ACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FUNCIONES REALES
Gabriela Reyero - María Evangelina Alvarez.

TRABAJOS PRÁCTICOS AÑO ACADÉMICO 2015.

Práctica Nº 3: Medibilidad.

1. Sea X un conjunto no vacío, decimos que una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es un **álgebra** si tiene las siguientes propiedades:

-I- $X \in \mathcal{A}$.
-II- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}A \in \mathcal{A}$.
-III- $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Mostrar que:

a $\emptyset \in \mathcal{A}$.
b $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
c $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$.
d Toda σ-álgebra es un álgebra.

2. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ la familia integrada por $\emptyset$ y todas las uniones finitas de intervalos. Mostrar que $\mathcal{A}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$, mostrar que existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$, disjuntos 2 a 2 y tales que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

4. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos **límite superior de** $\{A_n\}$, al conjunto $\overline{\text{lím}} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ para infinitos } A_n\} = \{x \in X : \forall n_0 \; \exists \; n > n_0 \; / \; x \in A_n\}$ y **límite inferior de** $\{A_n\}$, al conjunto $\underline{\text{lím}} A_n = \{x \in X : x \in A_n \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ salvo, tal vez, un número finito}\} = \{x \in X : \exists \; n_0 / \; x \in A_n \; \forall n > n_0\}$. Mostrar que:

-a- $\overline{\text{lím}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ y $\underline{\text{lím}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$.

-b- Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de X entonces

$$\underline{\text{lím}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \overline{\text{lím}} E_n.$$

-c- Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de X entonces

$$\underline{\text{lím}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \overline{\text{lím}} E_n.$$

5. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Mostrar que:

   (a)- $\emptyset \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \underline{\text{lím}} A_n \subset \overline{\text{lím}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset X$.

   (b)- Dar una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\emptyset = \underline{\text{lím}} A_n$ y $\overline{\text{lím}} A_n = X$.

   (c)- Dar una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no sea creciente ni decreciente tal que $\underline{\text{lím}} A_n = \overline{\text{lím}} A_n$. Cuando vale esta igualdad, este único conjunto de denomina **límite** de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se nota $\text{lím}\, A_n$.

6. Una familia no vacía $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ se denomina una **clase monótona** si para cada sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente en $\mathcal{M}$ y cada sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente en $\mathcal{M}$, los conjuntos $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}$. Mostrar que, dada cualquier familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ existe una mínima clase monótona $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{P}(X)$ que contiene a $\mathcal{F}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ se denomina **clase monótona generada por** $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ constituye una **familia de generadores** de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Mostrar que una σ-álgebra es una clase monótona y que un álgebra monótona es una σ-álgebra.

7. Mostrar que si $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, la σ-álgebra $\Phi_{\mathcal{F}}$ generada por $\mathcal{F}$ contiene a la clase monótona $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ generada por $\mathcal{F}$. Mostrar que las inclusiones

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \subset \Phi_{\mathcal{F}}$$

   pueden ser estrictas.

8. Mostrar que si X es un espacio topológico la familia de cerrados es un sistema de generadores del álgebra de Borel β de X.

9. Sea $X = \mathbb{R}$ y β el álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Mostrar que los siguientes son sistemas generadores de β:

$$\begin{array}{ll}
G_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} & G_9 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \\
G_2 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} & G_{10} = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \\
G_3 = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\} & G_{11} = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\} \\
G_4 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\} & G_{12} = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\} \\
\text{otros 4 conj con } a,b \in \mathbb{Q}. & \text{otros 4 conj con } a,b \in \mathbb{Q}.
\end{array}$$

10. Sea $X = \bar{\mathbb{R}}$ y $\bar{\beta}$ el álgebra de Borel extendida. Mostrar que $\bar{\beta}$ es la σ-álgebra generada por la familia de conjuntos $E, \{+\infty\}, \{-\infty\}$ con $E \in \beta$ (álgebra de Borel de $\mathbb{R}$). Mostrar además que $\bar{\beta} = \{E, E\cup\{+\infty\}, E\cup\{-\infty\}, E\cup\{+\infty,-\infty\} : E \in \beta\}$.

11. Sean (X,Φ) un espacio medible, $E \subset X$ y χ_E función característica de E. Mostrar que χ_E es Φ-medible sii $E \in \Phi$.

12. Dar un ejemplo de un espacio medible (X,Φ) y una función $f : (X,\Phi) \to \mathbb{R}$ que no sea Φ-medible pero tal que $|f|$ y f^2 si sean Φ-medibles.

13. Mostrar que las funciones monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones de Borel.

14. Sea (X,Φ) un espacio medible. Sea $c \in \mathbb{R}$ y sean $f,g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ tales que $f,g \in \mathcal{M}(X,\Phi)$. Mostrar que entonces $cf,\ f+g,\ f^+,\ f^-,\ |f| \in \mathcal{M}(X,\Phi)$.