ACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FUNCIONES REALES
Gabriela Reyero - María Evangelina Alvarez.

TRABAJOS PRÁCTICOS AÑO ACADÉMICO 2015.

Práctica Nº 6: Nociones sobre espacios normados. Espacios de Lebesgue L^p.

Breves nociones sobre espacios normados.

①. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ se define

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad ||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ||x||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Demostrar que las precedentes funciones son normas sobre $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

②. Si $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, se define

$$||A||_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad ||A||_2 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||A||_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \le p < \infty) \qquad ||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n} |a_{ij}|$$

$$||A||_* = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad ||A||_{**} = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Mostrar que todas son normas sobre $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

③. Para cada $f \in C[a,b]$ se define

$$||f||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad ||f||_1 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \qquad ||f||_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mostrar que todas son normas sobre el espacio $C[a,b]$.

④. Sea $SC[a,b]$ el espacio de las funciones seccionalmente continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Mostrar que la función

$$p(f) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

definida para toda $f \in SC[a,b]$, es una seminorma pero no una norma sobre $SC[a,b]$.

⑤. Dar ejemplos de seminormas que no sean normas sobre los espacios $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $C[a,b]$.

6. Demostrar que

(a). la convergencia en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$, con cualquiera de las normas definidas en el ejercicio 1, equivale a la convergencia por componentes,

(b). vale análogo resultado para la convergencia en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ con la métricas definidas en el ejercicio 2,

(c). la convergencia en $C[a,b]$ con la norma $||\cdot||_\infty$ es la convergencia uniforme sobre $[a,b]$.

7. Demostrar que los siguientes espacios son de Banach:

-a- $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, con cualquiera de las normas definidas en el ejercicio 1.

-b- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ con cualquiera de las normas definidas en el ejercicio 2.

-c- $C[a,b]$ con la norma $||\cdot||_\infty$.

8. Mostrar que $C[a,b]$ tanto con la norma $||\cdot||_1$ como con la norma $||\cdot||_2$ no es un espacio de Banach.

9. Sea $l^1 = \left\{\eta = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}$. Se define $||\eta||_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.
Demostrar que

a l^1 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

b $||\cdot||_1$ es una norma sobre l^1.

c l^1 con la norma $||\cdot||_1$ es un espacio de Banach.

Para las demostraciones sólo pueden aplicarse resultados de la teoría de sucesiones y series numéricas.

10. Sea $l^2 = \left\{\eta = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\right\}$. Se define $||\eta||_2 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Demostrar que

-a- l^2 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

-b- $||\cdot||_2$ es una norma sobre l^2.

-c- l^2 con la norma $||\cdot||_2$ es un espacio de Banach.

Para las demostraciones sólo pueden aplicarse resultados de la teoría de sucesiones y series numéricas.

11. Sea $l^\infty = \left\{\eta = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$. Se define $||\eta||_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
Demostrar que

(a). l^∞ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

(b). $||\cdot||_\infty$ es una norma sobre l^∞.

(c). l^∞ con la norma $||\cdot||_\infty$ es un espacio de Banach.

Para las demostraciones sólo pueden aplicarse resultados de la teoría de sucesiones y series numéricas.

12. Sea $c = \left\{\eta = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^\infty, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$.
Demostrar que

* I * c es un subespacio vectorial de l^∞.

* II * c con la norma de l^∞ restringida a él, es un subespacio cerrado de l^∞.

* III * c con la norma de l^∞ restringida a él, es un espacio de Banach.

⑬. Demostrar que

(I) todo subespacio cerrado de un espacio de Banach es un espacio de Banach.

(II) todo subespacio completo de un espacio de Banach es cerrado.

⑭. Demostrar, con las normas definidas oportunamente, los siguientes enunciados.

-I- $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

-II- $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$ es denso en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

-III- $\Lambda = \{\eta = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \exists n_0 \in \mathbb{N} / x_n = 0\, \forall n > n_0\}$ es denso en l^1 y en l^2.

Los espacios de Lebesgue L^p. Convolución.

①. Mostrar que, si $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $\epsilon > 0$, existe una función simple $\mathcal{X}$-medible ϕ tal que $||f - \phi|| < \epsilon$. Es válido para $L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$?

②. Sea $X = \mathbb{N}$ y sea λ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que $\lambda(\{n\}) = \frac{1}{n^2}$. Mostrar que $\lambda(X) < \infty$.
Sea f definida sobre X por $f(n) = \sqrt{n}$. Mostrar que $f \in L^p$ sii $1 \leq p < 2$.

③. Sea $X = (0, 1)$ con la medida de Lebesgue. Dar un ejemplo de una función f tal que $f \in L^p(X)$ sii $1 \leq p < 2$.

④. Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida finita y $f \in L^p$. Mostrar que $f \in L^r$ para $1 \leqq r \leqq p$.

⑤. Calcular la convolución $f * g$ si $f(x) = x\chi_{[0,1]}$ y $g(x) = \chi_{[0,1]}$.

⑥. Siendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define el soporte de f como

$$\mathrm{sop}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \neq 0\}$$

Probar que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tienen soporte acotado, la convolución $f * g$ también.