



TRABAJOS PRÁCTICOS AÑO ACADÉMICO 2015.

Práctica Nº 2: Funciones reales. Continuidad

- ①. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se define las funciones **parte positiva de f** , $f^+ : D \rightarrow \mathbb{R}$ y **parte negativa de f** , $f^- : D \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Demostrar que: $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$, $f^- = \frac{|f| - f}{2}$.

- ②. Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, se define **máximo** y **mínimo entre f y g** como

$$\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D, \quad \text{mín}(f, g)(x) = \text{mín}(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D.$$

Mostrar:

-a- $f^+ = \text{máx}(f, 0)$, $f^- = \text{máx}(-f, 0)$.

-b- $\text{máx}(f, g) + \text{mín}(f, g) = f + g$.

-c- $\text{máx}(f, g) - \text{mín}(f, g) = |f - g|$.

-d- $\text{máx}(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$.

-e- $\text{mín}(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$.

- ③. Mostrar que si f, g son continuas en D entonces las funciones $|f|$, f^+ , f^- , $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ son continuas en D .

- ④. Demostrar que:

(a). $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) \leq A$ sii $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in D$ con $0 < |x - p| < \delta$ resulta $f(x) \leq A + \varepsilon$.

(b). $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) \geq A$ sii $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall \delta > 0, \exists x \in D$ con $0 < |x - p| < \delta$ tal que $f(x) \geq A - \varepsilon$.

(c). valen análogos enunciados para $\lim$.

(d). $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ y vale la igualdad (cuando $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) \neq \pm\infty$) sii existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

- ⑤. Mostrar que:

a) Si $f(x) \leq g(x)$ en $E^*(p)$ entonces $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ y $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} g(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow p} -f(x) = -\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) + \overline{\lim}_{x \rightarrow p} g(x)$.

- ⑥. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $x_0 \notin F$, probar que existe una función f continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) = 1 \forall x \in F$.
- ⑦. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $F \neq \mathbb{R}$, sea $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Mostrar que existe una función continua g definida en $\mathbb{R}$ que es extensión de f . Además, si f tiene máximo, g puede ser construida de modo que alcance el mismo máximo que f .
- ⑧. Sea f definida en $[0, 1]$ por

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en todo punto irracional y discontinua en todo punto racional, ¿de qué tipo son las discontinuidades?

- ⑨. Si f es monótona en $[a, b]$, las únicas posibles discontinuidades de f son saltos finitos y que el número de las mismas es finito o numerable.
- ⑩. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, mostrar que:
- I- si f es acotada sobre $S \subset D$, $\Omega_f(S) = \sup_{x, y \in S} |f(x) - f(y)|$.
 - II- si f es acotada en un entorno de $p \in D$, $\omega_f(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega_f(D \cap E_\delta(p))$.
 - III- $\omega_f(p) = \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) - \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$.
- ⑪. Hallar $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall \eta \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in [0, 1] : f(x) = \eta\}$ es vacío o bien consta de dos puntos. Mostrar que esta f no puede ser continua.
- ⑫. Sea f uniformemente continua en su dominio D , mostrar que f puede ser extendida a $\bar{D}$ por una función g continua.
- ⑬. Demostrar que f es uniformemente continua sobre S acotado entonces f es acotada sobre S .
- ⑭. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in D$, se dice que f es **semicontinua superiormente (inferiormente) en p** sii $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $x \in D \cap E_\delta(p) \Rightarrow f(x) < f(p) + \varepsilon$ (o $f(x) > f(p) - \varepsilon$). Se indica **scs** en p (o **sci** en p).

Mostrar que:

- a- si f, g **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow (f + g)$ **scs** en p (**sci** en p).
- b- si f **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow -f$ **sci** en p (**scs**).
- c- si f, g **scs** en p $\nRightarrow fg$ **scs** en p .

- ⑮. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in D$, mostrar que:

$$*a* \quad f \text{ **scs** en } p \Leftrightarrow f(p) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x).$$

$$*b* \quad f \text{ **sci** en } p \Leftrightarrow f(p) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x).$$

- ⑯. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **sci** (**scs**) en cada punto, mostrar que $\{x : f(x) > \eta\}$ es abierto para todo $\eta \in \mathbb{R}$ ($\{x : f(x) < \eta\}$ abierto).