ACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FUNCIONES REALES
Gabriela Reyero - María Evangelina Alvarez.

TRABAJOS PRÁCTICOS AÑO ACADÉMICO 2015.

Práctica Nº 1: Los números reales

1. Completar las demostraciones de los apuntes de teoría.
2. A partir de los axiomas listados en la Definición 1, probar la unicidad de los elementos neutro, identidad, y del opuesto y recíproco de ¿todo? elemento de un cuerpo.
3. Verificar que los conjuntos F^+ y F^- definidos en la Definición 4 son efectivamente
$$F^+ = \{x \in F : \theta < x\} \qquad \text{y} \qquad F^- = \{x \in F : x < \theta\}.$$
4. Deducir, a partir de la Definición 8, que si $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in F$ entonces
$$-(nx) = (-n)x, \qquad \text{y} \qquad n\theta = \theta.$$
5. Definir adecuadamente *relación de isomorfismo de cuerpos ordenados* según la Definición 10 y probar que es de equivalencia.
6. Probar que si X es un subconjunto de un cuerpo ordenado F que posee máximo m, entonces el conjunto X es acotado superiormente y su supremo es m.
7. Probar que todo intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$ contiene números racionales.
8. Si $(x_\alpha, \alpha \in A)$ es una familia arbitraria (no necesariamente numerable) de valores no negativos de la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$, entonces definimos la *suma desordenada* de dicha familia por medio de la fórmula
$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sup_F \sum_{\alpha \in F} x_\alpha,$$
donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos F de A. Probar las siguientes afirmaciones:

-a- Si $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ es numerable, entonces
$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha_k}.$$

-b- Si $\sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha < \infty$, entonces el conjunto de todos los α tales que $x_\alpha > 0$ es numerable.

-c- Si $(A_i, i \in I)$ es una *partición* de A, es decir, una familia disjunta cuya unión es A, entonces
$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} x_\alpha \qquad \text{(fórmula de la asociatividad).}$$

-d- A partir de la fórmula de la asociatividad probar que una serie doble con términos no negativos puede sumarse en cualquier orden. Es decir, si (a_{nk}) es una sucesión doble de números no negativos, entonces

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

⑨. Sea p un entero mayor que 1, y x un número real con $0 < x < 1$. Mostrar que existe una sucesión (a_n) de enteros con $0 \leq a_n < p$ tales que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n},$$

y que esta sucesión es única excepto cuando x es de la forma $\frac{q}{p^n}$, en cuyo caso existen exactamente dos tales sucesiones. Mostrar que, recíprocamente, si (a_n) es una sucesión cualquiera de enteros con $0 \leq a_n < p$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

converge a un número real x con $0 \leq x \leq 1$. Si $p = 10$, esta sucesión es la *expansión decimal* de x. Para $p = 2$ se llama la *expansión binaria* de x y para $p = 3$, la *expansión ternaria*.

⑩. El *conjunto de Cantor ternario* $\mathcal{C}$ consiste de todos los números reales en el intervalo $[0, 1]$ que tienen expansión ternaria (a_n) con $a_n \neq 1$, donde si x tiene dos expansiones ternarias, x estará en C si alguna de las expansiones no tiene términos iguales a 1. Probar que:

(a) $\mathcal{C}$ es cerrado,

(b) $\mathcal{C}$ que se obtiene primero removiendo de $[0, 1]$ el tercio del medio $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, luego de los intervalos que quedan removiendo los tercios del medio $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, y así sucesivamente.

(c) $\mathcal{C}$ puede ponerse en correspondencia uno a uno con el intervalo $[0, 1]$.

(d) El conjunto de puntos de acumulación de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{C}$.

⑪. Demostrar que $\mathbb{Q}$ es numerable y que $\mathbb{R}$ es no numerable.

⑫. (a). Demostrar que toda familia de intervalos abiertos disjuntos es numerable.

(b). ¿ Es numerable cualquier familia de conjuntos disjuntos?

(c). ¿ Es numerable un conjunto de puntos aislados?

⑬. Demostrar para A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$:

-a-. A' numerable $\Rightarrow A$ numerable.

-b-. $A' \not\subseteq (A')'$.

-c-. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$.

-d-. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

-e-. $(\bar{A})' = A'$.

⑭. Hallar A tal que $A' = \{0\} \cup \{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

⑮. Probar que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ y que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Mostrar que no vale la igualdad.

⑯. Probar que para todo A, A' es cerrado.

⑰. Si F cerrado y $a \notin F$ existen abiertos disjuntos A, B tales que $a \in A$ y $F \subset B$.

18. Hallar la clausura de cada uno de los siguientes conjuntos. En el caso en que existan, identificar el ínfimo y el supremo.

$$\begin{aligned} A &= \left\{\pm\frac{1}{n} \pm \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad & B &= \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \\ C &= \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad & D &= \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}, \\ E &= \{r \in \mathbb{Q} : r^2 \leq 5\}. \end{aligned}$$

19. Si A, $B \subset \mathbb{R}$ son acotados superiormente (inf) mostrar que también lo son los conjuntos

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\} \quad \text{y} \quad cA = \{ca \in \mathbb{R} : a \in A\} \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Valiendo además $\sup A + B = \sup A + \sup B$ y $\sup cA = c \sup A$ si $c > 0$.

Analizar los casos $c = 0$ o $c < 0$. Enunciar resultados análogos para el $\inf A + B$ y $\inf cA$.

20. Si A acotado superiormente entonces $\bar{A}$ acotado superiormente y $\sup \bar{A} = \sup A$.

21. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que B es acotado superiormente, y además $\forall a \in A \; \exists \; b \in B$ tal que $a \leqq b$. Entonces A es acotado superiormente y $\sup A \leqq \sup B$.

22. Sea $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$\text{i)} \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}, \qquad \text{ii)} \lim_{n\to\infty} n a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases},$$

$$\text{iii)} \lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0 \text{ si } 0 < a < 1.$$

23. Demostrar los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ si } a > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

24. a) ¿ Puede ser $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ aunque ni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ni $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tengan límite 0?
b) ¿ Es posible que $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sean convergentes si $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge?
c) ¿ Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la sucesión $\{a_{n+1} - a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0? ¿Vale el recíproco?

25. Encontrar limite superior e inferior de las sucesiones:

a $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_n$,

b $\left\{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right\}_n$,

c $\left\{2 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_n$.

26. Probar que si $a_n < b_n \; \forall n$ entonces:

(a) $\underline{\lim}\, a_n \leqq \underline{\lim}\, b_n$.
(b) $\overline{\lim}\, a_n \leqq \overline{\lim}\, b_n$.

27. Probar que para sucesiones acotadas $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ vale

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leqq \underline{\lim}\, (a_n + b_n) \leqq \overline{\lim}\, (a_n + b_n) \leqq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

Dar ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

28. Probar que si $\lim b_n = 0$ entonces

$$\overline{\lim}\, \{a_n + b_n\} = \overline{\lim}\, a_n, \qquad \underline{\lim}\, (a_n + b_n) = \underline{\lim}\, a_n.$$

29. Demostrar que $\underline{\lim}\, (-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n$.