}_f[a,b] + \mathrm{V}_g[a,b]$.
Para el producto fg, sean $A = \sup_{[a,b]} |g(x)|$ y $B = \sup_{[a,b]} |f(x)|$ que resultan finitos por ser f, g VA.

Tenemos $|(fg)(x_k)-(fg)(x_{k-1})| = |f(x_k)g(x_k)-f(x_k)g(x_{k-1})+f(x_k)g(x_{k-1})-f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq |f(x_k)||g(x_k)-g(x_{k-1})| + |g(x_{k-1})||f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq B|g(x_k)-g(x_{k-1})| + A|f(x_k)-f(x_{k-1})|$, luego sumando tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |(fg)(x_k) - (fg)(x_{k-1})| \leq BN + AM$$

es decir fg es VA, además tomando $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}[a,b]}$ tenemos

$$\mathrm{V}_{fg}[a,b] \leq A\mathrm{V}_f[a,b] + B\mathrm{V}_g[a,b]$$

ii) Ahora $|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}| = |\frac{f(x_{k-1})-f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})}| \leq \frac{1}{m^2}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ luego $\sum\limits_{k=1}^{n} |\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}| \leq \frac{1}{m^2}\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq \frac{M}{m^2}$, así $\frac{1}{f}$ es VA y además tomando $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}[a,b]}$ tenemos $\mathrm{V}_{\frac{1}{f}}[a,b] \leq \frac{1}{m^2}\mathrm{V}_f[a,b]$. □

Teorema 15 *Si f es VA en $[a,b]$ y $a < c < b$ entonces f es VA en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y $\mathrm{V}_f[a,b] = \mathrm{V}_f[a,c] + \mathrm{V}_f[c,b]$.*

dem: ejercicio de la prática. □

Teorema 16 *(**Caracterización de funciones de VA**) Sea f definida en $[a,b]$ a valores reales entonces f es VA en $[a,b]$ si y sólo si f es diferencia de dos funciones crecientes en $[a,b]$.*

dem: $\Rightarrow$) Sea f VA en $[a,b]$, definimos la función V en $[a,b]$ por

$$V(x) = \begin{cases} \mathrm{V}_f[a,x] & \text{si } a < x \leq b \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Observemos que está bien definida, mostraremos que V es creciente en $[a,b]$. Sean $a \leq x < y \leq b$. Si $x = a$ o $y = b$ es inmediato que $V(x) \leq V(y)$. Si $a < x < y < b$ por teorema anterior f es VA en $[a,x]$ y en $[x,y]$, siendo $\mathrm{V}_f[a,y] = \mathrm{V}_f[a,x] + \mathrm{V}_f[x,y]$ de donde $\mathrm{V}_f[a,x] \leq \mathrm{V}_f[a,y]$ es decir $V(x) \leq V(y)$. Veamos que también $g = V - f$ es creciente en $[a,b]$, pues $g(y)-g(x) = V(y)-f(y)-V(x)+f(x) = \mathrm{V}_f[a,y]-\mathrm{V}_f[a,x]-(f(y)-f(x)) \geq \mathrm{V}_f[x,y] - |f(y)-f(x)| \geq 0$, luego $f = V - g$ es diferencia de dos crecientes.
$\Leftarrow$) Trivial pues si $f = g - h$ con g,h crecientes, serán g,h de VA por teorema 13 y entonces f es VA por teorema 14. □

Corolario 4 *si f es VA en $[a,b]$ entonces f es derivable pctp en $[a,b]$.*

dem: Resulta inmediato por teorema 12 y 16. □

6.3. Derivada de una función integral.

Definición 16 *Sea f integrable sobre todo conjunto compacto de cierto intervalo I de $\mathbb{R}$. Si $a,b \in I$ ponemos $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dx$ si $a < b$ o $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f dx$ si $a > b$ y $\int_a^b f(x)dx = 0$ si $a = b$. Si además $x_0 \in I$, diremos que la función F_{x_0} definida sobre I por*

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

*es una **función integral de f**.*

Lema 8 *Sea $f \geq 0$ integrable sobre E entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset E$ con $m(A) < \delta$ resulta $\int_A f(x)dx < \varepsilon$.*

dem: ejercicio de la práctica. □

Teorema 17 *Si f integrable sobre $[a,b]$ entonces la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua de VA en $[a,b]$. En consecuencia, derivable pctp en $[a,b]$.*

dem: Por lema anterior sigue la continuidad, pues si $x_0 \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset [a,b]$, $m(A) < \delta$ es $\int_A \left|f(t)\right| dt < \varepsilon$ entonces si $|x - x_0| < \delta$ resultará $|F(x) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|dt < \varepsilon$, entonces F continua en cada x_0. Veamos que es VA, sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$, luego $\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt < \infty$, pues f integrable, entonces F es VA y $V_F[a,b] \leq \int_a^b |f(t)|dt$. □

Lema 9 *Si f integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^x f(t)dt = 0$ $\forall x \in [a,b]$ entonces $f = 0$ pctp en $[a,b]$.*

dem: ejercicio de la práctica. □

Teorema 18 *Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$ entonces $F'(x) = f(x)$ pctp en $[a,b]$.*

dem: De acuerdo con el teorema 17, F resulta derivale pctp de $[a,b]$. Para mostrar que $F'(x) = f(x)$ en $[a,b]$, descomponemos la prueba en dos casos:
1er. caso: Supondremos f acotada, esto es $\exists k$ tal que $|f(x)| \leq k \quad \forall x \in [a,b]$.
Consideramos la sucesión de funciones (f_n) definidas por:

$$f_n(x) = n\left(F(x + \tfrac{1}{n}) - F(x)\right) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

Entonces, cada f_n, resulta acotada

$$|f_n(x)| \leq k \quad \forall x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}$$

y $f_n \longrightarrow F'(x)$ pctp en $[a,b]$.
Fijemos $c \in [a,b]$ y apliquemos el teorema de la convergencia dominada sobre $[a,c]$. Obtenemos,

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^c f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} n \int_a^c (F(x + \tfrac{1}{n}) - F(x))dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^c F(x + \tfrac{1}{n})dx - \int_a^c F(x)dx\right) \tag{18}$$

Ahora, las integrales en (18) son integrales de Riemann, pues F es continua. Haciendo un cambio de variable en la primera integral, obtenemos:

$$\int_a^c F(x + \tfrac{1}{n})dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx$$

Por lo tanto,

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^c F(x)dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx\right) \tag{19}$$

Consideremos la función integral de F

$$\phi(x) = \int_a^x F(t)dt$$

Puesto que F es continua, del 1er. Teorema Fundamental de Cálculo para integrales de Riemann, sabemos que $\phi(x)$ es derivable en $[a,b]$, y que

$$\phi'(x) = F(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Además, el 2do. Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que:

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \phi(\beta) - \phi(\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in [a,b]$$

Ahora, podemos expresar (19) de la siguiente manera:

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim_{n\to+\infty} n\left[(\phi(c+\tfrac{1}{n}) - \phi(c)) - (\phi(a+\tfrac{1}{n}) - \phi(a))\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\phi(c+\tfrac{1}{n}) - \phi(c)\right) - \lim_{n\to+\infty} n\left(\phi(a+\tfrac{1}{n}) - \phi(a)\right) =$$

$$\phi'(c) - \phi'(a) = F(c) - F(a) = F(c) = \int_a^c f(x)dx$$

En consecuencia,

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))dx = 0$$

Esto vale cualquiera sea $c \in [a,b]$. Del lema 9 sigue entonces que $F'(x) = f(x)$ pctp en $[a,b]$

2do. caso: Sea f integrable en $[a,b]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $f \geq 0$. Definamos la sucesión (f_n) poniendo,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Tenemos así que $0 \leq f_n(x) \leq n \quad \forall x \in [a,b]$, (f_n) es una sucesión creciente, $f_n \leq f$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. Definamos

$$G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))dt$$

Puesto que $f - f_n \geq 0$, G_n es una función creciente de x y por lo tanto derivable pctp y su derivada debe ser no negativa. Ahora, por el 1er. caso, se tiene

$$\left(\int_a^x f_n(t)dt\right)' = f_n(x) \qquad \text{pctp en } [a,b]$$

Siendo

$$F(x) = G_n(x) + \int_a^x f_n(t)dt$$

tendremos

$$F'(x) = G_n'(x) + \left(\int_a^x f_n(t)dt\right)' = G_n'(x) + f_n(x) \qquad \text{pctp en } [a,b]$$

de donde

$$F'(x) \geq f_n(x) \qquad \text{pctp en } [a,b].$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, se obtiene

$$F'(x) \geq f(x) \qquad \text{pctp en } [a,b] \tag{20}$$

Integrando sobre $[a,b]$ sigue que

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a)$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema de Lebesgue

$$\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a)$$

Será entonces

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

de donde

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))dx = 0 \tag{21}$$

Además, de acuerdo con (20)

$$F'(x) - f(x) \geq 0 \quad \text{pctp en } [a,b] \tag{22}$$

De (21) y (22) se concluye que debe ser $F'(x) - f(x) = 0$ pctp en $[a,b]$; o sea $F'(x) = f(x)$ pctp en $[a,b]$. □

6.4. Funciones absolutamente continuas.

Reconstrucción de una función a partir de su derivada.

Definición 17 *Sea f una función a valores reales definida sobre el intervalo $[a,b]$. Diremos que f* ***es absolutamente continua en*** *$[a,b]$ AC si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda familia finita de intervalos $\{(x_k, x'_k)\}_{k=1}^n$ disjuntos dos a dos, contenidos en $[a,b]$ y tal que*

$$\sum_{k=1}^n (x'_k - x_k) < \delta \qquad \text{(A)}$$

resulta

$$\sum_{k=1}^n |f(x'_k) - f(x_k)| < \varepsilon \qquad \text{(B)}$$

Observación 8 *1) Si f es AC en $[a,b]$, f es continua en $[a,b]$ (de hecho uniformemente continua), pues si vale* (A) $\Rightarrow$ (B) *para toda familia finita, vale para la familia $\{(x,y)\}$ con $x, y \in [a,b]$ y resulta f uniformemente continua.*

2) Si f es lipschitziana en $[a,b]$, f es AC en $[a,b]$, pues dado $\varepsilon > 0$ y L (cte Lipschitz) será $\sum_{k=1}^n |f(x'_k) - f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^n L|x'_k - x_k| < L\delta = \varepsilon$ si consideramos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ y una familia que verifica (A).

