ACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FUNCIONES REALES
Gabriela Reyero - María Evangelina Alvarez.

TRABAJOS PRÁCTICOS AÑO ACADÉMICO 2015.

Práctica Nº 4: Medidas.

①. Sea (X,Φ,μ) un espacio con medida y $A\in\Phi$. Sea Φ_A la σ-álgebra inducida por Φ sobre A.

(a). Mostrar que la restricción μ_A de μ sobre A es una medida sobre el subespacio medible (A,Φ_A).

(b). Mostrar que si μ es una medida finita o si $\mu(A)<\infty$, la medida μ_A es finita y que si μ es σ-finita, también lo es μ_A.

②. Sea (X,Φ) un espacio medible. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea μ_n una medida sobre (X,Φ) tal que $\mu_n(X)=1$. Sea λ la función de conjunto definida sobre Φ de la siguiente manera, para cada $E\in\Phi$,

$$\lambda(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E).$$

Mostrar que λ es una medida sobre (X,Φ) y que $\lambda(X)=1$.

③. Sea el espacio medible $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ y sea (a_n) una sucesión de reales no negativos. Sea μ la función de conjunto definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ por

$$\mu(\emptyset)=0 \quad \mu(E)=\sum_{n\in E}a_n \text{ si } E\neq\emptyset.$$

-a- Mostrar que μ es una medida sobre $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

-b- Mostrar que toda medida sobre $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ puede obtenerse de esta manera para alguna sucesión $(a_n)\subset\overline{\mathbb{R}}$.

④. Sea $(X,\mathcal{P}(X))$ un espacio medible, con X no numerable. Se define la función μ de la siguiente manera:

$$\mu(E)=\begin{cases}0 & \text{si } E \text{ es numerable}\\ +\infty & \text{si } E \text{ es no numerable}\end{cases}$$

Mostrar que μ es una medida sobre $(X,\mathcal{P}(X))$.

⑤. Sea $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, se define la función μ como

$$\mu(E)=\begin{cases}0 & \text{si } E \text{ es finito}\\ +\infty & \text{si } E \text{ es infinito}\end{cases}$$

¿ Es μ una medida?

⑥. Si $\{F_n\}_n$ es una sucesión decreciente en (X,Φ), tal que $\mu(F_1)<\infty$ resulta $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$.

Mostrar que la hipótesis $\mu(F_1)<\infty$ es crucial.

Mostrar que la proposición sigue siendo válida si μ es una medida con signo.

⑦. Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y sea $\{E_n\}$ una sucesión en Φ. Mostrar que:

a $\mu\left(\underline{\lim} E_n\right) \leqq \underline{\lim} \mu\left(E_n\right)$.

b $\overline{\lim} \mu\left(E_n\right) \leqq \mu\left(\overline{\lim} E_n\right)$ si $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$.

Mostrar que esta desigualdad puede valer si $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty$.

⑧. Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y sea (X, Φ', μ') su completación. Mostrar que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función Φ'-medible existe una función $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$, Φ-medible y tal que $g(x) = f(x)$ μ-pctp.

Hint: para cada $r \in \mathbb{Q}$ considerar $A_r(f) = \{x \in X : f(x) > r\}$ y expresar $A_r(f) = E_r \cap N_r$ donde $E_r \in \Phi$ y $N_r \subset Z_r$ con $\mu(Z_r) = 0$. Sea Z tal que $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r \subset Z$ y $\mu(Z) = 0$. Definir

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$

⑨. Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida completa. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una función medible y la sucesión (f_n) converge μ-pctp a una función $f : X \to \mathbb{R}$. Mostrar que f es medible. ¿Qué podría decirse en el caso que la medida no fuese completa? (Mostrar un ejemplo que no lo verifique).

⑩. Sea (X, Φ, μ) un espacio con medida y sea $Z = \{E \in \Phi : \mu(E) = 0\}$.

(a)- ¿Es Z una σ-álgebra?

(b)- Mostrar que si $E \in Z$ y $F \in \Phi$ entonces $E \cap F \in Z$.

(c)- Mostrar que si $(E_n) \subset Z$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in Z$.

⑪. Sea m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Mostrar que:

a. m es σ-finita.

b. Si E es abierto no vacío entonces $m(E) > 0$.

c. Si K es compacto entonces $m(K) < \infty$.

⑫. I. Mostrar que si K es conjunto de Cantor, $K \in \mathcal{M}$ y $m(K) = 0$, además K no contiene ningún intervalo abierto.