Lema 10 *Si f es AC en $[a,b]$ entonces f es VA en $[a,b]$.*

dem: ejercicio de la práctica. □

Ejemplo 3 *La función f definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $[0,1]$ *pero no AC en* $[0,1]$*, pues vimos que no es VA.*

Corolario 5 *Si f es AC en $[a,b]$ entonces f es derivable pctp en $[a,b]$.*

Lema 11 *Si f es AC en $[a,b]$ y $f'(x) = 0$ pctp en $[a,b]$ entonces f es constante.*

dem: ejercicio de la práctica. □

Teorema 19 *Sea F una función definida en $[a,b]$. Entonces F es una función integral sii es AC en $[a,b]$.*

dem: $\Rightarrow$ Supongamos que F sea una función integral sobre $[a,b]$, esto es que existe una función f integrable en $[a,b]$, tal que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

Veamos que F es AC en $[a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo con el lema 8, existe $\delta > 0$ tal que $A \subset [a,b]$ y $m(A) < \delta$, resulta

$$\int_A |f|dx < \varepsilon$$

Consideremos cualquier familia finita disjunta de intervalos $\{I_k = [x_k, x'_k]\}_{k=1}^N$ en $[a,b]$, tal que

$$\sum_{k=1}^N (x'_k - x_k) < \delta.$$

Sea $A = \bigcup_{k=1}^N (x_k, x'_k)$. Tenemos así que $m(A) < \delta$ y, del lema 8 sigue que

$$\int_A |f|dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x'_k} |f(x)|dx < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^N |F(x'_k) - F(x_k)| = \sum_{k=1}^N \left| \int_{x_k}^{x'_k} f(t)dt \right| \le \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x'_k} |f(t)dt| < \varepsilon$$

Queda probado que F es AC en $[a,b]$.
$\Leftarrow$ Supongamos que F sea AC en $[a,b]$ y sea $F' = f$. Veremos que f es integrable sobre $[a,b]$ y que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \quad x \in [a,b]$$

F es diferencia de dos funciones crecientes en $[a,b]$, F_1 y F_2, o sea

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

Resultando

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x) \qquad \text{pctp en } [a,b].$$

Del Teorema de Lebesgue, sigue que

$$\int_a^b F_1'(x)dx \leq F_1(b) - F_1(a) \quad \text{y} \quad \int_a^b F_2'(x)dx \leq F_2(b) - F_2(a)$$

y por lo tanto,

$$\int_a^b |F'(x)|dx \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) < +\infty$$

lo que muestra que $f = F'$ es integrable en $[a,b]$.
Consideremos la función integral

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

G es AC en $[a,b]$, siendo $G'(x) = f(x)$ pctp en $[a,b]$. Por lo tanto es AC también la función $\psi = F - G$; siendo

$$\psi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pctp en $[a,b]$. De acuerdo con el lema 11, será

$$\psi \equiv cte \quad \text{en} \quad [a,b].$$

Resulta,

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$$

donde C es una constante. Puesto que $G(a) = 0$, resulta $C = F(a)$, y entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$. □

Corolario 6 *Toda función AC es función integral de su derivada.*

Parte VI

Los espacios de Lebesgue L^p.

§1. Breves nociones sobre análisis funcional.

1. Introducción al análisis funcional en espacios de Banach.

1.1. Espacios normados.

Definición 1 *Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una **norma** sobre X es una función*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \quad &: \quad X \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad \|x\| \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades, $\forall x, y \in X$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:
N1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ sii $x = 0 \in X$
N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
N3) $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$
*El par $(X, \|\cdot\|)$ constituye un **espacio normado**.*

Observación 1 *De N2 surge $\|0\| = 0$, por lo tanto en N1 basta pedir $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Definición 2 *Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una **seminorma** sobre X es una función*

$$\begin{aligned} p \quad &: \quad X \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad p(x) \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades, $\forall x, y \in X$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:
SN1) $p(x) \geq 0$
SN2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
SN3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Observación 2 *Si p es seminorma puede existir $x \neq 0$ tales que $p(x) = 0$. Si p es seminorma tal que $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ entonces p es norma. Toda norma es seminorma.*

Ejemplo 1 *Ejemplos de espacios normados y seminormados.*

1) $X = \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

*2) $X = \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, $\|x\|_2 = (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2)^{1/2}$ **norma euclídea**, $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, $\|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$.*

3) $X = \mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$, $\|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

4) $X = M_{m \times n}(\mathbb{K})$ sobre $\mathbb{K}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $\|A\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^p)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|$.

5) $X = C[a,b]$ sobre $\mathbb{K}$, $\left\|f\right\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$, $\left\|f\right\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < \infty$, $\left\|f\right\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

6) Espacio seminormado, $X = SC[a,b]$ sobre $\mathbb{K}$, funciones seccionalmente continuas, $\left\|f\right\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ es una seminorma pues $\left\|f\right\|_1 = 0 \not\Rightarrow f = 0$, siendo $\left\|f\right\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ salvo número finito de puntos de discontinuidad.

7) $N = \{f \in SC[a,b] : f(x) = 0$ salvo número finito de puntos$\} \underset{se}{\subset} SC[a,b]$. Relacionamos $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N$. Ponemos $SC[a,b] / \sim = \{[f] : f \in SC[a,b]\}$ en este espacio $\left\|f\right\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ es una norma.

1.2. Métrica inducida por una norma. Convergencia.

Proposición 1 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces la función*

$$\begin{array}{rcl} d & : & X \times X \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & d(x,y) = \left\|x - y\right\| \end{array}$$

*es una **métrica** sobre X, que llamaremos **métrica inducida por la norma** $\|\cdot\|$.*

Nota 1 *Un espacio normado se considerará un espacio métrico con la métrica inducida.*

Definición 3 *Se dice que (x_n) converge a $x \in (X, \|\cdot\|)$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

Lema 1 *Si (x_n) converge el límite es único, (todo espacio métrico es T_2).*

Proposición 2 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sean (x_n), (y_n) sucesiones en X, $(\lambda_n) \subset \mathbb{K}$, tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$ y $\lambda_n \to \lambda$. Entonces:*
i) continuidad de la norma: $\|x_n\| \to \|x\|$
ii) continuidad de la suma: $x_n + y_n \to x + y$
iii) continuidad del producto por escalar: $\lambda_n x_n \to \lambda x$

Definición 4 *Sea (x_n) una sucesión en $(X, \|\cdot\|)$ y sea $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Si $S_n \to S$ en X se dice que la **serie** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente y que S es su suma, escribimos $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, entonces será $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - S\right\| = 0$. Si la serie numérica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ es convergente, diremos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ es absolutamente convergente.*

1.3. Completitud. Espacio de Banach.

Definición 5 *Se dice que (x_n) en $(X, \|\cdot\|)$ es una **sucesión de Cauchy** sii $\ulcorner \forall \varepsilon > 0$ existe N_ε tal que si $n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon \lrcorner$ (CC).*

Observación 3 *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Definición 6 *Diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente. Un espacio normado completo se denomina **espacio de Banach**.*

Ejemplo 2 *1) $(\mathbb{R},|x|)$ es completo. 2) $(\mathbb{R}^n,\|x\|_p)$, $(\mathbb{R}^n,\|x\|_\infty)$, $(\mathbb{C}^n,\|x\|_p)$, $(\mathbb{C}^n,\|x\|_\infty)$ son completos.*

3) $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),\|A\|_p)$ es completo, $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),\|A\|_\infty)$ es completo?. 4) $C[a,b]$, $\left\|f\right\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$, una sucesión $(f_n)\to f$ según $\|\cdot\|_\infty$ sii $\left\|f_n-f\right\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|\to 0$ sii $\forall\varepsilon>0$ existe N_ε tal que $\max\limits_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon\ \forall n\geq N_\varepsilon$ sii $\forall\varepsilon>0$ existe N_ε tal que $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon\ \forall n\geq N_\varepsilon\ \forall t\in[a,b]$ sii hay convergencia uniforme.

Observación 4

$$\begin{array}{ccc} f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f & \Leftrightarrow & f_n \overset{cu}{\to} f \\ f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f & \Rightarrow & f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f \\ f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f & \not\Rightarrow & f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f \end{array}$$

Pues $\left\|f_n-f\right\|_1 = \int_a^b|f_n(t)-f(t)|dt \leq \left\|f_n-f\right\|_\infty(b-a)\to 0$. Considerar la sucesión de triángulos con picos de altura 1 en $\frac{1}{2^n}$, $f_n\to 0$ puntualmente pero no uniformemente.

Teorema 1 *$(X,\|\cdot\|)$ es completo sii toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Aplicación: $(M_n(\mathbb{C}),\|A\|_1)$ es completo. Consideramos $x' = Ax$, la solución $x(t) = e^{At}$ donde $e^A = I+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$. Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\|A^k\|_1}{k!} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\|A\|_1^k}{k!} \leq e^{\|A\|_1} < \infty$, luego $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\|A^k\|_1}{k!}$ (C) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ (C) absolutamente.

1.4. Subespacios. Densidad. Sistemas completos.

Definición 7 *Sea $(X,\|\cdot\|)$ y sea $Y \underset{se}{\subset} X$ entonces $(Y,\|\cdot\|)$ es un* ***subespacio normado****. Diremos que Y es* ***subespacio cerrado*** *si lo es como subconjunto de $(X,\|\cdot\|)$ en la topología métrica inducida por la norma.*

Proposición 3 *Si Y es subespacio de $(X,\|\cdot\|)$ entonces $\bar{Y}$ es subespacio cerrado de $(X,\|\cdot\|)$.*

Definición 8 *Diremos que D en $(X,\|\cdot\|)$ es* ***denso*** *en X sii $\bar{D} = X$.*

Definición 9 *Diremos que S en $(X,\|\cdot\|)$ es un* ***sistema completo*** *si la cápsula lineal de S es densa en X, es decir $\overline{L(S)} = X$.*

Teorema 2 *(Weierstrass) Sea $f\in C[a,b]$ entonces $\forall\varepsilon>0$ existe $p\in P[a,b]$ (polinomio) tal que $\max\limits_{[a,b]}|p(x)-f(x)|<\varepsilon$.*

Ejemplo 3 *1) $P[a,b]$ (polinomios) es denso en $C[a,b]$ con $\|\cdot\|_\infty$. 2) En $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ el conjunto $S=\{1,x,x^2,...,x^n,..\}$ es un sistema completo.*

1.5. Transformaciones lineales.

Definición 10 *Sean X e Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, se dice que una aplicación $T : X \to Y$ es una **transformación lineal** sii $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ y $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x_1, x_2 \in X$. Si $Y = \mathbb{K}$, la transformación lineal se llama **funcional lineal**.*

Proposición 4 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $T : X \to Y$ lineal entonces son equivalentes:*
i) T continua
ii) T continua en $x = 0$.
iii) Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X$ $\forall x \in X$.

Proposición 5 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $T : X \to Y$ lineal y continua. Entonces*

$$\operatorname{ínf}\{k \geq 0 : \|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X \ \forall x \in X\} = \sup\{\tfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \neq 0\} = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X = 1\}$$

Definición 11 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $T : X \to Y$ lineal y continua. Llamaremos **norma de** T al número $\|T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|_Y = \operatorname{ínf}\{k \geq 0 : \|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X \ \forall x \in X\}$.*

Observación 5 *1) $\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$ $\forall x \in X$. 2) $\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X$ $\forall x \in X \Rightarrow \|T\| \leq k$.*

Ejemplo 4 *1) X espacio vectorial, $\dim X = n$, $B_X = \{v_1, ..., v_n\}$, Y espacio vectorial, $\dim Y = m$, $B_Y = \{w_1, ..., w_m\}$, toda $T : X \to Y$ lineal es continua.*

2) $X = Y = C[a, b]$, $k(x, y) \in C([a, b] \times [a.b])$, para cada $f \in C[a, b]$ definimos $Tf(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$, T está bien definida pues $k(x, y) f(y)$ es continua en y y por tanto integrable en $[a, b]$. Además $Tf \in C[a, b]$ y lineal y como

$$\left|Tf(x)\right| \leq \int_a^b \left|k(x, y)\right| \left|f(y)\right| dy$$

será T continua con respecto a las normas definidas en $C[a, b]$, en efecto

$$\begin{aligned}
\left\|Tf\right\|_1 = \int_a^b \left|Tf(x)\right| dx &\leq \int_a^b \int_a^b \left|k(x, y)\right| \left|f(y)\right| dy dx = \int_a^b \int_a^b \left|k(x, y)\right| \left|f(y)\right| dx dy \\
&= \int_a^b (\int_a^b \left|k(x, y)\right| dx) \left|f(y)\right| dy \\
&\leq K \int_a^b (\int_a^b 1 dx) \left|f(y)\right| dy = K(b - a) \int_a^b \left|f(y)\right| dy = K(b - a) \left\|f\right\|_1
\end{aligned}$$

Proposición 6 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $L(X, Y) = \{\ T : X \to Y$ lineales y continuas$\}$. Entonces $(L(X; Y), \|T\|)$ es un espacio normado.*

Definición 12 *Se dice que $(T_n) \subset L(X, Y)$ es uniformemente convergente si existe $T \in L(X, Y)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. En tal caso decimos $T_n \overset{cu}{\to} T$. Observemos que si $T_n \overset{cu}{\to} T$ entonces $T_n(x) \to T(x)$ en Y $\forall x \in X$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\|_Y = 0$.*

Teorema 3 *Si $(X, \|\cdot\|_X)$ normado y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ de Banach entonces $(L(X; Y), \|T\|)$ es de Banach. En particular el dual de X, $X' = L(X, \mathbb{K})$ es de Banach.*

1.6. Álgebra de Banach.

Definición 13 *Si* $(X, \|\cdot\|_X)$ *es de Banach sobre el que está definido un producto*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x,y) & \to & xy \end{array}$$

tal que:
i) X con la suma, producto por escalar y producto es un álgebra (no necesariamente con unidad)
ii) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ *(continuidad del producto)*
Diremos que X es un ***álgebra de Banach****.*

Ejemplo 5 *1)* $(M_n(\mathbb{K}), \|A\|_1)$*, con AB producto habitual de matrices, es un álgebra de Banach.*

2) X espacio métrico compacto, $C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ continua}\}$*,* $\|f\|_\infty$*,* $fg(x) = f(x)g(x)$*, entonces* $C(X)$ *es álgebra de Banach con unidad* $f = 1$*.*

3) $(X, \|\cdot\|_X)$ *de Banach.* $L(X) = L(X,X)$*,* $ST = S \circ T$*,* $L(X)$ *es álgebra de Banach con unidad* $T = I$*. Además* $\|S \circ T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|S(T(x))\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x \neq 0} \|S\| \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|S\| \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|S\| \; \|T\|$*.*

§2. Los espacios de Lebesgue L^p. Convoluciones.

2. Los espacios de Lebesgue.

2.1. El espacio $L^1(X, \Phi, \mu)$.

Definición 14 *Sea* (X, Φ, μ) *un espacio con medida y sea* $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ *el espacio de funciones integrables sobre* (X, Φ, μ)*. Si* $f \in \mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ *definimos*

$$N_1(f) = \int_X |f(x)| d\mu$$

Lema 2 $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ *es un espacio vectorial y* N_1 *es una seminorma sobre* $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$*. Además* $N_1(f) = 0$ *sii* $f(x) = 0$ $\mu-$*pctp en X.*

dem: Por las propiedades de las funciones integrables es claro que $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ es un espacio vectorial. Veamos que N_1 es una seminorma, sean $f, g \in \mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:
SN1) $|f(x)| \geq 0 \Rightarrow \int |f(x)| d\mu \geq 0 \Rightarrow N_1(f) \geq 0$
SN2) $\lambda f \in \mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f$ entonces $N_1(\lambda f) = \int |\lambda f(x)| d\mu = |\lambda| \int |f(x)| d\mu = |\lambda| N_1(f)$.
SN3) $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$, luego $N_1(f+g) = \int |f(x)+g(x)| d\mu \leq \int (|f(x)|+|g(x)|) d\mu = \int |f(x)| d\mu + \int |g(x)| d\mu = N_1(f) + N_1(g)$.
Por lo tanto N_1 es seminorma y además $N_1(f) = \int_X |f(x)| d\mu = 0$ sii $f = 0$ μ-pctp. □

Lema 3 **(Def)** *La relación* $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ*-pctp en X es de equivalencia en el espacio* $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu)$*. Definimos* $L^1(X, \Phi, \mu)$ *como el* ***espacio cociente*** $\mathcal{L}(X, \Phi, \mu) / \sim$*, esto es, el espacio de las clases de equivalencia* $[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \Phi, \mu) : f \sim g\}$*. Así*

$$L^1(X, \Phi, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}(X, \Phi, \mu)\}$$

La función

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_1 & : & L^1(X,\Phi,\mu) \to \mathbb{R} \\ [f] & \to & \left\|[f]\right\|_1 = N_1(f) \end{array}$$

donde f es un representante cualquiera de la clase $[f]$, resulta una norma sobre $L^1(X,\Phi,\mu)$.

dem: 1º) Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Sean f, g, h :
i) $f = f\ \forall x \Rightarrow f \sim f$
ii) $f \sim g \Rightarrow f = g$ μ-pctp$\Rightarrow g = f$ μ-pctp$\Rightarrow g \sim f$
iii) $f \sim g$ y $g \sim h \Rightarrow f = g$ μ-pctp$\Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in CN_1$ con $\mu(N_1) = 0$ y $g = h$ μ-pctp$\Rightarrow g(x) = h(x)\ \forall x \in CN_2$ con $\mu(N_2) = 0 \Rightarrow f(x) = h(x)\ \forall x \in CN_1 \cap CN_2$ y como $CN_1 \cap CN_2 = C(N_1 \cup N_2)$ con $\mu(N_1 \underset{\in\Phi}{\cup} N_2) \leq \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0 \Rightarrow f = h$ μ-pctp$\Rightarrow f \sim h$.
2º) Veamos que $\|\cdot\|_1$ es una norma. Está bien definida pues sean f, g tales que $[f] = [g] \Rightarrow f = g$ μ-pctp$\Rightarrow |f| = |g|$ μ-pctp$\Rightarrow \left\|[f]\right\|_1 = N_1(f) = N_1(g) = \left\|[g]\right\|_1$. Además como vimos en lema anterior N_1 es seminorma, sólo falta ver $\left\|[f]\right\|_1 = N_1(f) = 0 \Rightarrow |f| = 0$ μ-pctp$\Rightarrow [f] = [0]$ □

Nota 2 *En adelante indicaremos con f a $[f]$, y entonces pondremos $\left\|f\right\|_1$ en lugar de $\left\|[f]\right\|_1$.*

Teorema 4 *$(L^1(X,\Phi,\mu), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.*

dem: la veremos luego, como caso particular de uno más general. □

Ejemplo 6 *1) $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ con $m = dx$, $L^1(\mathbb{R}, dx)$, $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, $L^1(\Omega, dx)$ con Ω abierto de $\mathbb{R}^n$.*

2) $l^1(\mathbb{R}) = \{\xi = (x_n)_1^\infty : \sum_1^\infty |x_n| < \infty\}$, $L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_p)$ con μ_p cuenta puntos. $\int_{\mathbb{N}} \xi d\mu_p = \sum_1^\infty x_k$, $\|\xi\|_1 = \int_{\mathbb{N}} |\xi| d\mu_p = \sum_1^\infty |x_k|$. El espacio $(l^1, \|\cdot\|_1)$ es separable. En efecto, $D = \{\sum_1^n x_k : x_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ combinaciones lineales finitas de racionales, es obviamente numerable, $D \subset l^1$ y es denso, pues si $\xi \in l^1(\mathbb{R})$ es $\xi = (x_n)$ con $\sum_1^\infty |x_k| = s < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, existe N tal que $|\sum_1^N |x_k| - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\sum_{N+1}^\infty |x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$ para cada x_n existe q_n tal que $|x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2N}$ $\forall n = 1, .., N$. Sea $q = \sum_1^N q_k \in D$. Entonces $\|\xi - q\|_1 = \sum_1^\infty |x_k - q_k| = \sum_1^N |x_k - q_k| + \sum_{N+1}^\infty |x_k| < \sum_1^N \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2.2. Los espacios $L^p(X,\Phi,\mu)$ con $1 \leq p < \infty$.