II. Mostrar que existe un conjunto con medida de Lebesgue positiva y que no contenga ningún intervalo abierto.

III. Probar que todo conjunto medible Lebesgue de medida positiva contiene un subconjunto no medible.

⑬. Sea $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que f toma los valores $\pm\infty$ en un conjunto de medida (de Lebesgue) cero. Probar que dado $\epsilon > 0$ existe un número positivo M tal que $|f| \leqq M$ excepto en un conjunto de medida menor que ϵ.

⑭. Dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}$ se dicen *separados* si la clausura de uno no intersecta al otro:

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Probar que si A y B son separdos y m^* denota la medida exterior de Lebesgue, entonces

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

⑮. Sea A un conjunto medible Lebesgue de medida finita. Probar que

+a+ dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto G abierto tal que $m(A \triangle G) < \epsilon$,

+b+ existe un conjunto U que es unión finita de intervalos abiertos tal que $m(A \triangle U) < \epsilon$.

⑯. Considerar el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la $\sigma-$álgebra de Borel y m es la medida de Lebesgue. Sea A un boreliano de medida de Lebesgue finita y sea $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida según

$$f_A(x) = m((-\infty, x] \cap A).$$

Probar que f_A es continua.

Completar las demostraciones de los siguientes enunciados:

Teoría de Probabilidades.

Un **experimento** se puede ver de manera intuitiva como un proceso que bajo ciertas condiciones puede ser repetido cualquier número de veces, con el mismo conjunto de condiciones, y sobre la terminación del mismo, ciertos resultados son observados. Se dice que un experimento es **determinístico** si dadas las condiciones sobre las cuales se ejecuta, el resultado está completamente determinado.

Definición: Un experimento en donde su resultado no es determinado de forma única y en su lugar existe un conjunto de posibles resultados, se le llama un **experimento aleatorio**. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es llamado **espacio muestral** y es denotado por $\mathcal{S}$, los elementos $s \in \mathcal{S}$ son llamados **puntos muestrales**.

De acuerdo a la teoría desarrollada, $\mathcal{S}$ puede ser complementado con una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$; en el presente contexto, los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados **eventos** y $\mathcal{A}$ es llamada la $\sigma-$**álgebra de eventos**. Eventos de la forma $\{s\}$ son llamados **eventos simples**, mientras que un evento que contenga al menos dos puntos muestrales es llamado un **evento compuesto**; $\mathcal{S}$ en si mismo es llamado **evento seguro** o **evento cierto**, y $\emptyset$ es el **evento imposible**. Si el experimento aleatorio resulta en s y $s \in A \in \mathcal{A}$, se dice que el evento A **ocurrió** o **sucedió**.

El evento $\bigcup_j A_j$ ocurre si al menos uno de los A_j ocurre, el evento $\bigcap_j A_j$ ocurre si todos los A_j ocurren, $A_1 \backslash A_2$ ocurre si A_1 ocurre pero no A_2, y así con todas las formas posibles de construir eventos.

Definición: Sea $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida positiva. Si $P(\mathcal{S}) = 1$, se dice que P es una **medida de probabilidad**, y la terna $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P)$ se llama **espacio de probabilidad**.

Proposición: Si $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad, entonces

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. para toda $A \in \mathcal{A}$, $P(\mathcal{C}A) = 1 - P(A)$,
3. para toda $A \in \mathcal{A}$, $0 \le P(A) \le 1$,
4. para todas $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Definición: Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) > 0$. La **probabilidad condicional para** A **dado** es la función $P(.|A) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(B|A) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)},$$

y $P(B|A)$ es la **probabilidad condicional de** B **dado** A.

Teorema: Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) > 0$. La función de probabilidad condicional es una medida de probabilidad y la terna $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P(.|A))$ es un espacio de probabilidad.

Teorema: Sean $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$, eventos tales que $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \ldots P(A_2|A_1)P(A_1).$$

Definición: Sean $A_i \in \mathcal{A}$, con $i \in \mathbb{N}$, disjuntos dos a dos tales que $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Tal colección de eventos es una **partición** de $\mathcal{S}$. Dicha partición puede ser finita o numerable.

Teorema: Si $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ es una partición de $\mathcal{S}$ con $P(A_i) > 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces para $B \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$P(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i).$$

Teorema de Bayes: Si $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ es una partición de $\mathcal{S}$ con $P(A_i) > 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y si $P(B) > 0$, entonces

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)}.$$