Definición 15 *Sea (X,Φ,μ) un espacio con medida y sea $1 \leq p < \infty$, indicaremos con $\mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)$ el espacio de funciones $\Phi-$medibles f tales que $|f(x)|^p \in \mathcal{L}^1$, es decir*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty$$

Si $f \in \mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)$ definimos

$$N_p(f) = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Nota 3 *El caso* $p = 1$*, ya lo vimos, resultando* $\mathcal{L}^1(X, \Phi, \mu)$ *un espacio vectorial y* N_1 *es una seminorma sobre* $\mathcal{L}^1(X, \Phi, \mu)$*. Luego pasamos al cociente. Veremos (luego en lema 6) que* $\mathcal{L}^p(X, \Phi, \mu)$ *es espacio vectorial y* N_p *una seminorma para* $1 < p < \infty$*.*

Definición 16 *Dos números reales* p, q *tales que* $1 < p, q < \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *se denominan* ***índices conjugados*** *o simplemente* ***conjugados****.*

Lema 4 *(Desigualdad de Hölder) Si* p, q *conjugados y* $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \Phi, \mu)$*, vale la siguiente* ***desigualdad de Hölder***

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$$

dem: Sean $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \Phi, \mu)$, ponemos $A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \geq 0$ y $B = \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q} \geq 0$. Si $A = 0$ resultaría $\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-pctp$\Rightarrow fg = 0$ μ-pctp$\Rightarrow \int_X fg d\mu = 0$, entonces vale la desigualdad. Análogamente si $B = 0$. Si $A = \infty$ o $B = \infty$ también vale. Supongamos entonces $0 < A < \infty$ y $0 < B < \infty$. Definimos $F = \frac{f}{A}$ y $G = \frac{g}{B}$. Observemos que

$$\left(\int_X F^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_X \frac{f^p}{A^p} d\mu\right)^{1/p} = \frac{1}{A}\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} = 1 \qquad \text{y} \qquad \left(\int_X G^q d\mu\right)^{1/q} = 1$$

Sea $x \in X$ tal que $0 < f(x) < \infty$ y $0 < g(x) < \infty$ (1). Esto vale μ-pctp. También resultan en esos x, $0 < F(x) < \infty$ y $0 < G(x) < \infty$. Existen $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = e^{\frac{s(x)}{p}}$, $G(x) = e^{\frac{t(x)}{q}}$ (siendo $s(x) = p \ln F(x)$ y $t(x) = q \ln G(x)$). Luego, como la exponencial es convexa, será

$$F(x)G(x) = e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p}e^s + \frac{1}{q}e^t \qquad (2)$$

tenemos

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q \qquad (3)$$

Integrando

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces $\int_X FG d\mu \leq 1 \Rightarrow \int_X \frac{f}{A}\frac{g}{B} d\mu \leq 1$ luego $\int_X fg d\mu \leq AB = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$.□

Nota 4 *Para* $p = q = 2$ *la desigualdad de Hölder se denomina* ***desigualdad de Schwarz***

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X g^2 d\mu\right)^{1/2}$$

Lema 5 *(Desigualdad de Minkowski) Si* $1 < p < \infty$ *y* $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \Phi, \mu)$ *vale la* ***desigualdad de Minkowski***

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$$

dem: Si $\int_X (f+g)^p d\mu = 0$ el resultado es trivial. Si $\int_X f^p d\mu = +\infty$ o $\int_X g^p d\mu = +\infty$ también es trivial. Suponemos $\int_X f^p d\mu < \infty$, $\int_X g^p d\mu < \infty$ y $\int_X (f+g)^p d\mu > 0$, Tenemos

$$(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

luego
$$\int_X (f+g)^p d\mu = \int_X f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \qquad (A)$$
Observemos que si q es tal que $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1 \Rightarrow pq = p+q \Rightarrow q(p-1)=p$, aplicamos Hölder en (A) y obtenemos
$$\leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{1/q} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{1/q}$$
luego
$$\begin{aligned}\int_X (f+g)^p d\mu &\leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/q} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_X (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/q}\left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right)\end{aligned}$$
pero como $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ tenemos $\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$. □

Lema 6 (Def) *Si* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ *es una seminorma sobre* $\mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)$. *Además* $N_p(f)=0 \Leftrightarrow f=0$ *μ-pctp. Se denomina espacio de Lebesgue* $L^p(X,\Phi,\mu)$ *al **espacio cociente*** $\mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)/\sim$ *donde* $f\sim g \Leftrightarrow f=g$ *μ-pctp. La función*
$$\begin{aligned}\|\cdot\|_p \quad &: \quad L^p(X,\Phi,\mu) \to \mathbb{R}\\ [f] \quad &\to \quad \big\|[f]\big\|_p = N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}\end{aligned}$$
es una norma sobre $L^p(X,\Phi,\mu)$.

dem: Para ver que $\mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)$ es un espacio vectorial, observemos que para $f,g\in\mathcal{L}^p$ es $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ y $\int_X |g|^p d\mu < \infty$, entonces $(\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ y $(\int_X |g|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ por la desigualdad de Minkowski es $\int_X |f+g|^p d\mu < \infty$ entonces $f+g\in\mathcal{L}^p$. Por las propiedades de la integrales resulta $\mathcal{L}^p(X,\Phi,\mu)$ un espacio vectorial. Veamos que N_p es seminorma.
SN1) $|f(x)| \geq 0\ \forall x \Rightarrow N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \geq 0\ \forall f\in\mathcal{L}^p$
SN2) $f\in\mathcal{L}^p$ y $\alpha\in\mathbb{K}$, $N_p(\alpha f) = \left(\int_X |\alpha f|^p d\mu\right)^{1/p} = |\alpha| N_p(f)$
SN3) La desigualdad de Minkowski es $N_p(f+g)\leq N_p(f)+N_p(g)$.
Ahora si ponemos $L^p = \mathcal{L}^p/\sim$ veamos que $\big\|[f]\big\|_p = N_p(f)$ es una norma, es decir, si $\big\|[f]\big\|_p = N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \Rightarrow |f|^p = 0$ μ-pctp$\Rightarrow f=0$ μ-pctp, o sea $[f]=[0]$. □

Nota 5 *En adelante pondremos f en lugar de $[f]$ y* $\|f\|_p = \big\|[f]\big\|_p$.

Teorema 5 $(L^p(X,\Phi,\mu), \|\cdot\|_p)$ *para* $1\leq p<\infty$ *es un espacio de Banach.*

dem: Para ver que $(L^p(X,\Phi,\mu), \|\cdot\|_p)$ es de Banach bastará probar que toda serie absolutamente convergente en L^p es convergente. Sea $\sum_1^\infty f_n$ con $f_n\in L^p$ tal que $\sum_1^\infty \|f_n\|_p < \infty$, mostraremos que existe $S\in L^p$ tal que $S=\sum_1^\infty f_n$ o sea $\lim_{n\to\infty}\|S_n - S\|_p = 0$ siendo $S_n = \sum_1^n f_k$.

Sea $g = \sum_1^\infty |f_n|$, g es medible y no negativa, tenemos para cada n, por desigualdad Minkowski

$$\left(\int_X (\sum_1^n |f_k|)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \sum_1^n \left(\int_X |f_k|^p d\mu\right)^{1/p} = \sum_1^n \left\|f_k\right\|_p \leq \sum_1^\infty \left\|f_n\right\|_p < \infty$$

Aplicando el lema de Fatou

$$\int_X \lim_{n\to\infty} (\sum_1^n |f_k|)^p d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X (\sum_1^n |f_k|)^p d\mu \leq (\sum_1^\infty \left\|f_n\right\|_p)^p < \infty$$

O sea

$$\int_X g^p d\mu = \int_X (\sum_1^\infty |f_n|)^p d\mu \leq (\sum_1^\infty \left\|f_n\right\|_p)^p < \infty$$

esto es, $g \in L^p$ en particular g es finita μ-pctp, luego la serie $\sum_1^\infty |f_n(x)|$ converge μ-pctp luego $\sum_1^\infty f_n(x)$ converge μ-pctp. Sea $S(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$. Mostraremos que $S \in L^p$ y $\sum_1^\infty f_n$ converge a S en norma L^p. Ahora, $|S(x)| \leq \sum_1^\infty |f_n(x)| = g(x) \in L^p$. Luego $|S(x)|^p \leq g(x)^p \in L^1 \Rightarrow S \in L^p$. Además

$$||S_n - S||_p^p = \int_X |S_n(x) - S(x)|^p d\mu$$

pero $|S_n(x) - S(x)|^p \leq (|S_n(x)| + |S(x)|)^p \leq 2^p g^p \in L^1$, tomamos límite y aplicando teorema de convergencia dominada (Lebesgue) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n - S||_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_X |S_n(x) - S(x)|^p d\mu = \int_X \underbrace{\lim_{n\to\infty} |S_n(x) - S(x)|^p}_{=0} d\mu = 0$$

queda probado que $\sum_1^\infty f_n(x)$ converge a $S(x)$ en norma L^p. Entonces L^p es completo. □

2.3. El espacio $L^\infty(X, \Phi, \mu)$.

Definición 17 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida. Diremos que una función Φ medible f es* ***esencialmente acotada*** *sii existe una constante M tal que $\mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0$, en cuyo caso diremos que M es una* ***cota esencial de*** *f. Definimos $\mathcal{L}^\infty(X, \Phi, \mu)$ al espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas y para cada $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \Phi, \mu)$ la función $N_\infty(f) = \operatorname{supes}|f| = \inf\{M : \mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0\}$.*

Proposición 7 *$\mathcal{L}^\infty(X, \Phi, \mu)$ es un espacio vectorial y $N_\infty(f)$ es una seminorma sobre $\mathcal{L}^\infty(X, \Phi, \mu)$, siendo $N_\infty(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-pctp.*

dem: ejercicio. □

Definición 18 *Definimos el espacio $L^\infty(X, \Phi, \mu)$ como el* ***espacio cociente*** *$\mathcal{L}^\infty(X, \Phi, \mu)/\sim$. Indicaremos con $[f]$ la clase de f, esto es $[f] = \{g \in \mathcal{L}^\infty : f = g$ μ-pctp$\}$, convendremos en escribir f en lugar de $[f]$.*

Teorema 6 *$L^\infty(X, \Phi, \mu)$ es un espacio vectorial, la función*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty & : & L^\infty(X,\Phi,\mu) \to \mathbb{R} \\ f & \to & \left\|f\right\|_\infty = N_\infty(f) = \operatorname{supes}|f| \end{array}$$

es una norma sobre $L^\infty(X, \Phi, \mu)$. El espacio normado $(L^\infty(X, \Phi, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach.

$N_\infty(f)$ resulta una cota esencial de f i.e. $|f| \leq \left\|f\right\|_\infty$, μ-pctp.

dem: Para ver que $(L^\infty(X, \Phi, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach bastará probar que toda serie absolutamente convergente en L^∞ es convergente. Sea $\sum\limits_1^\infty f_n$ con $f_n \in L^\infty$ tal que $\sum\limits_1^\infty \left\|f_n\right\|_\infty < \infty$, mostraremos que existe $S \in L^\infty$ tal que $S = \sum\limits_1^\infty f_n$ o sea $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$ siendo $S_n = \sum\limits_1^n f_k$. Para cada k, tenemos $\mu\{x \in X : |f_k(x)| > \left\|f_k\right\|_\infty\} = 0$, pues $f_k \in L^\infty$, llamamos $N_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \left\|f_k\right\|_\infty\}$ y $N = \bigcup\limits_{k=1}^\infty N_k$, $N \in \Phi$, $\mu(N) = 0$ y $CN = \bigcap\limits_{k=1}^\infty CN_k$. Si $x \in CN \Rightarrow x \in CN_k$ $\forall k$ y por tanto será $|f_k(x)| \leq \left\|f_k\right\|_\infty$ $\forall k$ (1). Puesto que $\sum\limits_1^\infty \left\|f_n\right\|_\infty < \infty$ será $\sum\limits_1^\infty |f_n(x)| < \infty$ $\forall x \in CN$. Sigue que la serie $\sum\limits_1^\infty f_n(x) < \infty$ $\forall x \in CN$. Definimos la función (medible)

$$S(x) = \begin{cases} \sum\limits_1^\infty f_n(x) & \text{si } x \in CN \\ 0 & \text{si } x \in N \end{cases}$$

Así, si $x \in CN$, $|S(x)| \leq \sum\limits_1^\infty |f_n(x)| \leq \sum\limits_1^\infty \left\|f_n\right\|_\infty < \infty$ o sea $\{x \in X : |S(x)| > \sum\limits_1^\infty \left\|f_n\right\|_\infty\} \subset N \Rightarrow \mu\{x \in X : |S(x)| > \sum\limits_1^\infty \left\|f_n\right\|_\infty\} = 0$ entonces S es esencialmente acotada y $S \in L^\infty$. Finalmente, veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, $\forall x \in CN$ resulta $S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{n+1}^\infty f_k(x)$ y por tanto $|S(x) - S_n(x)| \leq \sum\limits_{n+1}^\infty \left|f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{n+1}^\infty \left\|f_k\right\|_\infty < \varepsilon$ para $n \geq N_\varepsilon$ pues $\sum\limits_1^\infty \left\|f_n\right\|_\infty < \infty$. Es decir, si $\varepsilon > 0$, $\forall x \in CN$ y $\forall n \geq N_\varepsilon$ es $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Por tanto $\{x \in X : |S(x) - S_n(x)| \geq \varepsilon\} \subset N$ y entonces $\mu\{x \in X : |S(x) - S_n(x)| > \varepsilon\} = 0$. De donde, $\|S - S_n\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon$. Por lo tanto, $(L^\infty(X, \Phi, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ es completo. □

Lema 7 *(Desigualdad de Hölder, extensión). Si $f \in \mathcal{L}^1$ y $g \in \mathcal{L}^\infty$ entonces $fg \in \mathcal{L}^1$ y vale la siguiente* ***desigualdad de Hölder***

$$\int_X |fg| d\mu \leq \int_X |f| d\mu \ \left\|g\right\|_\infty$$

O sea,

$$\left\|fg\right\|_1 \leq \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_\infty$$

dem: $|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq |f(x)| \left\|g\right\|_\infty$ μ-pctp luego $fg \in \mathcal{L}^1$ y $\left\|fg\right\|_1 = \int_X |fg| d\mu \leq \int_X |f| \left\|g\right\|_\infty d\mu = \left\|g\right\|_\infty \int_X |f| d\mu = \left\|g\right\|_\infty \left\|f\right\|_1$. □

Nota 6 *Convenimos en decir que $p = 1$ y $q = \infty$ son conjugados (hemos convenido $\frac{1}{\infty} = 0$). Luego si $1 \le p, q \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ entonces vale* ***desigualdad de Hölder***

$$\left\|fg\right\|_1 \le \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_q$$

Ejemplo 7 *1) $L^\infty(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. 2) $l^\infty(\mathbb{R}) = \{\xi = (x_n)_1^\infty : (x_n)$ es sucesión acotada$\}$. $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que $k \to x_k \in \mathbb{C}$, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_p)$.*

2.4. Convergencia en L^p $(1 \le p < \infty)$. Otros tipos de convergencia.

Teorema 7 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida finita, sea $(f_n) \subset L^p(X, \Phi, \mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{cu} f$ en X. Entonces $f \in L^p(X, \Phi, \mu)$ y $f_n \to f$ en L^p.*

dem: Como $f_n \xrightarrow{cu} f$ dado $\varepsilon = 1$ existe N tal que $|f_n(x) - f(x)| < 1$ $\forall n \ge N$ y $\forall x \in X$, resulta $|f(x)| \le |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)| < 1 + |f_N(x)|$ luego $\left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X 1^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |f_N(x)|^p d\mu\right)^{1/p} = \mu(X)^{1/p} + \left\|f_N\right\|_p < \infty$, luego $f \in L^p$. Veamos que $f_n \to f$ en L^p, como $f_n \xrightarrow{cu} f$ sea $\varepsilon > 0$ y N_ε tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \ge N_\varepsilon$ y $\forall x \in X$, resulta

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu < \varepsilon^p \mu(X)$$

luego $\left\|f_n - f\right\|_p < \varepsilon \mu(X)^{1/p}$ $\forall n \ge N_\varepsilon$ o sea $f_n \to f$ en L^p. □

Observación 6 *La convergencia uniforme implica convergencia en L^p, pero la convergencia puntual o pctp no implica convergencia en L^p aunque $\mu(X) < \infty$. Por ejemplo, $f_n(x) = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(x)$, si $X = [0, 2]$. Luego $f_n \xrightarrow{cp} 0$ $\forall x \in X$. Además $\left\|f_n\right\|_1 = 1$ $\forall n$ y $\left\|f_n\right\|_p = (\int_{1/n}^{2/n} n^p d\mu)^{1/p} = \left(n^{-1+p}\right)^{\frac{1}{p}} = n^{1-\frac{1}{p}} \to \infty$. Luego $\left\|f - f_n\right\|_p \nrightarrow 0$ $\forall 1 \le p < \infty$.*

Veremos que si la sucesión está dominada por una función de L^p entonces será convergente en L^p.

Teorema 8 *Sea $(f_n) \subset L^p(X, \Phi, \mu)$ tal que $f_n \to f$ μ-pctp. Si existe $g \in L^p$ tal que $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f \in L^p(X, \Phi, \mu)$ y $f_n \to f$ en L^p.*

dem: Como $f_n \to f$ μ-pctp y $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ será $|f(x)| \le g(x)$ μ-pctp$\Rightarrow$ $|f(x)|^p \le g(x)^p$ μ-pctp y $g^p \in L^1$ (pues $g \in L^p$) entonces $f \in L^p$. Además $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2g(x)$ μ-pctp$\Rightarrow$ $|f_n(x) - f(x)|^p \le 2^p g(x)^p$ μ-pctp y como $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)|^p = 0$ y $2^p g^p \in L^1$ el teorema de la convergencia dominada Lebesgue permite establecer

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p = 0$$

por lo tanto $f_n \to f$ en L^p. □

Corolario 1 *Sea $(f_n) \subset L^p(X, \Phi, \mu)$ tal que $f_n \to f$ μ-pctp y $\mu(X) < \infty$. Si existe una constante k tal que $|f_n(x)| \le k$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f \in L^p(X, \Phi, \mu)$ y $f_n \to f$ en L^p.*

dem: Como $\mu(X) < \infty$, la función $g(x) = k \in L^p$. □

Observación 7 *La convergencia en L^p no implica convergencia puntual ni aún en casi todo punto. Por ejemplo: sea $X = [0,1]$, $\Phi = \mathcal{M}$, $\mu = dx$. Consideramos la sucesión de intervalos*

$$[0,1], [0,\tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2},1], [0,\tfrac{1}{3}][\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}], [\tfrac{2}{3},1], ...$$

Sea f_n la función característica del $n-$ésimo intervalo. Y sea $f = 0$ en X. Observemos que si $n \geq \frac{m(m+1)}{2}$ la medida del n-ésimo intervalo es $\leq \frac{1}{m}$ entonces $\forall n \geq \frac{m(m+1)}{2}$ se tiene

$$\left\|f_n - f\right\|_p^p = \int |f_n(x) - f(x)|^p dx = \int f_n(x)^p dx = \mu(I_n) \leq \frac{1}{m}$$

luego $f_n \to f = 0$ en L^p. Sin embargo, $(f_n(x))$ no converge en ningún $x \in [0,1]$, aunque si existe una subsucesión que converge.

Definición 19 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida, sea $(f_n) \subset \Phi-$medibles, diremos que f_n **converge en medida** μ a una f, $\Phi-$medible y ponemos $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sii para cada $\alpha > 0$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 0$$

*Diremos que (f_n) es de **Cauchy en medida** sii para cada $\alpha > 0$ se cumple que $\forall \varepsilon > 0$ existe N_ε tal que si $n, m \geq N_\varepsilon$ resulta $\mu\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\} < \varepsilon$.*

Teorema 9 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida. Si (f_n) es tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces (f_n) es de Cauchy en medida.*

dem: Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$, para $\alpha > 0$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} = 0$ entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe N_ε tal que si $n \geq N_\varepsilon$ resulta $\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} < \frac{\varepsilon}{2}$ (1). Sean n, m y $x \in X$ tales que $|f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha$ luego

$$\alpha \leq |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$

y entonces

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\alpha}{2} \quad \text{o} \quad |f_m(x) - f(x)| \geq \tfrac{\alpha}{2}$$

O sea $\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\} \subset \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}$. Por lo tanto si $n, m \geq N_\varepsilon$ tenemos por (1) que

$$\mu\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y entonces (f_n) es de Cauchy en medida. □

Teorema 10 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y $f_n \xrightarrow{cu} f$ en X entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

dem: Como $f_n \xrightarrow{cu} f$ $\forall \varepsilon > 0$ existe N_ε tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$ y $n \geq N_\varepsilon$. Sea $\alpha > 0$ existe N_α tal que $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset$ si $n \geq N_\alpha$ entonces $\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 0$ $\forall n \geq N_\alpha$ luego $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 0$ o sea $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Observación 8 *La convergencia puntual no implica convergencia en medida. Por ejemplo la sucesión $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ converge puntualmente a $f = 0$ en $\mathbb{R}$ pero no converge en medida.*

Teorema 11 *Sea* $(f_n) \subset L^p(X, \Phi, \mu)$ *tal que* $f_n \to f$ *en* L^p *entonces* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

dem: Como $f_n \to f$ en L^p tenemos $\left\|f_n - f\right\|_p \to 0$ o sea $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p = 0$ (1). Sea $\alpha > 0$, definimos $E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$. Por (1), dado $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que si $n \geq N_\varepsilon$ $\Rightarrow \int |f_n(x) - f(x)|^p < \varepsilon\alpha^p$ pero $\int |f_n(x) - f(x)|^p = \underbrace{\int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|^p}_{\geq \alpha^p \mu(E_n)} + \underbrace{\int_{CE_n} |f_n(x) - f(x)|^p}_{>0} <$ $\varepsilon\alpha^p$. Por lo tanto, $\forall \varepsilon > 0$ existe N_ε tal que si $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \alpha^p \mu(E_n) < \varepsilon\alpha^p \Rightarrow \mu(E_n) < \varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ y luego $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Observación 9 *La convergencia en medida no implica convergencia puntual, ver ejemplo anterior.*

Teorema 12 *Sea* (f_n) *una sucesión de Cauchy en medida. Entonces existe una subsucesión* (f_{n_k}) *tal que* $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ *y* $f_{n_k} \to f$ *pctp y* f *medible.*

dem: ejercicio.

Corolario 2 *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones medibles, de Cauchy en medida. Entonces existe una función* f *medible tal que* $f_n \xrightarrow{\mu} f$. *Esta función límite* f *está unívocamente determinada en casi todo punto.*

dem: ejercicio.

Observación 10 *Vimos que la convergencia en* L^p *implica convergencia en medida, en general la convergencia en medida no implica convergencia en* L^p. *Por ejemplo,* $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ *converge en medida a* $f = 0$ *pero no converge en* L^p, *probarlo.*

Teorema 13 *Sea* $(f_n) \subset L^p(X, \Phi, \mu)$ *tal que* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *y sea* $g \in L^p$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu-$*pctp entonces* $f \in L^p(X, \Phi, \mu)$ *y* $f_n \to f$ *en* L^p.

dem: Suponemos $f_n \nrightarrow f$ en L^p, entonces existirá una subsucesión (g_n) de (f_n) y un $\varepsilon > 0$ tal que $\left\|g_n - f\right\|_p > \varepsilon$ $\forall n$ (1). Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ también $g_n \xrightarrow{\mu} f$ pero entonces existe una subsucesión (h_j) de (g_n) tal que $h_j \xrightarrow{\mu} h$ y $h_j \to h$ pctp y h medible. Como esta función límite es única pctp, tenemos $h = f$ μ-pctp. Como $h_j \to f$ pctp y está dominada por g con $g \in L^p$ se concluye que $h_j \to f$ en L^p en contradicción con (1). □

Teorema 14 *Sea* $(f_n) \subset L^p(X, \Phi, \mu)$ *tal que* $f_n \to f$ *en* L^p *entonces* (f_n) *tiene una subsucesión que converge a* f μ*-pctp.*

dem: Como $f_n \to f$ en $L^p \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow (f_n)$ es de Cauchy en medida. Ahora, existirá (f_{n_k}) que converge μ-pctp y en medida a cierta función g, pero $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$. Por la unicidad $\mu-$pctp, tenemos que $f = g$ $\mu-$pctp, luego $f_{n_k} \to f$ μ-pctp. □

Resumen. Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida.

- $\mu(X) < \infty$, $(f_n) \subset L^p$, $f_n \xrightarrow{cu} f \Rightarrow f \in L^p$ y $f_n \to f$ en L^p o sea $\left\|f_n - f\right\|_p \to 0$.
- $f_n \xrightarrow{cp} f$ o $f_n \to f$ pctp $\not\Rightarrow \left\|f_n - f\right\|_p \to 0$.
- $(f_n) \subset L^p$, $f_n \to f$ $\mu-$pctp y $\begin{cases} \exists g \in L^p \ / \ |f_n| \leq g \\ o\ \mu(X) < \infty \text{ y } \exists k \ / \ |f_n(x)| \leq k\ \forall x \end{cases} \Rightarrow f \in L^p$ y $\left\|f_n - f\right\|_p \to 0$.
- $\left\|f_n - f\right\|_p \to 0 \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{cp} f$ o $f_n \to f$ pctp
- $f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow (f_n)$ Cauchy en medida.
- $f_n \xrightarrow{cu} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $f_n \xrightarrow{cp} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $(f_n) \subset L^p$, $\left\|f_n - f\right\|_p \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{cp} f$
- $f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \to f$ en L^p
- (f_n) Cauchy en medida $\Rightarrow \exists (f_{n_k}) \ / \ f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ y $f_{n_k} \to f$ $\mu-$pctp y f medible.
- (f_n) medibles y de Cauchy en medida $\Rightarrow \exists f$ medible / $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (única $\mu-$pctp)
- $(f_n) \subset L^p$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y sea $g \in L^p \ / \ |f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu-$pctp $\Rightarrow f \in L^p$ y $f_n \to f$ en L^p.
- $(f_n) \subset L^p$, $f_n \to f$ en $L^p \Rightarrow \exists (f_{n_k}) \ / \ f_{n_k} \to f$ $\mu-$pctp.

Observación 11 *Justificar cada una de las convergencias o mostrar un ejemplo o contraejemplo.*

3. Convoluciones. Teoremas de Young.

3.1. Convoluciones. El álgebra de convolución $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 20 *Sean f, g funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$. Definimos la* ***convolución*** *de f y g como*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

en cada punto de $\mathbb{R}^n$ donde la integral exista finita.

Observación 12 *En principio, no podemos asegurar que $f(x-y)g(y)$ sea integrable en y ni siquiera para algún x. El teorema de Fubini permitirá probar que si f, g integrables, existe pctp la convolución $f * g$ y la función $f * g$ es también integrable. Utilizaremos el siguiente lema para probar el teorema de Fubini.*

Lema 8 *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f(x - y)g(y)$ es medible sobre $\mathbb{R}^{2n}$.*

Teorema 15 *(Fubini) Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe $f * g$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ y además $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\left\|f * g\right\|_1 \leq \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_1$$

dem: Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(x, y) \to f(x-y)g(y)$ es medible, en tal caso aplicando Tonelli, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)g(y)|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy)dx = \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dx)dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(|g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx)dy = \int_{\mathbb{R}^n}(|g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx)dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy = \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

es decir $\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy)dx = \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_1 < \infty$, de donde $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy < \infty$ pct$x$, luego existe $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ pct$x$. Además

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy)dx = \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_1$$

lo que muestra que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\left\|f * g\right\|_1 \leq \left\|f\right\|_1 \left\|g\right\|_1$. □

Teorema 16 *El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con las operaciones de sumas, producto por escalares y producto de convolución, es un álgebra de Banach conmutativa.*

Nota 7 *El álgebra de convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$ no tiene unidad, no existe $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * e = f$ $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

dem: Ya vimos que $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach, veamos que $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ es un álgebra conmutativa. Esto es:
- $(L^1(\mathbb{R}^n), +)$ es un grupo abeliano.
- $f, g, h \in L^1$ veamos que $*$ es asociativa:

$$\begin{aligned}
&((f * g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}(f * g)(x-y)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)dz\right)h(y)dy \\
&\overset{y+z=u}{\underset{\text{Fubini}}{=}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u-y)h(y)dudy = \\
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)(\int_{\mathbb{R}^n} g(u-y)h(y)dy)du = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)(g * h)(u)du = (f * (g * h))(x)
\end{aligned}$$

- $f, g, h \in L^1$ veamos que $*$ es distributiva con respecto a la suma:

$$(f * (g+h))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(g+h)(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy$$

$$= (f * g)(x) + (f * h)(x)$$

$$((f+g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}(f+g)(x-y)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)h(y)dy$$

$$= (f * h)(x) + (g * h)(x)$$

- $\alpha \in \mathbb{K}$, $f, g \in L^1$, veamos que $\alpha(f * g) = \alpha f * g = f * \alpha g$:

$$\alpha(f * g)(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f)(x-y)g(y)dy = (\alpha f * g)(x)$$
$$(f * \alpha g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(\alpha g)(y)dy = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \alpha(f * g)(x)$$

- $f, g \in L^1$, veamos $*$ es conmutativa:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \overset{z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = (g * f)(x).$$

Por lo tanto $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ es un álgebra conmutativa. $\square$

Observación 13 *Como $*$ es conmutativa podemos poner $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$.*

3.2. Teoremas de Young.

Teorema 17 *(Young) Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces existe la convolución y $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Además*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

dem: Si $p = 1$, ya lo probamos.

Si $p = \infty$, se tiene que $|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dy = \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx = \|f\|_\infty \|g\|_1 < \infty$, siendo entonces $\sup |(f * g)(x)| < \infty$ y luego $f * g \in L^\infty$ y $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

Sea $1 < p < \infty$ y sea q el conjugado de p, tenemos

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|^{1/p}|g(x-y)|^{1/q}dy \qquad (1)$$

Observemos que si $g \in L^1 \Rightarrow |g|^{1/p} \in L^p$, luego $|f||g|^{1/p} \in L^p$ y $|g|^{1/q} \in L^q$. Ahora aplicando la desigualdad de Hölder a (1), tenemos

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|dy\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dy\right)^{1/q}$$

Por lo tanto

$$|(f * g)(x)|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|dy\right) \|g\|_1^{p/q}$$

Integrando en x y aplicando Fubini, se tiene

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &\leq \|g\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|dy\right) dx = \|g\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p (\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx)dy \\ &= \|g\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \|g\|_1 dy = \|g\|_1^{1+p/q} \|f\|_p^p = \|g\|_1^p \|f\|_p^p \end{aligned}$$

y entonces $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. $\square$

Más generalmente, se tiene el siguiente:

Teorema 18 *(Young) Sea $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq r \leq \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \geq 1$, entonces existe la convolución y $f * g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, donde q es tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 \geq 0$. Además*

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r$$

dem: Si $r = 1$, se tendría $p = q$ y si $p = 1$ sería $r = q$, ya lo probamos. Luego supondremos $r, p > 1$. Si $q = \infty$, entonces p, r serán conjugados y el resultado sigue de la desigualdad de Hölder, $\left\|f * g\right\|_\infty = \sup \left|f * g\right|$ y $\left|f * g\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy \leq \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_r < \infty$. Si $q = 1$, entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 2$ y entonces $p = r = 1$, también ya lo probamos. Tendremos sólo que probar el caso $1 < q < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} > 1$. Definimos $\lambda = q$, $\mu = \frac{pq}{q-p}$ y $\nu = \frac{rq}{q-r}$, estos índices verifican $1 < \lambda, \mu, \nu < \infty$ y $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$, tendremos entonces aplicando Hölder

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p/q}|g(x-y)|^{r/q}|f(y)|^{1-p/q}|g(x-y)|^{1-r/q}dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^r dy\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^r\right)^{\frac{q-r}{rq}} \end{aligned}$$

De donde

$$|(f * g)(x)|^q \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^r dy\right) \left\|f\right\|_p^{q-p} \left\|g\right\|_r^{q-r}$$

Integrando en x, tenemos

$$\begin{aligned} \left\|f * g\right\|_q^q &\leq \left\|f\right\|_p^{q-p} \left\|g\right\|_r^{q-r} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^r dy\right) dx \\ &= \left\|f\right\|_p^{q-p} \left\|g\right\|_r^{q-r} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^r dx\right) dy \\ &= \left\|f\right\|_p^{q-p} \left\|g\right\|_r^{q-r} \left\|g\right\|_r^r \left\|f\right\|_p^p \\ &= \left\|f\right\|_p^q \left\|g\right\|_r^q \end{aligned}$$

Es decir, $\left\|f * g\right\|_q \leq \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_r$. □

3.3. Teoremas de densidad. Separabilidad de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Definición 21 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida $\sigma-$finita, definimos el conjunto $D = \{f \in L^p(X, \Phi, \mu) : f = 0$ en CN_f, con $\mu(N_f) < \infty\}$.*

Teorema 19 *Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida $\sigma-$finita y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el espacio D es denso en $L^p(X, \Phi, \mu)$.*

Teorema 20 *Sea Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el subespacio de L^p formado por las funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^p(\Omega, dx)$.*

Teorema 21 *Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ es separable. El subespacio de las combinaciones lineales con coeficientes racionales de funciones características de intervalos n-dimensionales cuyos vértices tienen coordenadas racionales, es denso en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.*

4. El teorema de Radon-Nikodym. Espacios duales de los espacios L^p.

4.1. El teorema de Radon-Nikodym.

Definición 22 *Sea (X, Φ) un espacio medible y sean μ, ν dos medidas positivas sobre Φ. Diremos que ν **es absolutamente continua con respecto a** μ y notamos $\nu << \mu$ sii para $E \in \Phi$ con $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$.*

Ejemplo 8 *Si* (X, Φ, μ) *un espacio con medida y* $f \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$*, la medida* μ_f *definida por*

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu$$

es absolutamente continua con respecto a μ*, o esa* $\mu_f << \mu$ *(si* $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0 \ \forall f \in \mathcal{M}^+(X, \Phi)$*)*

Definición 23 *Sea* (X, Φ) *un espacio medible y sea* ν *una medida positiva. Si existe un conjunto* $A \in \Phi$ *tal que* $\nu(E) = \nu(E \cap A) \ \ \forall E \in \Phi$ *diremos que* ν *es una* ***medida concentrada en*** A *(equivale a que* $\nu(E) = 0 \ \forall E \in \Phi$ *tal que* $E \cap A = \emptyset$*). Si* μ *es una medida concentrada en* A *entonces* $\mu(CA) = 0$.

Definición 24 *Sea* (X, Φ) *un espacio medible y sean* μ, ν *dos medidas positivas sobre* Φ *si existen dos conjuntos* A, B *(separación de* X*) en* Φ *tales que* ν *está concentrada en* A *y* μ *está concentrada en* B*, diremos que* ν *y* μ *son* ***medidas mutuamente singulares*** *y notamos* $\nu \perp \mu$.

Lema 9 *Sea* (X, Φ) *un espacio medible y sean* μ, ν, ν_1, ν_2 *medidas positivas sobre* Φ *entonces:*

i) $\nu_1 << \mu, \nu_2 << \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 << \mu$
ii) $\nu_1 \perp \mu, \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \perp \mu$
iii) $\nu_1 << \mu, \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 \perp \nu_2$
iv) $\nu << \mu, \nu \perp \mu \Rightarrow \nu = 0$

dem: ejercicio.

Teorema 22 *(Radon-Nikodym) Sea* (X, Φ) *un espacio medible y sean* μ, ν *dos medidas positivas finitas sobre* Φ*. Entonces:*

a) Existe un único par de medidas ν_a, ν_s *sobre* Φ *tal que*

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a << \mu, \quad \nu_s \perp \mu$$

b) Existe una única función $h \in L^1(X, \Phi, \mu)$ *tal que*

$$\nu_a(E) = \int_E h(x) d\mu(x) \quad \forall E \in \Phi$$

dem: Veamos primero la existencia de la descomposición de ν en $\nu_a + \nu_s$. Definimos el funcional:

$$\begin{aligned} l: \ \ L^2(X, \Phi, \nu + \mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ l(f) &= \int_X f d\nu \end{aligned}$$

Veamos que l es lineal y continuo.
Linealidad:

$$l(f + g) = \int_X (f + g) d\nu = \int_X f d\nu + \int_X g d\nu = l(f) + l(g) \quad \forall f, g$$

$$l(cf) = \int_X c f d\nu = c \int_X f d\nu = cl(f) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f$$

Continuidad: Sea $f \in L^2(X, \Phi, \nu + \mu)$. Observemos que, gracias a la desigualdad de Hölder con $p = q = 2$:

$$|l(f)| = \left| \int_X f d\nu \right| \leq \int_X |f| d\nu \leq \int_X |f| d(\nu + \mu) = \int_X |f| \cdot 1 d(\nu + \mu) \leq$$

$$\leq \Big(\int_X |f|^2 d(\nu + \mu) \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_X 1 d(\nu + \mu) \Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(X,\Phi,\nu+\mu)} \Big((\nu + \mu)(X) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Por hipótesis tenemos que ν y μ son medidas finitas. Esto implica que $\Big((\nu + \mu)(X)\Big)^{\frac{1}{2}}$ es constante y finito, digamos $\Big((\nu + \mu)(X)\Big)^{\frac{1}{2}} = M$. Tenemos entonces que:

$$|l(f)| \leq M \|f\|_{L^2(X,\Phi,\nu+\mu)} \quad \forall f \in L^2(X, \Phi, \nu + \mu)$$

Como l es lineal, dadas f y $g \in L^2(X, \Phi, \nu + \mu)$,

$$|l(f) - l(g)| = |l(f - g)| \leq M \|f - g\|_{L^2(X,\Phi,\nu+\mu)}$$

y entonces l resulta uniformemente continua, en efecto dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tal que si $\|f - g\|_{L^2} < \delta$ entonces $|l(f) - l(g)| \leq M\|f - g\| < M \cdot \delta < \varepsilon$.
Del Teorema de Representación de Riesz, sabemos que existe una única función $g \in L^2(X, \Phi, \nu + \mu)$ tal que

$$l(f) = \int_X f d\nu = \int_X f g d(\nu + \mu) \quad \forall f \in L^2(X, \Phi, \nu + \mu) \tag{23}$$

Eligiendo $f = \chi_E$, con $E \in \Phi$, tenemos $\nu(E) = \int_E g d(\nu + \mu)$.
Por un lado, tenemos que $\forall E \in \Phi$, $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E) \geq \nu(E)$ y por otro lado, dado $E \in \Phi$ tal que $(\nu + \mu)(E) > 0$ se cumple que:

$$0 \leq \frac{\nu(E)}{\nu(E)+\mu(E)} \leq 1$$

y entonces

$$0 \leq \frac{1}{\nu(E)+\mu(E)} \int_E g d(\nu + \mu) \leq 1$$

equivalentemente

$$0 \leq \int_E g d(\nu + \mu) \leq \nu(E) + \mu(E) = (\nu + \mu)(E) = \int_E 1 d(\nu + \mu)$$

Es decir que $\forall E \in \Phi$ con $(\nu+\mu)(E) > 0$ se satisface que $\int_E g d(\nu + \mu) \leq \int_E 1 d(\nu + \mu)$. En particular, sea $E^* = \{x : g(x) > 1\}$ tal que $(\nu+\mu)(E^*) > 0$ entonces $\int_{E^*} g d(\nu + \mu) > \int_{E^*} 1 d(\nu + \mu)$ pero también tendríamos que $\int_{E^*} g d(\nu + \mu) \leq \int_{E^*} 1 d(\nu + \mu)$ lo cual es una contradicción. Se concluye que $(\nu + \mu)(E) = 0$ y entonces $0 \leq g(x) \leq 1$ para casi todo punto.

Sean $A = \{x \in X : g(x) < 1\}$ y $B = \{x \in X : g(x) = 1\}$. Claramente $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. Además:

$$\nu(E) = \nu(E \cap X) = \nu(E \cap (A \cup B)) = \nu((E \cap A) \cup (E \cap B)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu_a(E) + \nu_s(E)$$

De la igualdad en (23):

$$\int_X f d\nu = \int_X fg d(\nu + \mu) = \int_X fg d\nu + \int_X fg d\mu \tag{24}$$

y entonces

$$\int_X f d\nu - \int_X fg d\nu = \int_X (f - fg) d\nu = \int_X f(1-g) d\nu = \int_X fg d\mu \tag{25}$$

Eligiendo $f = \chi_B$, tenemos a partir de (25)

$$\int_X f(1-g) d\nu = \int_B (1-g) d\nu = \int_B 1 d\nu - \int_B g d\nu = \int_B g d\mu \tag{26}$$

Por lo tanto, de (24) y (26), tenemos

$$\nu(B) = \int_B g d\mu + \int_B g d\nu = \int_B g d(\mu + \nu) = \int_B d(\mu + \nu) = \mu(B) + \nu(B)$$

de donde se concluye que $\mu(B) = 0$ y como $\mu(B) = \mu(CA)$ es decir μ está concentrada en A.
Como $\nu_s(A) = \nu(A \cap B) = \nu(\emptyset) = 0$ entonces ν_s está concentrada en B, es decir que

$$\nu_s \perp \mu$$

Eligiendo $f = \chi_E \sum_{k=0}^{n} g^k$ con E un medible cualquiera y reemplazando en (25) se obtiene, por una lado

$$\int_X f(1-g) d\nu = \int_X \chi_E \Big(\sum_{k=0}^{n} g^k \Big)(1-g) d\nu = \int_E \sum_{k=0}^{n} g^k (1-g) d\nu = \int_E (1 - g^{n+1}) d\nu$$

y por otro:

$$\int_X fg d\mu = \int_X (\chi_E \sum_{k=0}^{n} g^k) g d\mu = \int_E \sum_{k=1}^{n+1} g^k d\mu$$

Por lo tanto $\int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_E \sum_{k=1}^{n+1} g^k d\mu$.
Tomando límites

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n+1} g^k d\mu$$

Si $x \in A$, $g(x) < 1$ entonces $(1 - g^{n+1}) \to 1$ y poniendo $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g^k(x)$ resulta $\sum_{k=1}^{n} g^k \to h$.
Observar que

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_{E \cap A} (1 - g^{n+1}) d\nu + \int_{E \cap B} (1 - g^{n+1}) d\nu$$

Y así $\int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_{E \cap A} (1 - g^{n+1}) d\nu$. Aplicando Beppo Levi a ambas sucesiones:

$$\nu(E \cap A) = \nu_a(E) = \int_E d\nu = \int_E \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} g^k d\mu = \int_E h d\mu \quad \forall E \in \Phi$$

Se concluye que $\nu_a(E) = \int_E h d\mu$. Además, si $\mu(E) = 0$ entonces $\displaystyle\int_E h d\mu = 0$ y luego $\nu_a(E) = 0$. Por lo tanto $\nu_a << \mu$.

Veamos la unicidad. Supongamos que existen medidas ν'_a y ν'_s tal que $\nu = \nu'_a + \nu'_s = \nu_a + \nu_s$. Se tendría $\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$ y entonces $\nu_a - \nu'_a << \nu'_s - \nu_s$.

Por lema 9 iii), como $\nu_a - \nu'_a << \mu$, $\nu'_s - \nu_s \perp \mu$ entonces $\nu_a - \nu'_a \perp \nu'_s - \nu_s$ pero entonces

$$(\nu_a - \nu'_a) \perp (\nu'_s - \nu_s) \quad \text{y} \quad \nu_a - \nu'_a << \nu'_s - \nu_s \Longrightarrow \nu_a - \nu'_a = 0$$

de donde $\nu_a = \nu'_a$ y entonces $\nu'_s - \nu_s = 0$ lo cual implica que $\nu'_s = \nu_s$. □

Nota 8 *El par (ν_a, ν_s) constituye la denominada* ***descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ****. La parte b) se conoce como el Teorema de Radon-Nikodym. La función h se denomina* ***derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ****. La prueba (queda como ejercicio) de ambos resultados se debe a Von-Neumman. La prueba de éste teorema depende fuertemente de las hipótesis $\mu(X)$ y $\nu(X)$ finitas. Si suponemos que μ es una medida positiva $\sigma-$finita y ν es una medida con signo o una medida compleja, podemos extender el resultado anterior.*

4.2. Espacios duales de los espacios L^p.

Representaciones de funcionales lineales continuos sobre L^p.

Teorema 23 *(Representación) Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida σ-finita. Entonces cada función $g \in L^q(X, \Phi, \mu)$, con $1 < q \leq \infty$, define un funcional lineal y continuo l_g sobre $L^p(X, \Phi, \mu)$, donde p es el conjugado de q, dado por*

$$\begin{array}{rcl} l_g & : & L^p(X, \Phi, \mu) \to \mathbb{K} \\ f & \to & l_g(f) = \int f g d\mu \end{array}$$

siendo además $\left\| l_g \right\| = \left\| g \right\|_q$.

Teorema 24 *(Riesz) Dado cualquier funcional lineal y continuo l sobre $L^p(X, \Phi, \mu)$, con $1 \leq p < \infty$, existe una única función $g \in L^q(X, \Phi, \mu)$ tal que*

$$l(f) = \int f g d\mu \quad \forall f \in L^p(X, \Phi, \mu)$$

siendo además $\|l\| = \left\| g \right\|_q$ y q es el conjugado de p.

Definición 25 *Diremos que l es un* ***funcional real*** *si $l(f) \in \mathbb{R}$ $\forall f \in L^p$, f a valores reales. Y diremos que l es un* ***funcional positivo*** *si $l(f) \geq 0$ para toda $f \in L^p$, con $f \geq 0$.*

Lema 10 *Si l es un funcional real sobre L^p. Entonces existen funcionales positivos l^+, l^- tales que $l(f) = l^+(f) - l^-(f)$ $\forall f \in L^p$.*

Duales de L^p.

Teorema 25 *Sea (X,Φ,μ) un espacio con medida σ-finita. Entonces existe un isomorfismo isométrico entre $L^2(X,\Phi,\mu)$ y su dual $(L^2(X,\Phi,\mu))'$. Es decir, existe una aplicación lineal biyectiva*

$$\begin{array}{ccc} \phi & : & L^2(X,\Phi,\mu) \to \left(L^2(X,\Phi,\mu)\right)' \\ g & \to & \phi(g) = l_g \end{array}$$

tal que $\|\phi(g)\| = \|l_g\| = \|g\|_2$.

dem: De acuerdo con el teorema de representación Riesz y teniendo en cuenta que $p = q = 2$ son conjugados se concluye que la aplicación ϕ definida

$$\begin{array}{ccc} \phi & : & L^2(X,\Phi,\mu) \to \left(L^2(X,\Phi,\mu)\right)' \\ g & \to & \phi(g) = l_g \end{array}$$

donde $l_g(f) = \int fgd\mu \ \forall f \in L^2$ es un isomorfismo isométrico de L^2 sobre su dual $(L^2)'$.$\square$

Observación 14 *El isomorfismo existente entre L^2 y su dual permite establecer una identificación entre ambos espacios. Por eso suele decirse que el dual de L^2 es L^2, identificando cada funcional del dual con la función g que lo realiza como integral.*

Teorema 26 *Sea (X,Φ,μ) un espacio con medida σ-finita y sean $1 \leq p < \infty, 1 < q \leq \infty$ índices conjugados.. Entonces existe un isomorfismo isométrico entre $L^q(X,\Phi,\mu)$ y el dual de L^p, $(L^p(X,\Phi,\mu))'$. Es decir, existe una aplicación lineal biyectiva*

$$\begin{array}{ccc} \phi & : & L^q(X,\Phi,\mu) \to (L^p(X,\Phi,\mu))' \\ g & \to & \phi(g) = l_g \end{array}$$

tal que $\|\phi(g)\| = \|l_g\| = \|g\|_q$.

dem: Es consecuencia del teorema de representación Riesz, para p, q conjugados, la aplicación ϕ definida

$$\begin{array}{ccc} \phi & : & L^q(X,\Phi,\mu) \to (L^p(X,\Phi,\mu))' \\ g & \to & \phi(g) = l_g \end{array}$$

donde $l_g(f) = \int fgd\mu \ \forall f \in L^p$ es un isomorfismo isométrico de L^q sobre su dual $(L^p)'$.$\square$

Observación 15 *Este teorema permite establecer una identificación entre el dual de L^p $(1 \leq p < \infty)$ y L^q $(1 < q \leq \infty)$, siendo p, q conjugados. Se identifica entonces cada elemento de $(L^p)'$ con la función que lo realiza como integral, y se dice entonces que el dual de L^p es L^q.*

Nota 9 $(L^2)' = L^2$, $(L^1)' = L^\infty$, *pero* $(L^\infty)' \neq L^1$, *aunque se puede probar (funcional) que el* $L^1 \subset (L^\infty)'$.

Referencias

[1] Bartle, Robert G.: The Elements of Integration, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
[2] Berberian S.K., *A first course in real analysis*, Springer-Verlag, New York, 1994.
[3] Bloch E.D., *The Real Numbers and Real Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2011.
[4] Dieudonne, Jean, *Fundamentos del análisis moderno*, Reverté S.A., 1966.
[5] Halmos, Paul R.: Measure Theory, D. Van Nostrand Company, Inc., 1959.
[6] Natanson, I.P.: Theory of Functions of a Real Variable, F.Ungar Publishing Co., 1960.
[7] Royden, H.L., *Real analysis*, (3era Edición), McGraw Hill, México, 1980.
[8] Rudin, Walter: Real and Complex Analysis, MacGraw-Hill Book Company, 1966.
[9] Spivak, M., *Cálculo infinitesimal*, Reverté S.A., 2003.
[10] Trench W.F., *Introduction to real analysis*, Free Edition, 2011.

Índice alfabético

Índice alfabético